Elementare Zahlentheorie, SS 19

Blatt 5, 9.4.2019

21. Es seien a, $b \in \mathbb{Z}$ mit $(a, b) \neq (0, 0)$ und $d = \mathrm{ggT}(a, b)$. Zeigen Sie:

$$\{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid ax + by = 0\} = \{t(b/d, -a/d) \mid t \in \mathbb{Z}\} \quad .$$

22. Es seien a, b, d wie in Aufgabe 21 und $c \in \mathbb{Z}$. Wir setzen

$$\begin{aligned} L &= \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid ax + by = c\} \\ L_h &= \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid ax + by = 0\} \quad . \end{aligned}$$

Weiters sei $(x_0, y_0) \in L$. Zeigen Sie:

(a)
$$L = \{(x_0 + x, y_0 + y) \mid (x, y) \in L_h\} \quad .$$

(b)
$$L = \{(x_0 + t\frac{b}{d}, y_0 - t\frac{a}{d}) \mid t \in \mathbb{Z}\} \quad .$$

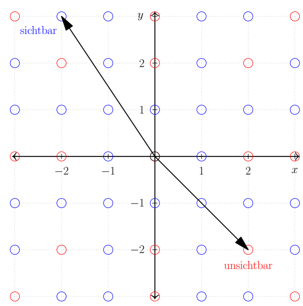
23. Wir betrachten die Gleichung

$$119x + 91y = 231 \quad . \tag{1}$$

(a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge von (1) über $\mathbb{Z}^2$.

(b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge von (1) über $\mathbb{N}^2$.

24. Es sei $P = (a, b) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Wir sagen, dass P von $(0, 0)$ aus sichtbar ist, wenn $(0, 0)$ und P die einzigen Punkte in $\mathbb{Z}^2$ sind, die auf der Strecke von $(0, 0)$ nach P liegen.



Zeigen Sie, dass P genau dann von $(0, 0)$ aus sichtbar ist, wenn $\mathrm{ggT}(a, b) = 1$ gilt.

25. Es seien m, $n \in \mathbb{Z}$.

(a) Zeigen Sie, dass durch $(d, e) \mapsto de$ eine Abbildung $\mu\colon T(m) \times T(n) \to T(mn)$ definiert wird.

(b) Zeigen Sie, dass μ surjektiv ist.

(c) Zeigen Sie, dass μ genau dann injektiv ist, wenn m und n teilerfremd sind.