Elementare Zahlentheorie, SS 19

Blatt 3, 26.3.2019

11. Es sei $n \in \mathbb{N}^+$. Wir setzen

$$T_<(n) = \{t \in T(n) \mid t < \sqrt{n}\}, \quad T_>(n) = \{t \in T(n) \mid t > \sqrt{n}\}$$

(a) Konstruieren Sie eine bijektive Abbildung $f\colon T_<(n) \to T_>(n)$.

(b) Benutzen Sie (a) um zu zeigen: n ist genau dann eine Quadratzahl, wenn $\#T(n)$ ungerade ist.

12. Bestimmen Sie $d = \mathrm{ggT}(a, b)$ für

(a) $(a, b) = (7469, 2464)$;

(b) $(a, b) = (2689, 4001)$.

13. Bestimmen Sie für alle $k \in \mathbb{Z}$

(a) $\mathrm{ggT}(2k + 1, 9k + 4)$;

(b) $\mathrm{ggT}(4k + 1, 5k + 2)$.

14. Es seien a, $b \in \mathbb{Z}$ mit $\mathrm{ggT}(a, 4) = \mathrm{ggT}(b, 4) = 2$. Zeigen Sie $\mathrm{ggT}(a + b, 4) = 4$.

15. Wir betrachten die Folge ganzer Zahlen $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch

$$G_0 = 2,\ G_1 = 3,\ G_n = 2G_{n-1} + G_{n-2} \text{ für } n \geq 2 \quad .$$

Zeigen Sie $\mathrm{ggT}(G_n, G_{n+1}) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.