Naturwissenschaftliches Rechnen Mathematik & Datenverarbeitung

Beispiele und Anwendungen

STEFAN ROSENBERGER

basierend auf dem Skript von Gertrud Desch

Karl-Franzens-Universität Graz

11. Dezember 2025

INHALTSVERZEICHNIS

KAPITEL

1

SCHLUSSRECHNUNG UND MISCHUNGSRECHNUNG

1.1 Direkte Proportionen, Dreisatz

Die Schlussrechnung (bzw. direkte Proportion oder Dreisatz) fundiert in Ihrem Rechenschema auf einer *linearen Funktion* welche den Koordinatenursprung $(0, 0)$ *trifft*:

$$y = k \cdot x \tag{1.1}$$

wobei diese Gleichung eindeutig gelöst wird, indem man k bestimmt.
Um eine Schlussrechnung zu lösen benötigt man einmal ein Paar $(\tilde{x},\ \tilde{y})$ um daraus dann k bestimmen zu können. Die Herausforderung der direkten Proportion besteht im Regelfall nicht im *Lösen* derselbigen, sondern darin diese auch korrekt zu erkennen. In praktischen Anwendungen kann man eine Schlussrechnung auf zwei Arten erkennen:

1. Vervielfacht man die *AusgangsgröSSe* so vervielfacht sich die *resultierende GröSSe* um den selben Faktor. Typisches Beispiel: 10 Wassermelonen kosten 30 Euro, so kosten 30 Wassermelonen 90 Euro. Dabei ist die *AusgangsgröSSe* die Anzahl an Wassermelonen, und die *resultierende GröSSe* der Preis.
   Bitte beachten Sie, dass dies natürlich für alle Wertepaare gelten muss, also auch für 10 000 Wassermelonen zu einem Preis von 30 000 Euro.

2. Mathematisch präziser ist es die Eigenschaften der Linearen Gleichung zu fordern:
   Wenn man die AusgangsgröSSe um *Eines* erhöht, so addiert (bzw. subtrahiert) man bei der resultierenden GröSSe immer den selben Wert, unabhängig vom absoluten Wert der AusgangsgröSSe (mathematisch gesprochen ein linearer Zusammenhang). Zusätzlich **muss** gelten, dass, wenn man keine AusgangsgröSSe hat ($x = 0$), auch die resultierende GröSSe Null sein muss ($y = 0$).

Beispiel 1.1. Bei der Inventur der Firma *Smith* sollen Schrauben gezählt werden. Hierfür wurden 5 Schrauben abgewogen welche 17 g gewogen haben.
Im gesamten Unternehmen *Smith* befinden Sie $0,75$ t des selben Schraubentyps. Bestimmen Sie wie viele Schrauben diese Typs im Unternehmen sind!

Lösung. Wichtig ist hierbei natürlich, dass wir immer den gleichen Schraubentyp betrachten.
Wenn man doppelt so viele Schrauben nimmt, so wiegen diese *natürlich* doppelt so viel, drei mal so viele wiegen das dreifache usw.
Daher ist eine direkte Proportionalität gegeben. Jetzt müssen wir die GröSSen in Verbindung setzen:

$$\begin{aligned} 17\,\mathrm{g} \ldots\ldots 5\,\# \\ 0,75\,\mathrm{t} \ldots\ldots y\,\# \end{aligned}$$

Die Lösung erhält man, indem man aus dem ersten Zusammenhang das Verhältnis bildet (das ergibt die GröSSe k aus dem Model), und anschlieSSend mit dem Wert multipliziert auf den man SchlieSSen möchte (Schlussrechnung).
Vorher müssen wir *natürlich* noch die Einheiten umrechnen: $0,75\,\mathrm{t} = 0,75 \cdot 1000000\,\mathrm{g} = 750000\,\mathrm{g}$.

$$y\,\# = \frac{5\,\#}{17\,\mathrm{g}} \cdot 750000\,\mathrm{g} = 220\,588\,\#.$$

Es befinden sich 220 588 Schrauben im Unternehmen *Smith* (anders formuliert: Sauviele). □

Beispiel 1.2. In einem Kanal der Breite 3 m und der Tiefe 1 m flieSSt Abwasser mit einer Geschwindigkeit von $5\,\mathrm{m/s}$. Ein Kubikmeter des Abwassers enthält 20 mg eines Schadstoffes.
Wie viel Schadstoff flieSSt pro Tag den Kanal hinunter?

Lösung. Wie müssen uns wieder überlegen ob ein Dreisatz angebracht ist!
Zum Einen erkennen wir, dass in einer Sekunde immer die selbe Menge Schadstoff den Kanal hinunter flieSSt, also wartet man eine Sekunde so erhöht sich die resultierende Menge um diesen Wert. Zusätzlich gilt, wenn wir keine Sekunde warten so ist auch kein Schadstoff hinunter geflossen. Daher ist eine direkte Proportionalität passend!
Wir müssen wiederum auf gleiche Einheiten achten:

$$1\,\mathrm{d} = 24\,\mathrm{h} = 24 \cdot 60\,\mathrm{min} = 24 \cdot 60 \cdot 60\,\mathrm{s} = 86400\,\mathrm{s}.$$

Aus der Angabe wissen wir nun, wie groSS das Volumen ist, welches in einer Sekunde durch den Kanal flieSSt (Querschnitt des Kanals mal der Länge die durchgeflossen ist).

$$3\mathrm{m} \cdot 1\mathrm{m} \cdot 5\mathrm{m} = 15\,\mathrm{m}^2$$

Damit erhalten wir aus der Angabe:

$$\begin{aligned} 1\,\mathrm{m}^3 \ldots\ldots 20\,\mathrm{mg} \\ 15\,\mathrm{m}^3 \ldots\ldots y\,\mathrm{mg} \end{aligned}$$

womit wir

$$y = \frac{20\,\mathrm{mg} \cdot 15\,\mathrm{m}^3}{1\,\mathrm{m}^3} = 300\,\mathrm{mg}$$

erhalten, womit schlieSSlich

$$\begin{aligned} 1\,\mathrm{s} \ldots \ldots &\, 300\,\mathrm{mg} \\ 86400\,\mathrm{s} \ldots \ldots &\, y\,\mathrm{mg} \end{aligned}$$

folgt, und damit

$$y = \frac{300\,\mathrm{mg} \cdot 86400\,\mathrm{s}}{1\,\mathrm{s}} = 2592000\,\mathrm{mg} \approx 26\mathrm{kg}$$

Schadstoff pro Tag durch den Kanal flieSSt. □

Anmerkung 1.3. Es ist natürlich nicht notwendig, dass man jedes mal die Rechnung so ausführlich anschreibt, mit etwas *Selbstsicherheit* kann man natürlich auch schneller Rechnen.

1.2 Mischungsrechnung

Anmerkung 1.4. In praktischen (Labor-)Anwendungen kommt es häufig vor, dass man eine bestimmte Konzentration einer bestimmten *Lösung* benötigt, diese muss dann aus gegebenen *Lösungen* hergestellt werden. Um dies zu tun muss man die Mischungsrechnung beherrschen!

Fakt 1.5. Das Hauptgesetz der Mischungen lautet

$$\text{gelöste Menge} = \text{Volumen} \cdot \text{Konzentration}.$$

Durch umstellen der Gleichung erhält man:

$$\begin{aligned} \text{Konzentration} &= \frac{\text{gelöste Menge}}{\text{Volumen}} \\ \text{Volumen} &= \frac{\text{gelöste Menge}}{\text{Konzentration}} \end{aligned}$$

Beispiel 1.6. 100ml einer Kochsalzlösung mit einer Konzentration von 20mg/ml werden so lange eingekocht, bis nur mehr 20ml übrig sind. Welche Kochsalzkonzentration hat die eingedickte Lösung?

Lösung. Überlegung: Die enthaltene Kochsalzmenge ist vor und nach dem Kochen dieselbe. Wir notieren was wir über die Lösung wissen:

Zeitpunkt	Volumen [ml]	Konzentration [mg/ml]	gelöste Menge [mg]
vor dem Kochen	100	20	
nach dem Kochen	20		

Daraus können wir die gelöste Menge bestimmen (Produkt aus Volumen und Konzentration), welche vor und nach dem Kochen dieselbe ist. Daraus lässt sich dann die Konzentration bestimmen:

Zeitpunkt	Volumen [ml]	Konzentration [mg/ml]	gelöste Menge [mg]
vor dem Kochen	100	20	2000
nach dem Kochen	20	$\rightarrow \frac{2000}{20} = 100 \leftarrow$	2000

□

Beispiel 1.7. Wir vermengen drei Glukoselösungen,

- Lösung A habe $0,5$l und eine Konzentration von $3\,\mathrm{g}/\mathrm{l}$
- Lösung B habe $1,25$l und eine Konzentration von $8\,\mathrm{g}/\mathrm{l}$
- Lösung C habe $0,75$l und eine Konzentration von $2\,\mathrm{g}/\mathrm{l}$.

Welche Konzentration hat das Gemisch aus A, B und C?

Lösung. Wir erstellen eine Tabelle und tragen die Angaben ein:

Name	Volumen [l]	Konzentration [g/l]	gelöste Menge [g]
A	$0,5$	3	
B	$1,25$	8	
C	$0,75$	2	
Gemisch			

Nun können wir mithilfe des Hauptgesetz der Mischungen die gelösten Mengen bestimmen[1], und damit die Zusammensetzung des Gemisches erhalten:

Name	Volumen [l]	Konzentration [g/l]	gelöste Menge [g]
A	$0,5$	3	$1,5$
B	$1,25$	8	10
C	$0,75$	2	$1,5$
Gemisch	$2,5$	$\rightarrow \frac{13}{2,5} \leftarrow$	13

Damit erhalten wir, dass das Gemisch ein Volumen von $2,5$ Liter und eine Konzentration von $5,2\mathrm{g}/\mathrm{l}$ hat. □

Beispiel 1.8. Kochsalzlösung A hat eine Konzentration von $2\mathrm{mol}/\mathrm{l}$ (Mol pro Liter), Lösung B hat eine Konzentration von $10\mathrm{mol}/\mathrm{l}$. Benötigt werden 500ml einer Lösung mit Konzentration $5\mathrm{mol}/\mathrm{l}$. Wie viel ml der Lösungen A und B müssen gemischt werden?

Lösung. Um ein solches Beispiel zu lösen ist es ratsam sich in einer Tabelle zu notieren was man bereits kennt[2]:

Name	Volumen [l]	Konzentration [mol/l]	gelöste Menge [mol]
A		2	
B		10	
Gemisch	$0,5$	5	

Achten Sie darauf die richtigen Einheiten zu verwenden! Wir können nun mithilfe des Hautgesetzes der Mischung bestimmen, wie groSS die gelöste Menge im Gemisch sein muss. Zusätzlich wissen wir noch etwas! Wir wissen, dass wir die Flüssigkeiten A und B haben werden, wir wissen zu diesem Zeitpunkt zwar noch nicht wie viel wir haben werden, jedoch wissen wir, **dass** wir sie haben werden. Daher geben wir diesen Volumen einfach mal einen Namen (x , y):

[1] Wir multiplizieren jeweils die Volumen mit der entsprechenden Konzentration

[2] Auch bei anderen Beispielen ist es oft nützlich einfach mal hinzuschreiben was man weis!

Name	Volumen [l]	Konzentration [mol/l]	gelöste Menge [mol]
A	x	2	
B	y	10	
Gemisch	$0,5$	5	$2,5$

Damit können wir nun die gelösten Mengen berechnen[3],

Name	Volumen [l]	Konzentration [mol/l]	gelöste Menge [mol]
A	x	2	$2\,x$
B	y	10	$10\,y$
Gemisch	$0,5$	5	$2,5$

Weil das Volumen insgesamt $0,5$l sein soll, muss also gelten: $x + y = 0,5$. Weil die gesamte Kochsalzmenge $2,5$mol sein muss (die gelöste Menge im Gemisch), muss gelten: $2x + 10y = 2,5$. Wir erhalten daher zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten:

$$\begin{aligned} x + y &= 0,5 && (I) \\ 2x + 10y &= 2,5 && (II) \end{aligned}$$

Nun ziehen wir 2 mal die Gleichung (I) von der Gleichung (II) ab:

$$\begin{aligned} x + y &= 0,5 && (I) \\ 0x + 8y &= 1,5 && (II) \end{aligned}$$

Aus der zweiten Gleichung folgt, wenn man beide Seiten durch 8 dividiert:

$$y = \frac{3}{16}\,\mathrm{l}$$

Diesen Wert können wir nun in die erste Gleichung einsetzen und erhalten:

$$\Rightarrow \qquad x + \frac{3}{16} = \frac{8}{16} \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{5}{16}\,\mathrm{l}$$

Damit erhält man, dass $y = \frac{3}{16}\,\mathrm{l} = 187,5\,\mathrm{ml}$ von B und $x = \frac{5}{16}\,\mathrm{l} = 312,5\,\mathrm{ml}$ von A vermengen muss. □

1.3 Beispiele zum Vorbereiten

Beispiel 1.9. Aus einem Bienenstock werden 100 Arbeiterinnen entnommen, durch einen Farbpunkt markiert, und wieder eingebracht. Nach einiger Zeit wird dem Bienenstock eine neue Stichprobe entnommen. Unter 300 Arbeiterinnen fanden sich 15 markierte. Wie groSS ist die Gesamtpopulation der Arbeiterinnen im Bienenstock?

[3] Beachten Sie, auch wenn wir x noch nicht kennen, wir wissen, dass $2 \cdot x$ die gelöste Menge sein wird!

Lösung:

Beispiel 1.10. Die Aussterberate wird derzeit mit 130 Arten pro Tag angegeben [4]. Es wird angenommen, dass in etwa 15 Millionen Tierarten auf der Welt existieren.

- Wenn man annimmt, dass die Aussterberate konstant ist, wie viele Jahre würde es dauern bis alle Arten auf der Welt verschwunden sind?

- Argumentieren Sie, warum die obige Annahme nicht zutreffend sein kann, und damit, warum eine direkte Proportionalität bei dieser Aufgabe nicht geeignet ist um eine Vorhersage darüber zu treffen, wann alle Arten verschwunden sein werden.

Lösung:

Beispiel 1.11. Wir vermengen 100 ml 90%igen Alkohol, 200 ml 10%igen Alkohol und 700 ml reines Wasser. Prozentangaben sind Volumsprozente. Welche Alkoholkonzentration hat das Gemisch?

Lösung:

Beispiel 1.12. Gebraucht werden 100ml einer Glucoselösung mit einer Konzentration von 20 g Glucose pro Liter. Vorhanden sind eine Lösung A mit einer Konzentration von $5\,\mathrm{g/l}$, sowie eine Lösung B mit einer Konzentration von $30\,\mathrm{g/l}$. In welchen Mengen müssen A und B gemischt werden?

Lösung:

1.4 Weitere Beispiele zum Üben

1.4.1 Proportionen und Schlussrechnungen

Beispiel 1.13. Das Licht legt in der Sekunde ungefähr 300 000km zurück. Ein Lichtjahr ist die Strecke, die das Licht in einem Jahr zurücklegt. Wie viele Kilometer sind ein Lichtjahr?

Beispiel 1.14. Biomasse von Pflanzen wird gelegentlich durch kg organische Trockensubstanz (OTS) angegeben. Ein g organische Trockensubstanz enthält 20 kJ (Kilojoule = Kilowattsekunden) Energie.

- Ein Feld produziert im Jahr 1000 kg OTS. Wie viel Energie Produziert es am Tag?
- Wenn ein Mensch am Tag 10 000 kJ umsetzt, wie viele Menschen könnte das Feld ernähren?

Beispiel 1.15. In ein Grundwasserreservoir von unbekanntem Volumen werden 100 g einer Tracersubstanz eingebracht. Die Substanz verteilt sich gleichmäSSig im Reservoir. AnschlieSSend ergibt eine Analyse einer kleinen Wasserprobe aus dem Reservoir eine Konzentration von 2 mg Tracer pro Liter. Wie viel Wasser ist im Reservoir? Geben Sie die Lösung in m^3 an.

Beispiel 1.16. Die Zählung der roten Blutkörperchen kann inzwischen automatisch erfolgen. Früher wurde sie unter dem Mikroskop mittels der Zählkammer durchgeführt. Diese ist ein Objektträger, in den eine quadratische Vertiefung von der Tiefe $0,1$mm eingefräst ist. Am Boden dieser Vertiefung ist ein Gitter von Rasterlinien im Abstand von je $0,05$mm eingraviert. Der Zählvorgang erfolgt folgendermaSSen:

- Blut wird der Testperson abgenommen.
- Das Blut wird verdünnt: auf 200 Volumen-Einheiten Verdünnung kommt eine Einheit Blut.
- Die Verdünnung wird in die Zählkammer gefüllt und mit einem Deckglas abgedeckt, sodass sich eine Flüssigkeitsschicht von genau $0,1$mm Dicke in der Zählkammer befindet.
- Unter dem Mikroskop sieht man von oben auf die Zählkammer und die Rasterlinien am Boden der Vertiefung. Man sieht also von oben viele quaderförmige Zellen vom Volumen $0,1 \times 0,05 \times 0,05\text{mm}^3$.
- Die Erythrozyten in 80 Zellen werden ausgezählt.
- Von der Anzahl der ausgezählten Erythrozyten wird hochgerechnet, wie viele Erythrozyten in einem Kubikmillimeter unverdünntem Blut vorhanden sind.

Angenommen, in den 80 Zellen wurden 390 Erythrozyten gefunden. Wie viele Erythrozyten kommen auf 1 mm^3 unverdünntes Blut? **Tipp:** machen Sie eine kleine Skizze, und überlegen Sie sich wie viel Blut *wirklich* in den Kammern ist!

Beispiel 1.17. Aus einem Polizeiprotokoll: Herr X bekam eine Ladung reines Cocain. Er streckte den Stoff, indem er 200 g der Ladung durch Babypuder ersetzte (diese 200 g gingen in den Eigengebrauch). Den gepanschten Stoff wiederum vertrieb er. Beim Zugriff hatte er noch 300 g der Mischung übrig. Im Drogenlabor wurde festgestellt, dass diese noch 270 g reines Cocain enthielt. Wie groSS war die ursprüngliche Ladung Cocain?

1.4.2 Mischungsrechnungen

Beispiel 1.18. Das gesamte Volumen des Blutplasmas eines Kleintieres soll bestimmt werden, ohne dem Tier Schaden zuzufügen. Wir verwenden eine Tracermethode:

- Wir injizieren eine Lösung mit einer Tracersubstanz (z.B. Evans Blau), die sich nur im Blutplasma verteilt, und nicht ins Innere der Erythrozyten oder ins Interstitium ausweichen kann.
- Wir warten einige Minuten, sodass der Tracer Zeit hat, sich gleichmäSSig über das gesamte Blutplasma zu verteilen.
- Wir entnehmen eine Blutprobe und messen die Konzentration des Tracers im Blutplasma der Probe.
- Wir berechnen daraus das Volumen des Blutplasmas im Tier.

Injiziert wurden 0.5 ml einer Lösung mit einer Konzentration von $10 \mathrm{mol/ml}$. Im Plasma der Blutprobe wurde eine Konzentration von $0,0125 \mathrm{mol/ml}$ gemessen. Wie groSS ist das Plasmavolumen des Tieres?
Das Blut des Tieres besteht zu 60% aus Plasma, zum Rest groSSteils aus Erythrozyten (Hämatokrit = 40%). Wie groSS ist das gesamte Blutvolumen?

Beispiel 1.19. Wir mischen 20 ml Essigsäure in einer Konzentration von 10 Volumsprozent mit 60 ml Essigsäure in einer Konzentration von 30 Volumsprozent. Welche Konzentration hat das Gemisch?

Beispiel 1.20. Lösung A enthält einen Wirkstoff in einer Konzentration von $0,2\,\mathrm{mg/l}$, Lösung B enthält denselben Stoff in einer Konzentration von $0,6\,\mathrm{mg/l}$. Wir benötigen 2 Liter einer Lösung mit einer Konzentration von $0,3\,\mathrm{mg/l}$. Wie wird das Gemisch hergestellt?

Beispiel 1.21. Eine Salzlösung wurde eingedickt, indem 60% des Wassers verdampft wurden. Nach diesem Prozess hatte die Lösung eine Konzentration von $0,02\,\mathrm{kg}$ Kochsalz pro Liter. Welche Konzentration hatte die Lösung vor dem Eindicken?

Beispiel 1.22. Zu 90 Litern einer 10-prozentigen Kochsalz-Lösung werden 10 Liter einer 90-prozentigen Kochsalz-Lösung beigegeben. Welche Konzentration hat das Gemisch?

Beispiel 1.23. Wie viele Liter einer 85-prozentigen Kochsalz-Lösung müssen zu 90 Litern einer 10-prozentigen Kochsalzlösung beigegeben werden, damit das entstandene Gemisch eine 15-prozentige Kochsalz-Lösung ist? Alle Prozentangaben in dieser Aufgabe sind Volumens Prozente

Beispiel 1.24. Eine Getränkefirma will in einer 1000 ml Packung eine Mischung aus Pfirsichsaft (50 g Zucker pro 100 ml), Orangensaft (25 g Zucker pro 100 ml) und Wasser auf den Markt bringen. Dabei soll einer Packung fünf Mal soviel O-Saft als Pfirsich-Saft zugegeben werden und die Mischung eine Konzentration von 200 g Zucker pro Packung. Wie viel Pfirsichsaft (in ml) soll einer Packung zugegeben werden?

Beispiel 1.25. Es werden $0,25$ Liter 64%-igen Alkohol benötigt. Es stehen Ihnen hierfür 200 ml Alkohol mit eine Konzentration von 80%, $0,5$ Liter Alkohol mit einer Konzentration von 50% und 150 ml Alkohol mit einer Konzentration von 90% zur Verfügung.
Berechnen Sie ein Mischungsverhältnis welches den benötigen Alkohol liefert.

KAPITEL

2

PROZENTRECHNUNG UND POTENZRECHNEN

2.1 Prozentrechnung

Definition 2.1. Der Prozentsatz p ist gegeben durch den Zusammenhang einer Teilmenge A zu einer Grundmenge G und ist definiert durch

$$p = \frac{A}{G} \cdot 100\%$$

Anmerkung 2.2. Offensichtlich (wie wir später noch sehen werden) lässt sich diese Gleichung umformen zu

$$A = G \cdot \frac{p}{100\%}$$

Entscheidend für die Prozentrechnung ist das **richtige** Erkennen der Grundmenge auf welche sich das %-Symbol bezieht!
Die Prozentrechnung nennt man auch Hundertstel-Rechnung, denn

$$5\% = \frac{5}{100} = 0,05.$$

Beispiel 2.3. Von 250 Personen eines Betriebes sind 45 AkademikerInnen. Wie viel Prozent sind das? 60% der Personen desselben Betriebes haben Dauerstellen. Wie viele Personen sind das?

Lösung. Prozentsatz der AkademikerInnen:

$$\frac{45}{250} = 0,18 = 18\%.$$

Anzahl der Personen mit Dauerstellen:

$$250 \cdot 0,6 = 150.$$

$\square$

Beispiel 2.4. 80% aller Leser und Leserinnen einer Zeitschrift sind Frauen. Auf eine Umfrage haben 30% der Leserinnen und 60% der Leser geantwortet. Welcher Prozentsatz der gesamten Leserschaft hat geantwortet?

Lösung. In diesem Beispiel müssen wir insbesondere erkennen, dass sich diese drei Prozentsymbole auf jeweils andere Grundmengen beziehen! Aufteilung der Leser:

$$\begin{array}{lll} 20\%_A & \dots & \text{Leser} \\ 80\%_A & \dots & \text{Leserinnen} \end{array}$$

wobei wir mit $\%_A$ die Prozent **A**ller LeserInnen bezeichnen.
$30\%_W$ der Leserinnen haben geantwortet, also von den $80\%_A$. Damit bekommen wir

$$W = \frac{30}{100} \cdot 80\%_A = 24\%_A$$

haben geantwortet.
Weiters $60\%_M$ der Leser haben geantwortet, also von den $20\%_A$. Damit bekommen wir

$$M = \frac{60}{100} \cdot 20\%_A = 12\%_A$$

haben geantwortet.
Nun können wir die Anzahl addieren, da wir uns mit $\%_A$ auf die gleiche Grundmenge beziehen, und zusätzlich (offensichtlich) kein Mann als Frau zählt, also die Mengen die wir addieren sich nicht überschneiden:

$$W + M = 24\%_A + 12\%_A = 36\%_A$$

haben geantwortet. $\square$

2.2 Potenzrechnung

Auch wenn viele Rechnungen mit dem Computer gelöst werden, grundlegende Rechnungen sind im regelmäSSigen Laborbetrieb jedoch häufig anzuwenden. Sei es explizit als Berechnung, oder um Abschätzungen zu treffen. Daher ist es eine elementare Fähigkeit *einfache* Rechnungen ohne Taschenrechner lösen zu können.

2.3 Rechenübungen, Wiederholung Rechnen mit allgemeinen Zahlen

Versuchen Sie folgende Rechnungen **ohne** Taschenrechner zu lösen!

Beispiel 2.5. Rechnen mit Zahlen:

1. $$\frac{4}{5} + \frac{14}{3} = \dots$$

2. $$\frac{12}{\frac{7}{3}} = \dots$$

3. $$3^2 - (-3)^2 = \dots$$

Beispiel 2.6. Vereinfachen Sie soweit wie möglich

1. Vereinfachen Sie soweit wie möglich:
$$2(2x + 3y) + 3(3x - 2y) = \dots$$

2. Vereinfachen Sie soweit wie möglich:
$$\frac{(a+b)(a+c) - bc}{a} = \dots$$

3. Bingen Sie auf einen Nenner:
$$\frac{a}{a+d} - \frac{b}{b+c} = \dots$$

4. Vereinfachen Sie soweit wie möglich:
$$\frac{\frac{x+y}{x-y}}{\frac{x^2-y^2}{x^2}} = \dots$$

5. Finden Sie **alle** Fehler:
$$\frac{uv}{\sqrt{u^2+v^2}} = \frac{uv}{u+v} = \frac{v}{1+v} = v + 1$$

Fakt 2.7. Eine Potenz ist ein Ausdruck der Form
$$a^b.$$

Hierbei heiSSt a die Basis und b der Exponent. Wir gehen davon aus, dass Potenzen ausrechenbar/auswertbar sind, falls

- $a > 0$ und b beliebig, oder
- a beliebig und $b > 0$, oder
- $a = 0$ und $b > 0$

Eine allgemeinere Definition ist möglich, muss aber mit groSSer Sorgfalt betrachtet werden. Wir verzichten hier auf sie.

Fakt 2.8. Folgende Rechenregeln gelten für Potenzen, wenn m eine natürliche Zahl ist

$$\begin{aligned} a^m &= \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{m \text{ Faktoren}} \\ a^{\frac{1}{m}} &= \sqrt[m]{a} \end{aligned}$$

Weiter wurde für $a \neq 0$ vereinbart

$$a^0 = 1$$

Es gilt auch

$$a^{-b} = \frac{1}{a^b}$$

falls die beteiligten Potenzen ausrechenbar/auswertbar sind. Potenzen, die Bruchzahlen sind, lassen sich als Potenzen und Wurzeln umschreiben. Sind p, q positive ganze Zahlen, so ist

$$\begin{aligned} a^{\frac{p}{q}} &= \sqrt[q]{a^p} = \left(\sqrt[q]{a}\right)^p, \\ a^{-\frac{p}{q}} &= \frac{1}{\sqrt[q]{a^p}} = \frac{1}{\left(\sqrt[q]{a}\right)^p} \end{aligned}$$

Weiter gelten die Regeln:

$$\begin{aligned} (ab)^m &= a^m b^m \\ \left(\frac{a}{b}\right)^m &= \frac{a^m}{b^m} \\ a^{m+n} &= a^m a^n \\ a^{m-n} &= \frac{a^m}{a^n} \\ a^{mn} &= (a^m)^n \end{aligned}$$

Die Regeln, die Brüche beinhalten, gelten natürlich nur, falls $a \neq 0$ bzw. $b \neq 0$ ist.

Anmerkung 2.9. Es gibt keine allgemeine Formel für $(a + b)^m$, auSSer für positive Potenzen; Den sogenannten binomischen Lehrsatz. Davon kennen Sie sicher die Spezialfälle:

$$\begin{aligned} (a + b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ (a + b)^3 &= a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3 \end{aligned}$$

Es gibt aber keine nützliche Regel für $(a + b)^{-m}$, und schon gar keine für die Wurzel $\sqrt{a + b}$. Diese lässt sich bekanntlich als gebrochene Potenz schreiben (wie in den Regeln beschrieben).

2.4 Anwendung der Potenzen

Beispiel 2.10. Ein Wald wächst pro Jahr um $i\%$ der Vorjahresfläche. Bestimmen Sie eine Formel für die Fläche nach n Jahren.

Lösung. Wir bezeichnen die ursprüngliche Fläche mit F_0. Im Jahr k bezeichnen wir die Fläche mit F_k. Mithilfe der Prozentrechnung ($i = \frac{\text{Teilmenge}}{\text{Grundmenge}} \cdot 100$) können wir uns eine Formel für das Wachstum überlegen.
Zum Einen ist der Anteil der im k-ten Jahr zuwächst $F_k - F_{k-1}$. Damit erhalten wir

$$i = \frac{F_k - F_{k-1}}{F_{k-1}} \cdot 100 \qquad \Longleftrightarrow \qquad F_k = F_{k-1}\left(1 + \frac{i}{100}\right)$$

Für die ersten drei Jahre erhalten wir damit:

$$\begin{aligned} F_1 &= F_0\left(1 + \frac{i}{100}\right) \\ F_2 &= F_1\left(1 + \frac{i}{100}\right) \\ F_3 &= F_2\left(1 + \frac{i}{100}\right) \end{aligned}$$

Wenn wir nun *klever* F_1 in der zweiten sowie F_2 in der dritten Gleichung ersetzen bekommen wir

$$\begin{aligned} F_1 &= F_0\left(1 + \frac{i}{100}\right) \\ F_2 &= F_0\left(1 + \frac{i}{100}\right)\left(1 + \frac{i}{100}\right) = F_0\left(1 + \frac{i}{100}\right)^2 \\ F_3 &= F_0\left(1 + \frac{i}{100}\right)^2\left(1 + \frac{i}{100}\right) = F_0\left(1 + \frac{i}{100}\right)^3 \end{aligned}$$

Wenn wir uns diese Formel etwas genauer ansehen, können wir schlieSSen, dass das Wachstumsgesetz der Formel

$$F_k = F_0\left(1 + \frac{i}{100}\right)^k$$

gilt. □

2.4.1 Zehnerpotenzen, sehr groSSe und sehr kleine Zahlen

Fakt 2.11. In der Wissenschaft ist es üblich, sehr groSSe und kleine Zahlen mit Zehnerpotenzen auszudrücken, und zwar so, dass die Zahl vor der Zehnerpotenz genau eine Stelle vor dem Komma hat. In der Technik schreibt man oft mit Zehnerpotenzen, die Vielfache von 3 sind.

Beispiel 2.12.

- Schreiben Sie in wissenschaftlicher und in technischer Notation: $0,012$; $234,034$; $0,012 + 234,034$.

- Vergleichen Sie die GröSSen der folgenden Zahlen: $a = 2 \cdot 10^{-4}$, $b = 0,00019$, $c = 10^{-4} + 0,0001$.

Lösung.

$$\begin{aligned} 0,012 &= 1,2 \cdot 10^{-2} = 12 \cdot 10^{-3} \\ 234,034 &= 2,34034 \cdot 10^{2} = 234,034 \quad (10^0 = 1 \text{ schreibt man natürlich nicht dazu}) \\ 0,012 + 234,034 &= 2,34046 \cdot 10^{2} = 234,046 \end{aligned}$$

Die drei Zahlen sind alle ungefähr gleich groSS, nämlich von der GröSSenordnung 10^{-4}:

$$\begin{aligned} a &= 2 \cdot 10^{-4} \\ b &= 1,9 \cdot 10^{-4} \\ c &= 10^{-4} + 0,0001 = 10^{-4} + 10^{-4} = 2 \cdot 10^{-4} = a \end{aligned}$$

□

Fakt 2.13. Für die Zehnerpotenzen gibt es folgende Abkürzungen:

Exa	E	10^{18}	1 000 000 000 000 000 000	Trillion
Peta	P	10^{15}	1 000 000 000 000 000	Billiarde
Tera	T	10^{12}	1 000 000 000 000	Billion
Giga	G	10^{9}	1 000 000 000	Milliarde
Mega	M	10^{6}	1 000 000	Million
Kilo	k	10^{3}	1 000	Tausend
Milli	m	10^{-3}	0, 001	Tausendstel
Mikro	μ	10^{-6}	0, 000 001	Millionstel
Nano	n	10^{-9}	0, 000 000 001	Milliardstel
Pico	p	10^{-12}	0, 000 000 000 001	Billionstel
Femto	f	10^{-15}	0, 000 000 000 000 001	Billiardstel
Atto	a	10^{-18}	0, 000 000 000 000 000 001	Trillionstel

Diese Liste lässt sich nach oben noch durch *Zetta* und *Yota* sowie nach unten durch *Zepto* und *Yokto* erweitern. In der Praxis ist jedoch bei *Femto* für fast alle Anwendungen Schluss, wenn man bedenkt, dass ein Helium**kern** einen Durchmesser von 1 fm hat.

Beispiel 2.14. Wie viel m^2 ist ein km^2? Wie viel m^3 ist ein μm^3?

Lösung. Es gibt zwei Möglichkeiten diese Frage zu beantworten, durch überlegen oder durch *Nachrechnen*.

- Wir wissen, dass ein Quadratkilometer nach Länge und Breite je 10^3 Meter misst, das ergibt also $10^3 \cdot 10^3$ Quadratmeter. Ein Kubikmikormeter misst nach Länge, Breite und Höhe je 10^{-6} Meter. Das gibt ein Volumen von $10^{-6} \cdot 10^{-6} \cdot 10^{-6} = 10^{-18}$ Kubikmetern.

- Rechnerisch klappt das so: Wir wissen, dass 1 km = 1 000m gilt. Damit können wir *einfach* einsetzen und Potenzrechnen:

$$1\,\mathrm{km}^2 = 1 \cdot (1\,000\mathrm{m})^2 = 1 \cdot 1\,000^2\,\mathrm{m}^2 = 1\,000\,000\,\mathrm{m}^2$$

Analog klappt das für die zweite Fragestellung: Wir wissen, dass $1\,\mu\mathrm{m} = 10^{-6}\mathrm{m}$ gilt.

$$1\,\mu m^3 = 1\,(10^{-6}\mathrm{m})^3 = 1\,(10^{-6})^3\mathrm{m}^3 = 10^{-18}\mathrm{m}^3$$

□

2.4.2 Eine praktische Überlegung

Anmerkung 2.15. Wenn man sich in Mathematik-Kursen mit neuen Themen beschäftigt stellt man sich (berechtigt) häufig die Frage wozu das nützlich sein sollte. Versuchen Sie die nächste Aufgabe **ohne** Zehnerpotenzen nachzurechnen, dann wird unmittelbar ersichtlich wie nützlich diese Zahlendarstellung ist.

Beispiel 2.16. Die Erdvegetation produziert jährlich ca. $0,9 \cdot 10^{13}$kg Sauerstoff.
Der Sauerstoffanteil der gesamten Erdatmosphäre soll aus folgenden Daten geschätzt werden:

Mittlerer Luftdruck	P	$10,13\mathrm{N\,cm}^{-2}$
Erdoberfläche	F	$5,1 \cdot 10^8\mathrm{km}^2$
Erdbeschleunigung	g	$9,81\,\mathrm{N\,kg}^{-1}$
Sauerstoffanteil der Erdatmosphäre		22% (Gewichtsprozent)

Wie lange würde die Erdvegetation brauchen, um die gesamte Sauerstoffmenge der Atmosphäre aufzubauen?

Lösung. Wir rechnen zunächst die Oberfläche auf cm^2 um, damit die Einheiten von Druck und Fläche sich vertragen. Wir verwenden: $1\,\mathrm{k}m = 10^5\,\mathrm{cm}$:

$$F = 5,1 \cdot 10^8 \cdot (10^5\,\mathrm{cm})^2 = 5,1 \cdot 10^{18}\,\mathrm{cm}^2$$

Auf die gesamte Erdoberfläche drückt die Luft mit einer Kraft von (Druck mal Fläche):

$$P \cdot F = 10,13 \cdot 5,1 \cdot 10^{18}\,\mathrm{N} = 51,663 \cdot 10^{18}\,\mathrm{N}$$

Die Erdbeschleunigung g drückt aus: M kg einer Masse üben auf die Unterlage die Kraft M g aus. Daher ist die Masse der Erdatmosphäre

$$M = \frac{51,663 \cdot 10^{18}}{9,81} \approx 5,27 \cdot 10^{18}\,\mathrm{kg}$$

Davon sind 22% Sauerstoff, daher ist die Gesamtmasse des Sauerstoffs in der Erdatmosphäre:

$$5,27 \cdot 10^{18} \cdot 0,22 = 1,16 \cdot 10^{18}\,\mathrm{kg}$$

Wir dividieren durch die Jahresproduktion der Erdvegetation an Sauerstoff und erhalten die Zeit, die die Vegetation zum Aufbau dieser Masse benötigen wurde:

$$\frac{1,16 \cdot 10^{18}}{0,9 \cdot 10^{13}} \approx 1,29 \cdot 10^5\,\mathrm{Jahre}$$

Die Erdvegetation bräuchte etwa 129 Tausend Jahre um die Sauerstoffmenge aufzubauen. □

2.5 Beispiele zum Vorbereiten

2.5.1 Prozentrechnung

Anmerkung. Versuchen Sie in den folgenden Aufgaben insbesondere die Grundmengen korrekt zu identifizieren.

Beispiel 2.17. Eine Infektion[1] befällt in kurzer Zeit 20% aller Einwohner einer Stadt. 3% der Infizierten müssen stationär behandelt werden. Die Stadt hat 100000 Einwohner. Wie viel Patienten müssen infolge dieser Epidemie stationär behandelt werden?

Lösung:

Beispiel 2.18. Eine Firma hat zwei Abteilungen A und B. Im Jahr 2010 beschäftigte die Abteilung A 200 Personen, davon waren 20% Frauen. Die Abteilung B beschäftigte 300 Personen, davon waren 60% Frauen. Im Jahr 2020 beschäftigte die Abteilung A 1000 Personen, davon waren 25% Frauen. Die Abteilung B beschäftigte 500 Personen, davon waren 70% Frauen. Wie viel Prozent aller Angestellten der Firma im Jahr 2010 waren Frauen? Wie viel Prozent aller Angestellten im Jahr 2020 waren Frauen? Ist der Frauenanteil in der gesamten Firma gestiegen?

Lösung:

2.5.2 Potenzrechnen

Beispiel 2.19. Wie viele Vs sind eine kVh? Wie viele m^2 sind ein nm^2? Wie viel $\mathrm{Vs/m^2}$ ist eine $\mathrm{kVh/nm^2}$?

[1] Beachten Sie, es handelt sich mal zur Abwechslung **nicht** um Covid-19!

Lösung:

Beispiel 2.20. (Hier gibt's viel zu lesen, die Rechnung ist aber *kurz* ☺) In der homöopathischen *Medizin* wird mit Wirkstoffen in sehr kleinen Mengen, also in hochverdünnter Form gearbeitet. Die Angabe der Verdünnungen erfolgt in der Form $D1,\ D2, \ldots$ Dabei bedeutet $D1$ eine Verdünnung von 1 Volumen-Einheit Wirkstoff auf 10 Volumen-Einheiten Gesamtmenge. Eine $D2$-Verdünnung entsteht durch Verdünnung von 1 Volumen-Einheit $D1$- Verdünnung auf 10 Volumen-Einheiten Gesamtmenge. Ebenso entsteht eine $D3$-Verdünnung durch Verdünnung $1 : 10$ einer $D2$-Verdünnung, usw. Das bedeutet in kurz, dass in 1 ml Dn Verdünnung genau ein Volumen von 10^{-n} ml Wirkstoff ist.
Wir nehmen einen Wirkstoff in öliger Form. Das Volumen eines Wassermoleküls ist ungefähr $3 \cdot 10^{-23}\mathrm{cm}^3$. Ein Molekül unseres Wirkstoffs hat ungefähr das 15-fache Volumen.

- Wie viele Moleküle des Wirkstoffs finden sich im Durchschnitt in 1 ml einer $D4$-Verdünnung?
- Wie viele Moleküle des Wirkstoffs finden sich im Durchschnitt in 1 ml einer $D23$-Verdünnung?

Anmerkung. Beachten Sie: $1\,\mathrm{cm}^3 = 1\,\mathrm{ml}$.

Lösung:

Beispiel 2.21. Wir betrachten die Zahlen

$$a = 23522515426;\ b = 0,00125;\ c = 2;\ d = 200000000,0001$$

- Schreiben Sie a, b, c und d in wissenschaftlicher und in technischer Notation.
- Schreiben Sie a, b, c und d in technischer Notation und verwenden Sie hierfür die Abkürzungen für Zehnerpotenzen, wobei wir annehmen die Zahlen beschreiben eine Temperatur in K (zumindest in der Theorie).

Lösung:

2.6 Weiter Beispiele zum Üben

2.6.1 Prozentrechnungen

Beispiel 2.22. In einem Betrieb sind 300 weibliche Raucher, 500 weibliche Nicht-Raucher, 200 männliche Raucher, und 600 männliche Nicht-Raucher angestellt.

1. Wie viel Prozent aller Angestellten sind weibliche Raucher?
2. Wie viel Prozent aller Angestellten des Betriebs sind weiblich?
3. Wie viel Prozent aller angestellter Raucher sind weiblich?

Beispiel 2.23. Eine Stichprobe unter den Passagieren auf einer Bahnlinie ergab folgende Tabelle über die Anzahl der Raucher und Nichtraucher in der ersten und zweiten Klasse:

	Raucher	Nichtraucher	gesamt
1. Klasse	250	750	1000
2. Klasse	1750	2250	4000
gesamt	2000	3000	5000

- Wie groSS ist der Prozentsatz der Raucher unter allen Passagieren?
- Wie groSS ist der Prozentsatz der Passagiere erster Klasse unter allen Passagieren?
- Wie viele Prozent der Raucher fahren erste Klasse?
- Wie viel Prozent aller Passagiere fahren erste Klasse und sind zugleich Raucher?

Beispiel 2.24. Wir gehen davon aus, dass das Primärstadium einer bestimmten Krankheit[2] in 40% aller Fälle unentdeckt bleibt. Wird das Primärstadium entdeckt, wird die Krankheit behandelt und in 80% der Fälle geheilt. Wird das Primärstadium nicht entdeckt, heilt die Krankheit immerhin in 20% der Fälle von selbst aus. Langjährige Studien ergaben, dass in einem Land pro Jahr im Durchschnitt 300 Fälle des Primärstadiums der Krankheit entdeckt werden.

1. Wie viele Fälle des Primärstadiums treten im Durchschnitt Pro Jahr in diesem Land auf?
2. Wie viele Fälle des Primärstadiums heilen im Durchschnitt pro Jahr aus?

Beispiel 2.25. Die Kängururatte ist ein Wüstentier das nicht trinken muss. Ihr Wasser nimmt sie auf zwei Arten auf. Das Futter (Körner etc.) enthält absorbiertes Wasser. AuSSerdem entsteht bei der Verbrennung der Kohlehydrate Wasser. Andererseits gibt die Kängururatte Wasser ab durch Urin, durch Kot, und durch Verdunstung. Die folgende Tabelle zeigt die Wasseraufnahme und Wasserabgabe einer Kängururatte in einem bestimmten Versuchszeitraum, in Millilitern und in Prozent des gesamten Wasserumsatzes. Der gesamte Umsatz betrug 60ml.

Wasseraufnahme	ml	%	Wasserabgabe	ml	%
Oxidationswasser	54,0 ml		Urin		22,5
Absorbiertes Wasser	6,0 ml		Kot		4,3
			Verdunstung		73,2
gesamt	60,0 ml	100 %	gesamt	60,0 ml	100 %

Vervollständigen Sie die Tabelle mit den entsprechenden Werten für ml und %.

2.6.2 Potenzrechnungen

Beispiel 2.26. Bestimmen Sie den Wert von:

$$\frac{5 \cdot 10^{2000} + (3 \cdot 0,1^{-1000})^2}{2 \cdot (10^{1,5})^{1334}} \cdot \sqrt[250]{9^{500}}$$

Beispiel 2.27. Notationsübungen:

- Schreiben Sie durch Wurzeln und Brüche: $p^2 q^{-2/5} r^{3/4}$.
- Schreiben Sie mit gebrochenen und negativen Potenzen: $\frac{a^3\sqrt{abc^4}}{\sqrt[3]{a^2b^2c^2}}$.

[2]Beachten Sie, es handelt sich wiederum **nicht** um Covid-19!

Beispiel 2.28. Vereinfache die Terme

1. $\frac{a^n b^m (ab)^p}{a^p b^q (ab)^m}$

2. $\left(\frac{1}{r+s} - \frac{1}{r}\right)(r+s)^2$

3. $\frac{(a^2-b^2)^{2m}}{(a+b)^{2m}(a-b)^m}$

Beispiel 2.29. Vorbemerkung: Es soll die Loschmidtsche Zahl (Avogadrosche Zahl) näherungsweise bestimmt werden. Diese Zahl gibt an, wie viel Moleküle sich in einem Mol einer Substanz befinden. Um den Versuch zu verstehen, stellen Sie sich vor, Sie könnten die Moleküle einer gewisse Menge des Stoffes auf einer Ebene flach nebeneinander ausbreiten. Diese Schicht wäre dann ein Molekül dick, und wenn d die Dicke der Schicht ist, ist d^3 ungefähr das Volumen eines Moleküls. (Das wäre exakt, wenn ein Molekül ein festes Würfelchen wäre, so gilt es nur als Näherung.) Sobald das Volumen eines Moleküls bekannt ist, kann leicht ausrechnet werden, wie viele Moleküle in einem bestimmten Volumen des Stoffes vorhanden sind. Eine solche Schicht mit der Dicke eines Moleküls kann gebildet werden, in dem eine ölige Substanz genommen und vorsichtig auf Wasser ausgegossen wird. Auf der Oberfläche bildet sich ein dünner Ölfleck. Um die Dicke der Schicht zu bestimmen, wird das ausgegossene Ölvolumen durch die Oberfläche der Schicht dividiert. Aus diesen Gedankengängen ergibt sich der folgende sogenannte Ölfleckversuch:

Ölsäure hat eine molare Masse von $282,47\,\mathrm{g/mol}$ und eine Dichte von $0,89\,\mathrm{g/cm^3}$. Eine $0,05$-prozentige Lösung von Ölsäure in Leichtbezin wird angefertigt. Ein Tropfen von $0,02\,\mathrm{cm^3}$ wird auf eine ruhende Wasserfläche in einer Wanne vorsichtig aufgetragen. Es bildet sich ein kreisförmiger Ölfleck mit Radius $6,5\,\mathrm{cm}$. Berechnen Sie, wie viel Moleküle sich in 1 mol Ölsäure befinden.

Beispiel 2.30. Ein rotes Blutkörperchen (Erythrozyten) ist ungefähr scheibenförmig mit einem Durchmesser von 7 μm und einer Dicke von 2 μm. Ein gesunder Mann hat ungefähr 5 Millionen rote Blutkörperchen pro $\mathrm{mm^3}$ Blut. Wie viel Prozent von einem $\mathrm{mm^3}$ Blut bilden die roten Blutkörperchen.

Beispiel 2.31. Zur Zeit des Kommunismus wurden viele Zuflüsse zum Aralsee umgeleitet (zur Stoff und Nahrungsmittelproduktion) und damit wurde eine gewaltige Naturkatastrophe ausgelöst. Im See sind heute nur noch $105\,\mathrm{km^3}$, das sind nur noch $9,6\,\%$ des ursprünglichen Volumens.

- Bestimmen Sie wie groSS das Volumen des Sees vor der Wasserentnahme war.
- Die heutige Wassermenge im See entspricht $7,88 \cdot 10^{-3}\,\%$ der gesamten SüSSwassermenge auf der Erde. Berechne Sie wie viel Prozent der gesamten SüSSwassermenge der See ursprünglich beinhaltete!

Beispiel 2.32. Die durchschnittliche Entfernung zwischen Mond und Erde beträgt ungefähr 384 400 km, wobei der Minimale Abstand 363 300 km beträgt und der Maximale mit 405 500 km gemessen wurde.
Geben Sie die angegebenen Längen in m an, und schreiben Sie dieses Ergebnis in technischer und wissenschaftlicher Notation.

Beispiel 2.33. Ein Wassermolekül H_2O hat eine Masse von ca. $2,99 \cdot 10^{-23}$ Gramm. Berechnen Sie wie viele Wassermoleküle sich in einem Gramm Wasser befinden. Bestimmen Sie weiters, wie viele Wassermoleküle sich in einem Liter Wasser befinden.

Beispiel 2.34. Ein aus der Höhe h fallen gelassener Gegenstand hat eine Aufprallgeschwindigkeit von $v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$.

- Bestimmen Sie um wie viel Prozent sich die Aufprallgeschwindigkeit ändert, wenn man den Gegenstand aus der doppelten Höhe fallen lässt.
- Bestimmen Sie um wie viel man die Fallhöhe erhöhen muss um die Aufprallgeschwindigkeit zu verdoppeln!

KAPITEL

3

GLEICHUNGEN LÖSEN

3.1 Gleichungen mit einer Unbekannten

Fakt 3.1. Eine Gleichung wird nach einer Unbekannten (zum Beispiel x) aufgelöst, indem man auf die linke und rechte Seite der Gleichung stets dieselben Operationen anwendet, solange bis die Unbekannte isoliert ist.
Man kann sich eine Gleichung wie eine altertümliche Waage vorstellen. Solange man links und rechts das Selbe tut, bleibt es im Gleichgewicht!

Abbildung 3.1: Waagen-Model

Anmerkung 3.2. **Eigenartige Umformungen:** Beim obigen Faktum muss beachtet werden, dass nicht jede Operation die Lösungsmenge der Gleichung unverändert lässt (auch wenn das Bild der Waage im Gleichgewicht bleibt). Betrachten wir folgende Umformung:

$$x = 7 \qquad |\hat{}2 \tag{3.1}$$
$$\Rightarrow \quad x^2 = 49 \qquad |\sqrt{\cdot} \tag{3.2}$$
$$\Rightarrow \quad x = \pm 7 \tag{3.3}$$

Die Gleichung (3.1) hat genau eine Lösung[1], natürlich $x = 7$, jedoch wurde durch das *Umformen* die Lösungsmenge in Gleichung (3.2) vergröSSert, nämlich zu $x = \pm 7$. Man muss also vorsichtig sein, und in jedem Schritt berücksichtigen ob man sich nicht ein *Problemchen eingehamstert* hat.
Daraus kann man erkennen, dass nicht alle Operationen *gleich berechtigt* sind. Deswegen hat man früher in der Schule *Aquivalenz-Umformungen* als spezielle Operationen kennengelernt. Diese Operationen lassen die Lösungsmenge in jedem Fall unverändert.

Fakt 3.3. Umformungen: Als Ausgangsgleichung betrachten wir die Gleichung

$$X = Y$$

- Beliebige Zahlen oder Terme können auf beiden Seiten der Gleichung addiert oder subtrahiert werden **ohne die Lösungsmenge zu ändern**.

$$X + a = Y + a \qquad\qquad X - a = Y - a$$

- Eine Gleichung kann mit einer/einem von Null verschiedenen Zahl/Term **multipliziert** werden, **ohne Lösungsmenge zu ändern**. Sonst kann die Lösungsmenge vergröSSert werden. Falsche Lösungen müssen mit der Probe identifiziert werden. Alternativ muss eine Fallunterscheidung nach <u>Term ist Null</u>/ <u>Term ist nicht Null</u> durchgeführt werden.

$$X \cdot a = Y \cdot a$$

- Eine Gleichung kann mit einer/einem von Null verschiedenen Zahl/Term **dividiert** werden, **ohne Lösungsmenge zu ändern**. Sonst kann die Lösungsmenge verkleinert werden. Um alle Lösungen zu identifizieren muss eine Fallunterscheidung nach <u>Term ist Null</u>/ <u>Term ist nicht Null</u> durchgeführt werden.

$$\frac{X}{a} = \frac{Y}{a}$$

- Hoch nehmen zur 2, 3, 4, etc. Potenz **kann die Lösungsmenge vergröSSern**. Falsche Lösungen müssen mit der Probe identifiziert werden.

$$X^a = Y^a$$

[1] Das ist so offensichtlich das es schon fast verwirrend ist, klar . . . oder?

- Wurzelziehen ist nur erlaubt, wenn sichergestellt ist, dass das (formale) Ergebnis nicht negativ ist. Sonst kann die Lösungsmenge verkleinert werden. Um alle Lösungen zu identifizieren müssen/können Lösungsformeln verwendet werden.

$$\sqrt[a]{X} = \sqrt[a]{Y}$$

- Eine Gleichung kann mit beliebiger Basis $a > 1$ exponentiert werden.

$$a^X = a^Y$$

- Der Logarithmus kann nur gezogen werden, wenn sichergestellt ist, dass das Ergebnis positiv ist.

$$\log_a(X) = \log_a(Y)$$

Anmerkung 3.4. Um falsche Lösungen bzw. Rechenfehler beim Gleichungen-Lösen zu identifizieren müssen Sie stets die Probe durchführen.

Anmerkung 3.5. Wie löst man die Gleichung $x^n = a$?
Hierfür gibt es einige verschiedene Fälle:

- Falls $a = 0$ ist, so ist die Lösung $x = 0$.
- Ist n gerade (also $= 2, 4, 6 \dots$) und a positiv, so hat man zwei Lösungen $x = \pm\sqrt[n]{a}$.
- Ist n ungerade (also $= 3, 5, 7 \dots$) und a positiv, so hat man eine Lösungen $x = \sqrt[n]{a}$.
- Ist n gerade und a negativ, so hat man **keine** Lösung[2].
- **UND** ist n ungerade und a negativ, so hat man eine Lösungen $x = -\sqrt[n]{|a|}$.

Wo keine Gefahr bezüglich der Anwendung von Potenzregeln besteht, wird die obige Lösungsformel für monomische Gleichugen kurz als *n-te Wurzel auf beiden Seiten ziehen* beschrieben, auch wenn dies insbesondere im Hinblick auf bestimmte Unterfälle nicht ganz korrekt ist.

Beispiel 3.6. Lösen Sie die folgende Gleichung nach t auf:

$$(2t^3 + 7)^2 = 81.$$

Lösung.

$$\begin{aligned} &(2t^3 + 7)^2 = 81 \\ \Rightarrow\ &2t^3 + 7 = \pm 9 \end{aligned}$$

[2]In den reellen Zahlen $\mathbb{R}$, wir betrachten in diesem Umfeld die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ nicht.

nach der Lösungsformel für Wurzeln aus Anmerkung 3.5. Nun müssen wir eine Fallunterscheidung machen, zuerst für die positive Lösung:

$$
\begin{aligned}
2t^3 + 7 &= 9 \quad | \text{ auf beiden Seiten } -7 \\
\Rightarrow \quad 2t^3 + 7 - 7 &= 9 - 7 \\
\Rightarrow \quad 2t^3 &= 2 \quad | \text{ auf beiden Seiten } \div 2 \\
\Rightarrow \quad \frac{2t^3}{2} &= \frac{2}{2} \\
\Rightarrow \quad t^3 &= 1 \quad | \text{ auf beiden Seiten } \sqrt[3]{\cdot} \\
\Rightarrow \quad \sqrt[3]{t^3} &= \sqrt[3]{1} \\
\Rightarrow \quad t &= 1
\end{aligned}
$$

Man kann natürlich die Rechnung auch kürzer anschreiben, da man vieles einfach im Kopf rechnen kann (z.B.: $7 - 7 = 0$).
In ähnlicher Form machen wir es für die negative Lösung (nur etwas schneller):

$$
\begin{aligned}
2t^3 + 7 &= -9 \quad | \text{ auf beiden Seiten } -7 \\
\Rightarrow \quad 2t^3 &= -16 \quad | \text{ auf beiden Seiten } \div 2 \\
\Rightarrow \quad t^3 &= -8 \quad | \text{ auf beiden Seiten } \sqrt[3]{\cdot} \\
\Rightarrow \quad t &= -2
\end{aligned}
$$

Nun müssen wir noch die Probe machen:

$$
\begin{aligned}
(2 \cdot 1^3 + 7)^2 &= 9^2 = 81 \\
(2 \cdot (-2)^3 + 7)^2 &= (-16 + 7)^2 = (-9)^2 = 81
\end{aligned}
$$

Womit wir zwei Lösungen gefunden haben. □

Beispiel 3.7. Lösen Sie die folgende Gleichung nach x auf:

$$\sqrt{x^2 - 1 + 2x} = \sqrt{2x}$$

Lösung.

$$
\begin{aligned}
\sqrt{x^2 - 1 + 2x} &= \sqrt{2x} \qquad | \,\hat{}\,2 \\
x^2 - 1 + 2x &= 2x \qquad | -2x \\
x^2 - 1 &= 0 \qquad | +1 \\
x^2 &= 1 \qquad | \sqrt{\cdot} \\
x &= \pm 1
\end{aligned}
$$

Nun noch die Probe machen:

$x = 1$**:**

$$
\begin{aligned}
\sqrt{1^2 - 1 + 2 \cdot 1} &= \sqrt{2 \cdot 1} \\
\sqrt{2} &= \sqrt{2}
\end{aligned}
$$

$x = -1$**:**

$$\sqrt{(-1)^2 - 1 + 2 \cdot (-1)} = \sqrt{2 \cdot (-1)}$$
$$\sqrt{-2} = \sqrt{-2}$$

Hat die ursprüngliche Gleichung $\sqrt{x^2 - 1 + 2x} = \sqrt{2x}$ also zwei Lösungen, $x = 1$ und $x = -1$? Nein! Denn die Probe für die negative Lösung führte zum Term $\sqrt{-2}$ welcher[3] nicht definiert ist. □

Anmerkung 3.8. **Interessante Überlegung:** Ausflug in mathematische Theorie: Als Operation auf beiden Seiten der Gleichung ist *Teilen durch* 0 nicht erlaubt, warum eigentlich? Klar, die Antwort ist, denn *Teilen durch* 0 ist nicht definiert. Aber warum? Sie wissen vielleicht aus der Schule, dass es möglich ist ein neues Symbol i (*die imaginäre Einheit*) einzuführen so, dass die Gleichung $x^2 = -1$ lösbar ist. Wir gucken uns an, warum das Einführen eines entsprechenden Symbols für *Teilen durch* 0 nicht funktioniert. Angenommen es **gäbe** ein neues Symbol Ω so, dass $\frac{1}{0} = \Omega$ *funktioniert*. Wir wollen aber natürlich, dass wir *gleich rechnen können* wie mit anderen Zahlen (das klappt ja für die imaginäre Einheit i). Zum Einen, wenn ich mit 0 multipliziere möchte ich, dass 0 rauskommt, also:

$$0 \cdot \Omega = 0. \tag{3.4}$$

Wenn ich mit dem Kehrwert multipliziere möchte ich , dass 1 rauskommt, also

$$\frac{1}{\Omega} \cdot \Omega = 1$$

Nun können wir die zweite Gleichung betrachten, Ω einsetzen und den Doppelbruch auflösen:

$$1 = \frac{1}{\Omega} \cdot \Omega = \frac{1}{\frac{1}{0}} \cdot \Omega = \frac{0}{1} \cdot \Omega = 0 \cdot \Omega = 0$$

Wobei das letzte = 0 wegen (3.4) gilt. Also bekommt man $1 = 0$ was natürlich nicht stimmt.
(Falls das ein Algebra-Professor liest: Die ganz ganz ganz ganz ganz bösen Spezialfälle betrachten wir nicht ;-))
Natürlich könnten wir an bestimmten Stellen unserer Argumentation immer neue Symbole einführen (zum Beispiel für den Kehrwert von Ω). Dieser Ansatz würde aber auch immer weiter zu Problemen fuhren, nur dann eben für die neu eingeführten Symbole statt für Ω. Die Hauptbotschaft ist ist also, nicht dass das Teilen durch Null nicht definiert ist, sondern dass es nicht sinnvoll definierbar ist. Deswegen ist *Teilen durch* 0 bei Gleichungen lösen immer eine nicht sinnvolle Operation.

3.2 Quadratische Gleichungen

Fakt 3.9. „Lösungsformeln für quadratische Gleichungen“
Seien a, b, c, p, q gegebene Zahlen und $a \neq 0$. Folgende quadratische Gleichungen lassen sich

[3] Wiederum betrachten wir nur $\mathbb{R}$.

nach x mit den angeführten Formeln auflösen:

$$\boxed{\begin{aligned} \text{Gleichung: } & a\,x^2 + b\,x + c \; = 0 \\ \text{2 Lösungen: } x = & \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a} \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \text{Gleichung: } & x^2 + p\,x + q \; = 0 \\ \text{2 Lösungen: } x = & -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \end{aligned}}$$

Die erste Formel wird gerne auch *Mitternachtsformel* genannt, besser ist jedoch Formel nach Brahmagupta (indischer Mathematiker). Die zweite Formel wird gerne auch *kleine Lösungsformel* genannt, besser ist jedoch Satz von Vieta (französicher Mathematiker), Übrigens genügt es, sich eine der beiden Formeln zu merken. Jede quadratische Gleichung lässt sich leicht auf jede der beiden Formen bringen.

Beispiel 3.10. Lösen Sie die quadratische Gleichung nach s auf:

$$4s^2 - 20s + 24 = 0$$

Lösung. Um zu verdeutlichen dass beide Formeln hier anwendbar sind, rechen wir die Lösung zwei Mal aus. Die erste Formel kann direkt angewendet werden mit $a = 4$, $b = -20$, und $c = 24$. Daher ist die Lösung:

$$s = \frac{20 \pm \sqrt{20^2 - 4 \cdot 4 \cdot 24}}{2 \cdot 4} = \frac{20 \pm \sqrt{16}}{8} = \begin{cases} \frac{24}{8} = 3, \\ \frac{16}{8} = 2 \end{cases}$$

Um die zweite Formel anzuwenden, dividieren wir die ganze Gleichung durch 4:

$$s^2 - 5s + 6 = 0$$

daher ist $p = -5$ und $q = 6$. Damit:

$$s = -\frac{(-5)}{2} \pm \sqrt{\frac{(-5)^2}{4} - 6} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{24}{4}} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2} = \begin{cases} 3, \\ 2 \end{cases}$$

Die quadratische Gleichung besitzt zwei Lösungen 3 und 2. □

Beispiel 3.11. Lösen Sie die quadratische Gleichung nach u auf:

$$u^2 + 4u - 12 = 0$$

Lösung. Weil $p = 4$ und $q = -12$ gilt, ist

$$u = -\frac{4}{2} \pm \sqrt{\frac{4^2}{4} - (-12)} = -2 \pm \sqrt{16} = \begin{cases} 2, \\ -6. \end{cases}$$

Die quadratische Gleichung besitzt zwei Lösungen 2 und -6. □

Beispiel 3.12. Lösen Sie die folgende Gleichung nach z:

$$z - 2 = \frac{4 - 2z}{z - 3}.$$

Lösung.

$$\begin{aligned} z - 2 &= \frac{4 - 2z}{z - 3} \\ (z-2)(z-3) &= 4 - 2z \\ z^2 - 2z - 3z + 6 &= 4 - 2z \\ z^2 - 3z + 2 &= 0 \\ &\quad (p = -3,\ q = 2) \\ &\quad z = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 2} = \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases} \end{aligned}$$

□

Anmerkung 3.13. Quadratische Gleichungen können zwei, eine oder gar keine Lösungen besitzen, je nach dem ob der Term in der Wurzel (die sogenannte Diskriminante) gröSSer, gleich oder kleiner Null ist.

3.3 Beispiele zum Vorbereiten

3.3.1 Gleichungen

Beispiel 3.14. Lösen Sie die Gleichung

$$\frac{4x - 6}{5 - 3x} = 2 \tag{3.5}$$

für $x \in \mathbb{R}$.

Lösung:

Beispiel 3.15. Lösen Sie die Gleichung für $x \in \mathbb{R}$.
(Tipp: tippen Sie mal $25 \cdot 25$ in den TR ein ☺).

$$25^{2015} \cdot x = \frac{1}{2 \cdot x - \frac{1}{5}} \cdot \frac{625^{2015}}{25^{2016}}$$

Lösung:

3.3.2 Quadratische Gleichungen

Beispiel 3.16. Lösen Sie die folgende Gleichung nach u:

$$2\,u^2 - 6u + 3 = 0$$

Lösung:

Beispiel 3.17. Lösen Sie die folgende Gleichung nach u:

$$u^2 - 6u + 10 = 0$$

Lösung:

3.4 Weitere Beispiele zum Üben

Beispiel 3.18. Löse die Gleichung

$$\frac{x^2 + 5x + 6}{x + 2} = 0$$

Beispiel 3.19. Lösen Sie die folgenden Gleichungen nach x auf:

1. $4x^2 - 5 = 31$
2. $ax - b = 0$

Beispiel 3.20. Lösen Sie die Gleichung

$$\sqrt{x+7} - \sqrt{x-8} = \sqrt{x}$$

Beispiel 3.21. Lösen Sie die Gleichung

$$5x^3 - 31x^2 + 31x - 5 = 0$$

Beispiel 3.22. Der Schützenfisch jagt Insekten, indem er/sie einen Wasserstrahl *ausspuckt* welcher ein Insekt ins Wasser fallen lässt.
Der Verlauf eines Wasserstrahls lässt sich durch die Gleichung

$$h(x) = -\frac{13}{3}x^2 + \frac{7}{2}x$$

beschrieben werden. Darin ist $h(x)$ die Höhe des Wasserstrahls über der Wasseroberfläche in m und x die Entfernung vom Fisch in m.
Berechnen Sie die Spuckweite des Fischs, sowie die Maximale Höhe des Wasserstrahls.

Die folgenden zwei Beispiele sind nicht leicht zu diskutieren.

Beispiel 3.23. Lösen Sie die Gleichung

$$\sqrt{x^2 + \frac{1}{6}x - \frac{1}{6}} = \left(\sqrt{x - \frac{1}{3}}\right)^3 \sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^3}$$

Beispiel 3.24. Lösen Sie die Gleichung

$$\sqrt{\sqrt{x+2} - \sqrt{x-2}} = \sqrt{-5x - 10}$$

KAPITEL

4

UMFORMEN VON FORMELN

Naturgesetze werden sehr oft durch Gleichungen beschrieben. Ja nach Problemstellung muss dann eine der vorkommenden GröSSen durch die Anderen ausgedrückt werden. Das geschieht dann, indem die gegebene Gleichung nach der gesuchten GröSSe aufgelöst wird.

Beispiel 4.1. Ein ideales Gas ist ein Gas, in dem zwischen den Molekülen keine Anziehung oder AbstoSSung besteht, und dessen Moleküle so klein sind, dass ihr Volumen vernachlässigt werden kann. Sind m Mol dieses Gases in einem Raum vom Volumen V bei einem Druck von p und einer absoluten Temperatur von T eingeschlossen, so gilt die allgemeine Gasgleichung:

$$pV = mTR.$$

Dabei ist R eine feste Konstante, die sogenannte allgemeine Gaskonstante, die in geeigneten Tabellenwerken nachgeschlagen werden kann[1]. Drucken Sie die GröSSen $p,\ V,\ T,\ m$ jeweils durch die anderen GröSSen aus.

Lösung. Wir müssen nur die allgemeine Gasgleichung jeweils nach $p,\ V,\ T,\ m$ auflösen. Es ergeben sich nach kurzer Rechnung:

$$\begin{aligned} p &= \frac{mTr}{V} \\ V &= \frac{mTR}{p} \\ m &= \frac{pV}{TR} \\ T &= \frac{pV}{mR} \end{aligned}$$

□

[1] $R = 8,31446261815324 \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol}\cdot\mathrm{K}}$ [5]

Beispiel 4.2. Wird statt idealen Gases in Beispiel 3.18 ein Gas mit Wechselwirkung zwischen den Teilchen betrachtet und wird auch berücksichtigt, dass die Gasteilchen nicht unendlich klein sind, sodass sich das Gas nicht auf beliebig kleine Volumina komprimieren lässt, muss die Gasgleichung modifiziert werden. Eine bewährte Variante ist die folgende Van der-Waals-Gleichung:

$$\left(p + \frac{a\,m^2}{V^2}\right)(V - b\,m) = m\,R\,T$$

Darin kommen folgende GröSSen vor:

p	Druck des Gases,
V	Volumen, in dem das Gas eingeschlossen ist,
T	Temperatur des Gases,
m	Menge des eingeschlossenen Gases (Mol),
R	allgemeine Gaskonstante, für alle Gase gleich,
a	Konstante, die die Anziehung der Gasmoleküle beschreibt,
b	Konstante, die das Volumen der Gasteilchen beschreibt.

Berechnen Sie jede der veränderlichen GröSSen p, V, T, m aus den anderen.

Lösung. Die Rechnung für T und p erweist sich als *einfach*:

$$\begin{aligned} \left(p + \frac{a\,m^2}{V^2}\right)(V - b\,m) &= m\,R\,T \\ \Rightarrow \qquad \frac{\left(p + \frac{a\,m^2}{V^2}\right)(V - b\,m)}{m\,R} &= T \end{aligned}$$

Für p brauchen wir nur einen Schritt mehr:

$$\begin{aligned} \left(p + \frac{a\,m^2}{V^2}\right)(V - b\,m) &= m\,R\,T \\ \Rightarrow p + \frac{a\,m^2}{V^2} &= \frac{m\,R\,T}{V - b\,m} \\ \Rightarrow p &= \frac{m\,R\,T}{V - b\,m} - \frac{a\,m^2}{V^2} \end{aligned}$$

Nun lösen wir die Gleichung nach V. Hierfür versuchen wir *einfach* alle V's auf einer Seite der Gleichung auSSerhalb von Klammern und Brüche zu bringen:

$$\begin{aligned} \left(p + \frac{a\,m^2}{V^2}\right)(V - b\,m) &= m\,R\,T \quad | \cdot V^2 \\ V^2\left(p + \frac{a\,m^2}{V^2}\right)(V - b\,m) &= m\,R\,T\,V^2 \\ \left(p\,V^2 + a\,m^2\right)(V - b\,m) &= m\,R\,T\,V^2 \\ p\,V^3 + a\,m^2\,V - p\,b\,m\,V^2 - a\,b\,m^3 &= m\,R\,T\,V^2 \\ p\,V^3 - (m\,R\,T + p\,b\,m)\,V^2 + a\,m^2\,V - a\,b\,m^3 &= 0 \end{aligned}$$

Dies ist eine Gleichung dritten Grades: Die unbekannte V kommt in Potenzen bis zu 3 vor. Es gibt sehr aufwendige Formeln zum Lösen von Gleichungen dritten Grades, im Regelfall jedoch löst man sie in der Praxis durch Näherungsverfahren auf dem Computer. Gleichungen höheren Grades sind überhaupt nur durch Näherungsverfahren lösbar.

Auflösung nach m: Wenn man die Auflösung nach V nur in anderer Reihenfolge anschreibt, erhält man ebenfalls eine Gleichung dritten Grades:

$$a\,b\,m^3 - a\,V\,m^2 + \left(R\,T\,V^2 + b\,p\,V^2\right) m - p\,V^3 = 0$$

□

Beispiel 4.3. In einem chemischen Zerfallsprozess m-ter Ordnung müssen m Moleküle eines Stoffes X aufeinandertreffen, damit die Zerfallsreaktion stattfindet und sie in andere Stoffe zerfallen. Die Konzentration $u = [X]$ des Stoffes X in Abhängigkeit von der Zeit t folgt dem Gesetz

$$u = (k\,t + d)^{-\frac{1}{m-1}}$$

Dabei ist k eine Konstante, die vom jeweiligen Stoff abhängt, und d eine zweite Konstante, die sich aus der Gesamtmenge zu Beginn der Reaktion bestimmt.
Bestimmen Sie t in Abhängigkeit von u.

Lösung.

$$\begin{aligned} u &= (k\,t + d)^{-\frac{1}{m-1}} \\ u^{-(m-1)} &= k\,t + d \\ u^{-(m-1)} - d &= k\,t \\ \frac{1}{k}\left(u^{-(m-1)} - d\right) &= t \end{aligned}$$

□

Beispiel 4.4. Bestimmen Sie ein Rechenschema, mit welchem man die Mischung zweier Lösungen berechnen kann, wenn die Konzentrationen des Gemisches und der Lösungen bekannt sind.

Lösung. In diesem Beispiel wollen wir das sogenannte *Mischungskreuz* nachrechnen, bzw. nachweisen wie diese *Merkregel* funktioniert.
Wir wissen, dass wir zwei Flüssigkeiten zu Einer vermengen wollen! Daher erstellen wir, wie im Kapitel Mischungsrechnung 1.2 eine Tabelle:

Name	Volumen	Konzentration	gelöste Menge
A	a	k_a	
B	b	k_b	
Gemisch	1	k_g	

Wir wissen nicht wie viel Gemisch wir herstellen wollen, also nehmen wir einfach an wir wollen **eine** Volumseinheit herstellen. Wir bezeichnen das Volumen der ersten Flüssigkeit einfach mal mit a und jenes der zweiten mit b. Auch den Konzentrationen geben wir die zugehörigen Namen. Da wir mit Variablen rechnen, können wir die Volumseinheit beliebig wählen, aber natürlich bei allen gleich (nur wenn Sie explizit Zahlenwerte bestimmen wollen, so müssen Sie die Einheiten wählen). Analog zur Mischungsrechnung können wir die gelösten Mengen bestimmen:

Name	Volumen	Konzentration	gelöste Menge
A	a	k_a	$k_a\,a$
B	b	k_b	$k_b\,b$
Gemisch	1	k_g	k_g

Wir bekommen zwei Gleichungen:

$$\begin{aligned} a + b &= 1 && (I) \\ k_a\,a + k_b\,b &= k_g && (II) \end{aligned}$$

Wir nehmen (laut Angabe) an, dass wir die Konzentrationen kennen. Also formen wir die beiden Gleichungen auf a und b um. Aus der ersten Gleichung folgt $a = 1 - b$, und dies können wir nun in die zweite Gleichung einsetzen:

$$\begin{aligned} & k_a\,a + k_b\,b = k_g \\ \Rightarrow\quad & k_a(1-b) + k_b\,b = k_g \\ \Rightarrow\quad & k_a - k_a\,b + k_b\,b = k_g \qquad | - k_a \\ \Rightarrow\quad & (k_b - k_a)b = k_g - k_a \qquad | \div (k_b - k_a) \\ \Rightarrow\quad & b = \frac{k_g - k_a}{k_b - k_a} \end{aligned}$$

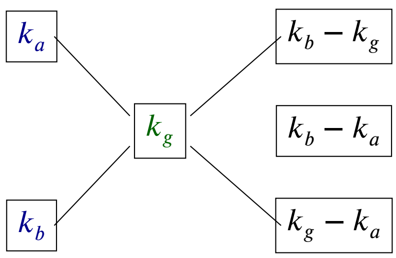
Das können wir nun in $a = 1 - b$ einsetzen und bekommen (mit etwas Bruchrechnen):

$$a = 1 - b = 1 - \frac{k_g - k_a}{k_b - k_a} = \frac{k_b - k_a}{k_b - k_a} - \frac{k_g - k_a}{k_b - k_a} = \frac{k_b - k_a - (k_g - k_a)}{k_b - k_a} = \frac{k_b - k_g}{k_b - k_a}$$

Also erhalten wir die beiden Volumina direkt, wenn man die Konzentrationen kennt:

$$b = \frac{k_g - k_a}{k_b - k_a} \qquad a = \frac{k_b - k_g}{k_b - k_a}$$

und diese Brüche sind die Differenzen aus dem Mischungskreuz:



Ein *genauer Blick* und man kann erkennen, dass die Volumina a und b aus diesen Differenzen berechnete werden. So viele Anteile einer Volumseinheit wird benötigt. Wenn man nun x Volumseinheiten benötigt, braucht man a und b nur noch mit x multiplizieren und man bekommt die gesuchten Volumen. $\square$

4.1 Zwei aufwendigere Beispiele

Diese Beispiele führen auf Minimierungs-Aufgaben, die mit der Differentialrechnung gelöst werden können. Am Ende steht die Lösung einer relativ aufwendigen Gleichung. Die Lösung von Minimierungs-Aufgaben und Differentialrechnung ist nicht Prüfungsstoff, doch soll an dieser Stelle gezeigt werden, wie das Lösen von Gleichungen, in gröSSere Probleme eingebettet, immer wieder als Grundtechnik benötigt wird.

Beispiel 4.5. Ein Hund benötigt pro Stunde eine gewisse Nahrungsmenge n, die von der Geschwindigkeit v abhängt, mit der er sich fortbewegt. Das Gesetz dieser Abhängigkeit lautet (mit geeigneten konstanten GröSSen a und b) näherungsweise

$$n = a\,v^2 + b$$

Nun sei ein Nahrungsvorrat N vorgegeben.

- Wie weit kommt der Hund, wenn er die Geschwindigkeit optimal wählt?
- Welche konkreten Werte ergeben sich für $N = 3\,\text{kg}$, $b = 0,1\text{kg/h}$, und $a = 2,5 \cdot 10^{-4}\text{kgh/km}^2$?

Lösung. Wenn der Hund mit einer Geschwindigkeit von $v\,\text{km/h}$ läuft, legt er in t Stunden den Weg $s = tv$ zurück, und verbraucht die Nahrungsmenge

$$t(av^2 + b)$$

Da er seinen ganzen Nahrungsvorrat aufbraucht, um möglichst weit zu kommen, gilt

$$N = t(av^2 + b), \quad \textbf{also}$$
$$\Rightarrow t = \frac{N}{av^2 + b}$$

Damit können wir den zurückgelegten Weg s bestimmen:

$$\Rightarrow s = tv = \frac{Nv}{av^2 + b}$$

Nun soll die Geschwindigkeit v so gewählt werden, dass der Weg maximal ist. Daher ist die erste Ableitung von s nach v gleich Null zu setzen. Unter Verwendung von Bruch und Kettenregel gilt

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{N(av^2 + b) - Nv(2av)}{(av^2 + b)^2} \\
0 &= N(av^2 + b) - Nv(2av) \\
0 &= bN - Nav^2 \\
v &= \sqrt{\frac{b}{a}}
\end{aligned}$$

Wir haben jetzt die optimale Geschwindigkeit. Setzen wir noch für den Weg ein:

$$
\begin{aligned}
s &= \frac{Nv}{av^2 + b} \\
&= \frac{N\sqrt{\frac{b}{a}}}{b\left(\frac{b}{a}\right) + b} \\
&= \frac{N}{2\sqrt{ab}}
\end{aligned}
$$

Damit ergibt sich als gröSSte erreichbare Weglänge $s = \frac{N}{2\sqrt{ab}}$.
In konkreten Zahlen:

$$
\begin{aligned}
v &= \sqrt{\frac{0,1}{0,00025}} = 20\,\mathrm{km/h} \quad \text{optimale Geschwindigkeit,} \\
s &= \frac{3}{2\sqrt{0,1 \cdot 0,00025}} = 300\,\mathrm{km} \quad \text{erreichbare Strecke,} \\
t &= \frac{300}{20} = 15\,\mathrm{h} \quad \text{Laufzeit.}
\end{aligned}
$$

□

Beispiel 4.6. Ein Hund kann auf einer geradlinigen StraSSe mit einer Geschwindigkeit v_1 laufen, im angrenzenden Gelände mit der (kleineren) Geschwindigkeit v_2. Im Garten steht ein Teller mit Würsten zum Grillen bereit, der Besitzer ist derzeit im Haus beschäftigt. Um die Würste zu erreichen, könnte der Hund die Länge a die StraSSe entlang laufen, und dann rechtwinkelig in den Garten abbiegen und die Länge b durch den Garten laufen, jedoch wird er schneller sein, wenn er nur $x < a$ Meter die StraSSe entlang läuft, und dann schief durch den Garten seinen Weg fortsetzt. Wie lange muss der Hund noch auf der StraSSe bleiben, damit er möglichst schnell (und vor dem Besitzer) beim Wurstteller anlangt?

Abbildung 4.1: Lecker Schmecker

Lösung. Die erste, und oft bereits die entscheidende Stufe in der Problemlösung ist die mathematische Formulierung: Die Benennung der Längen wird am besten durch eine Zeichnung dargestellt.

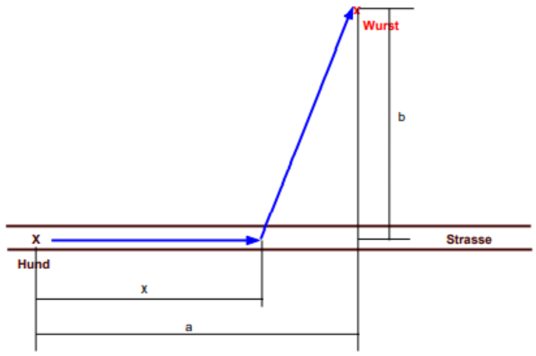


Abbildung 4.2: Lageskizze

a	Abstand Hund-Wurst längs StraSSenrichtung
b	Abstand StraSSe-Wurst
v_1	Geschwindigkeit Hund auf StraSSe
v_2	Geschwindigkeit Hund im Garten
x	Abstand, nach dem der Hund in den Garten einbiegt

Die Aufgabe lautet: Bestimmen Sie den Punkt x so, dass die Zeit, die der Hund braucht, um den Weg zurückzulegen, möglichst klein wird.
Es ergeben sich daraus folgende Wege und Zeiten:

x	Weg des Hundes auf der StraSSe,
$\frac{x}{v_1}$	Zeit, die der Hund auf der StraSSe läuft,
$\sqrt{(a-x)^2+b^2}$	Weg des Hundes im Garten,
$\frac{\sqrt{(a-x)^2+b^2}}{v_2}$	Zeit, die der Hund im Garten läuft,
$Z = \frac{x}{v_1} + \frac{\sqrt{(a-x)^2+b^2}}{v_2}$	Gesamtzeit, die der Hund läuft.

Die Strecke x wird so gewählt, dass die Gesamtzeit minimiert wird, also muss die Ableitung (Differential) der Gesamtzeit nach x Null ergeben.
Die erste Ableitung der Gesamtzeit nach x ist (unter Anwendung der Kettenregel)

$$Z'(x) = \frac{1}{v_1} + \frac{-2(a-x)\frac{1}{2}[(a-x)^2+b^2]^{-\frac{1}{2}}}{v_2} = \frac{1}{v_1} - \frac{a-x}{v_2\sqrt{(a-x)^2+b^2}}$$

Wir setzen die Ableitung gleich Null und formen die Gleichung um:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{v_1} - \frac{a-x}{v_2\sqrt{(a-x)^2+b^2}} &= 0 \qquad \text{mit dem Nennern multizieren} \\
v_2\sqrt{(a-x)^2+b^2} - v_1(a-x) &= 0 \\
\Rightarrow \quad v_2\sqrt{(a-x)^2+b^2} &= v_1(a-x) \qquad \text{quadrieren:} \\
\Rightarrow \quad v_2^2\left[(a-x)^2+b^2\right] &= v_1^2(a-x)^2
\end{aligned}
$$

Zuerst die Terme mit $(a-x)^2$ auf eine Seite bringen und diesen Term herausheben:

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \quad (v_2^2 - v_1^2)(a-x)^2 &= v_2^2 b^2 \\
\Rightarrow \quad (a-x)^2 &= \frac{v_2^2 b^2}{v_2^2 - v_1^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \quad a-x &= \pm\frac{v_2^2 b^2}{\sqrt{v_2^2 - v_1^2}} \qquad a-x \text{ muss laut Grafik aber positiv sein} \\
\Rightarrow \quad a-x &= \frac{v_2^2 b^2}{\sqrt{v_2^2 - v_1^2}} \\
\Rightarrow \quad x &= a - \frac{v_2^2 b^2}{\sqrt{v_2^2 - v_1^2}}
\end{aligned}
$$

Der Hund muss also bis zum Punkt $a - \frac{v_2^2 b^2}{\sqrt{v_2^2 - v_1^2}}$ auf der StraSSe bleiben.[2] □

4.2 Beispiele zum Vorbereiten

Beispiel 4.7. Löse die Formel

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{a^2}{c^2}}}$$

nach c auf.

[2] Oder, er machts wie jeder normale Hund und rennt schnurstracks zur Wurst ☺

Lösung:

Beispiel 4.8. Eine Sammellinse mit Brennweite f bildet einen Gegenstand, der sich im Abstand $g > f$ von der Linse befindet, auf ein Bild im Abstand b von der Linse ab (Siehe Grafik).

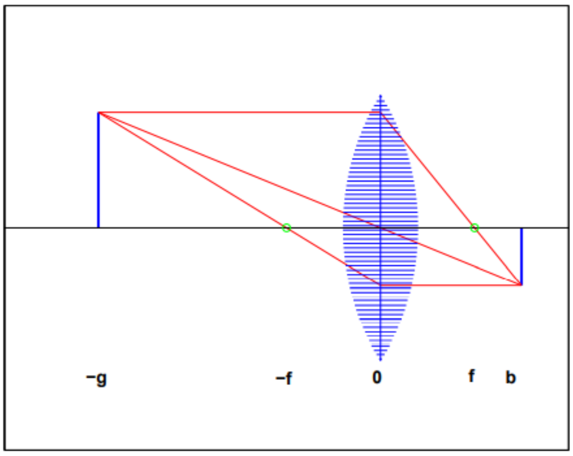


Abbildung 4.3: Sammellinse

Der Zusammenhang zwischen Brennweite und den Abständen von Gegenstand und Abbild wird durch die Linsengleichung gegeben:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b}$$

Berechnen Sie jede der GröSSen f, b, g aus den beiden anderen.

Lösung:

Beispiel 4.9. Die Sinkgeschwindigkeit von Staubpatikel kann durch die Gleichung

$$v_s = \frac{d^2(\rho_p - \rho_G)g}{18\eta_g}$$

beschrieben werden. Stellen Sie die Gleichung auf d und ρ_G um.

Lösung:

Beispiel 4.10. Durch folgende Gleichung können Reibungsverluste in Leitungen (vereinfachte Adern) beschrieben werden:

$$\alpha = \sqrt{1 - \frac{\frac{W_k}{\Delta V}}{\frac{1}{2}\rho\, v^2}}.$$

Stellen Sie die Gleichung auf ρ um.

Lösung:

4.3 Weitere Beispiele zum Üben

Beispiel 4.11. Lösen Sie das Lennard-Jones (12-6)-Potential V mit

$$V = 4\epsilon \left[\left(\frac{\sigma}{r}\right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{r}\right)^{6} \right]$$

nach r auf, unter der Voraussetzung, dass V, ϵ und σ positiv sind.

Beispiel 4.12. Lösen Sie die Gleichung

$$\frac{1}{\sqrt{1+a}} = \frac{b}{\sqrt{1-a}}, \qquad \text{mit } 0 < a < 1,\ 0 < b$$

nach a auf. Führen Sie die Probe durch um das Ergebnis zu überprüfen.

Beispiel 4.13. Löse die Formel

$$K^2 + aK + b = L^2(1+j)^m$$

nach $K,\ a,\ b,\ L$ und nach j auf.

Beispiel 4.14. Löse die Formel

$$K = L(1+i)^n$$

nach $K,\ L$, und i auf.

Beispiel 4.15. Formen Sie die Formel

$$F_n = F_0\left(1 + \frac{i}{100}\right)^n$$

jeweils nach F_0 und i um.

Beispiel 4.16. Löse die Formel

$$V^{-1} - (V+1)^{-1} = R, \qquad V > 0,\ R > 0$$

nach V auf.

Beispiel 4.17. Der (arithmetische) Mittelwert lässt durch

$$\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

berechnen. Bestimmen Sie die GröSSen N und x_{N-1}.

Beispiel 4.18. Die Strömungsgeschwindigkeit v an einer Drosselstelle lässt sich durch

$$v = \alpha\varepsilon\sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho_2\left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_1}\cdot\frac{A_2^2}{A_1^2}\alpha^2\varepsilon^2\right)}}$$

beschreiben. Bestimmen Sie daraus die GröSSen p_2 und α.

KAPITEL

5

EXPONENTIALFUNKTION UND LOGARITHMUS

5.1 Definition und Eigenschaften der Exponentialfunktion

Anmerkung 5.1. Von der Potenzrechnung kennen wir bereits, dass

$$a^m = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{m \text{ Faktoren}}$$

Ist $a > 0$ so können wir mittels Brüchen und Wurzeln die Potenz a^x auch für negative ganze x und Bruchzahlen definieren. Mit etwas mehr theoretischem Aufwand lässt sich die Potenzfunktion für alle reellen Zahlen x (Zahlen auf der Zahlengeraden) einführen. Die Rechenregeln der Potenzrechnung (vgl. Fakt 2.8) bleiben dabei gültig.

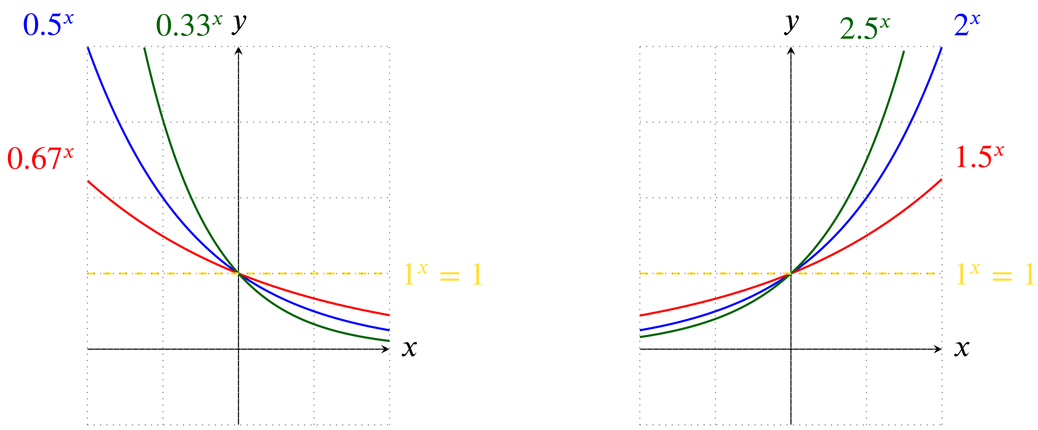
Definition 5.2. Die Funktion

$$x \mapsto a^x$$

heißt Exponentialfunktion zur Basis a.

Fakt 5.3. Sei $a > 0$, die Exponentialfunktion hat folgende Eigenschaften:

$a < 1$	$a = 1$	$a > 1$
positiv: $a^x > 0$		positiv: $a^x > 0$
streng monoton fallend	konstant 1	streng monoton steigend
konvex	gerade	konvex
$a^0 = 1$	$1^0 = 1$	$a^0 = 1$
$\lim_{x\to\infty} = 0$ $\lim_{x\to\infty} = \infty$		$\lim_{x\to\infty} = \infty$ $\lim_{x\to\infty} = 0$



(a) Basis a kleiner 1 (b) Basis a gröSSer 1

Abbildung 5.1: Exponentialfunktion a^x

Definition 5.4.

- Eine Funktion heiSSt monoton steigend, wenn gilt: Ist $x \leq y$, dann ist $f(x) \leq f(y)$.
- Eine Funktion heiSSt monoton fallend, wenn gilt: Ist $x \leq y$, dann ist $f(x) \geq f(y)$.
- Eine Funktion heiSSt konvex, wenn die Verbindungsstrecke zweier Punkte auf der Kurve, welche die Funktion darstellt, immer oberhalb der Kurve verläuft.
- Eine Funktion heiSSt konkav, wenn die Verbindungsstrecke zweier Punkte auf der Kurve, welche die Funktion darstellt, immer unterhalb der Kurve verläuft.

Definition 5.5. Die Eulersche Zahl

$$e = 2.71828182846\ldots$$

ist so definiert, dass die erste Ableitung der Funktion e^x wieder e^x ergibt.

Fakt 5.6. Sei λ eine feste reelle Zahl. Die Funktion

$$x \mapsto e^{\lambda x}$$

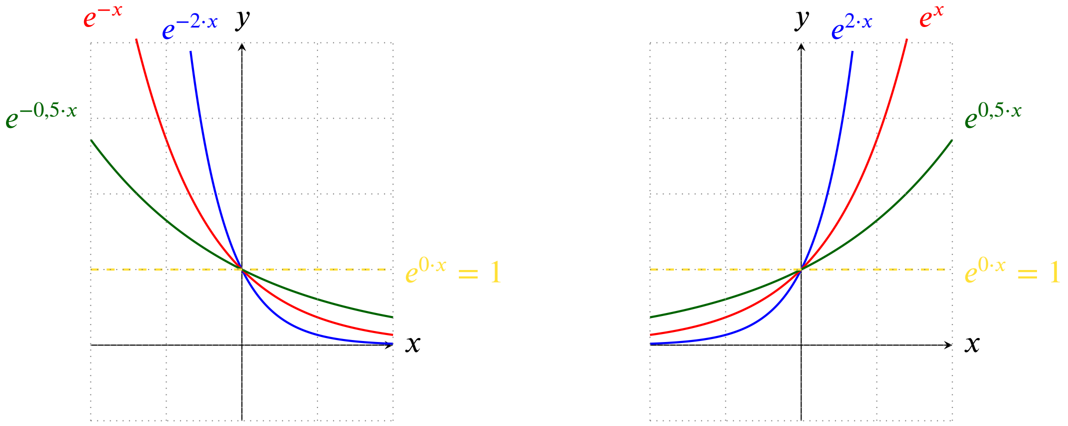
ist eine Exponentialfunktion zur Basis e.
Überlegung: wenn wir $e^\lambda = a$ setzen, so können wir folgende Umformung machen

$$e^{\lambda x} = \left(e^\lambda\right)^x = a^x.$$

Damit gelten folgende Aussagen:

- Ist $\lambda < 0$, so ist $e^\lambda = a < 1$
- Ist $\lambda = 0$, so ist $e^\lambda = a = 1$
- Ist $\lambda > 0$, so ist $e^\lambda = a > 1$.

Damit gilt die selbe Tabelle wie in Fakt 5.3, wobei es sich nur durch das λ unterscheidet.

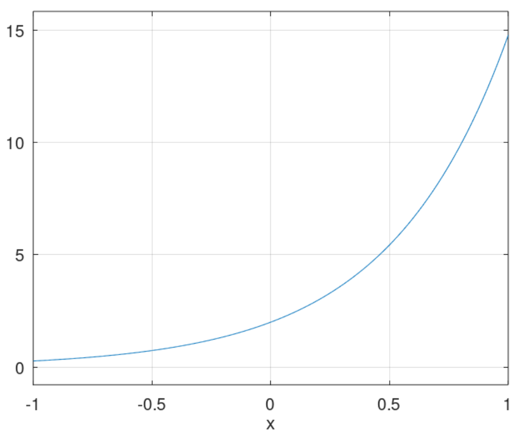


(a) Basis $e^{\lambda} = a$ kleiner 1 ($\rightarrow \lambda < 0$) (b) Basis $e^{\lambda} = a$ gröSSer 1 ($\rightarrow \lambda > 0$)

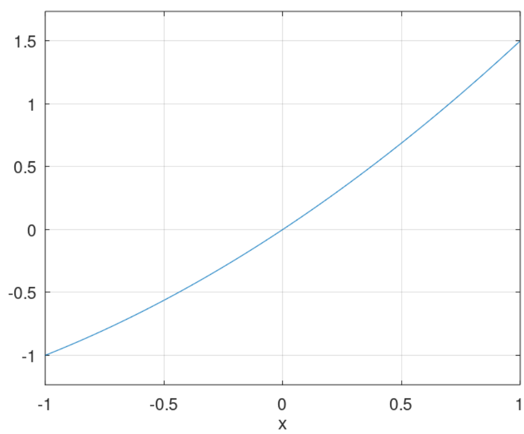
Abbildung 5.2: Exponentialfunktion $e^{\lambda x}$

Anmerkung 5.7. Die Exponentialfunktion zur Basis e hat, wie bereits erwähnt, die Eigenschaft, dass Sie sich bei der Ableitung *selbst erzeugt*. Das führt dazu, dass viele Prozesse in Technik und Wissenschaft mithilfe der Exponentialfunktion $e^{\lambda x}$ beschrieben (modelliert) werden. Kennwerte (wie z.B. das Wachstum) werden in der Regel über λ in $e^{\lambda x}$ definiert und nicht zu einer beliebigen Basis a, das hat vor allem historische Gründe (Computer sind geschichtlich betrachtet noch immer recht *neu*),e ist daher elementar in den Wissenschaften verankert. Jedes gängige Computersystem kann (natürlich) unmittelbar eine Exponentialfunktion a^x in die Form $e^{\lambda x}$ umformen, dennoch ist es in der Praxis **unerlässlich** mithilfe der Exponentialfunktion zur Basis e rechnen zu können und beschreiben zu können was die Eigenschaften der Funktion sind.
Darum werden wir im Folgenden hauptsächlich mit der Exponentialfunktion $e^{\lambda x}$ rechnen.

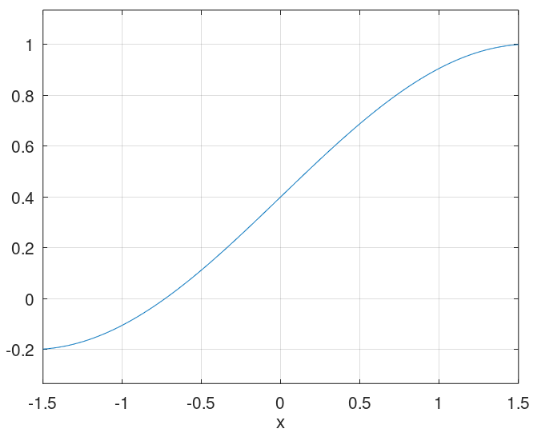
Beispiel 5.8. In der Praxis ist es oft wichtig unterscheiden zu können ob etwas die Form einer Exponentialfunktion hat oder nicht (es könnte sich auch um Gesetzte der Form $y = ax + b$ oder ($y = Cx^a$) handeln). Bei welchen der folgenden Funktionen könnte es sich um Exponentialfunktionen der Form $y = c\,e^{\lambda x}$ handeln?



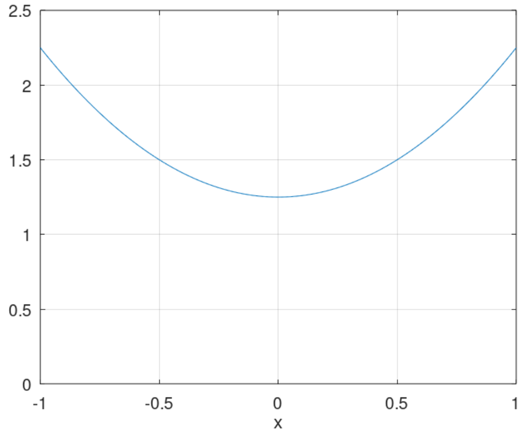
f_1



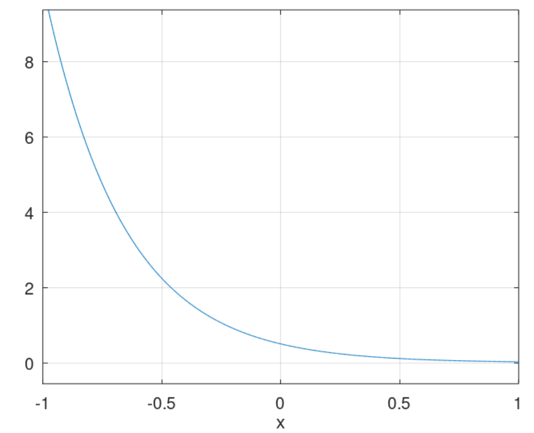
f_2



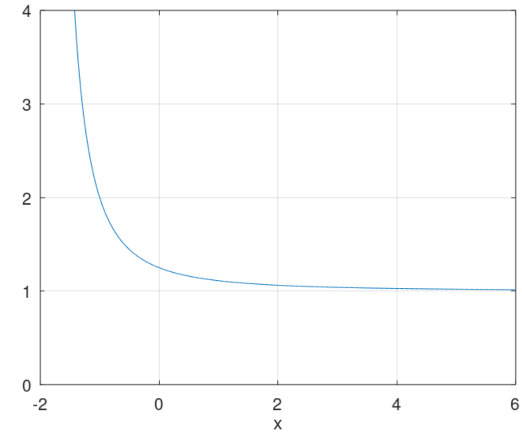
f_3



f_4



f_5



f_6

Lösung.

- $f_1(x) = C\, e^{\lambda x}$ kann gelten mit $C = 2$ (denn $f_1(0) = 2$) und $\lambda > 0$ (denn f_1 ist steigend).
- f_2 ist nicht überall positiv. Keine Exponentialfunktion.
- f_3 ist nicht überall konvex. Keine Exponentialfunktion.
- f_4 ist weder überall steigend noch überall fallend. Keine Exponentialfunktion.
- $f_5(x) = C\, e^{\lambda x}$ kann gelten mit $C = 3$ (denn $f_5(0) = 3$) und $\lambda < 0$ (denn f_5 ist fallend).
- f_6 ist fallend (spricht für negatives λ), aber $\lim_{x\to\infty} f_6(x) \neq 0$. Keine Exponentialfunktion.

$\square$

5.2 Definition und Eigenschaften des Logarithmus

Anmerkung 5.9. Diese Zusammenhänge kennen Sie sicherlich aus der Schule:

	Rechenoperation		Umkehrung	
Addition:	$a + b = x$	$\Leftrightarrow$	$x - b = a$	:Subtraktion
Multiplikation:	$a \cdot b = x$	$\Leftrightarrow$	$\frac{x}{b} = a$	:Division
Potenzieren:	$a^b = x$	$\Leftrightarrow$	$\sqrt[b]{x} = a$	:Wurzelziehen
Winkelfunktion:	$\sin(b) = x$	$\Leftrightarrow$	$\arcsin(x) = b$	:Inv-Winkelfunktion
Integrieren:	$\int f(x) = F(x)$	$\Leftrightarrow$	$F'(x) = f(x)$	:Ableitung

Wobei wir der Einfachheit nur einen passende Definitions und Bildbereich betrachten. In der Mathematik gibt es das **sehr** verbreitete Konzept, dass zu einer Rechenoperation die Umkehrung gesucht bzw. verwendet wird. Diese Idee bringt uns zum Logarithmus, dieser ist genau so definiert dass er die Umkehrung der Exponentialfunktion ist.

Definition 5.10. Sei $a > 1$. Der *Logarithmus* zur Basis a (geschrieben $\log_a$ ist definiert durch

$$\log_a(x) = y \qquad \Longleftrightarrow \qquad a^y = x.$$

Anmerkung. Diese Definition des Logarithmus liefert die Eigenschaft, dass $\log_a(a^x) = x$ ergeben muss. Also die Umkehrung der Exponentialfunktion. Es gilt dann (übrigens) auch $a^{\log_a(x)} = x$.
Wichtig zu beachten: Der Logarithmus ist zu einer **explizit** gegebenen Basis a definiert!

Anmerkung 5.11. Insbesondere sind folgende Logarithmen bedeutend:

- $\log_{10}(x)$: dekadischer Logarithmus,
- $\ln(x) = \log_e(x)$: natürlicher Logarithmus,
- $\log_2(x)$: binärer Logarithmus (in der Informationstheorie).

Fakt 5.12. Sei $a > 1$. Der Logarithmus $\log_a(x)$ gibt es nur für $x > 0$. Es gilt:

$$\begin{aligned} &\log_a(x) < 0 \text{ falls } 0 < x < 1, \\ &\log_a(x) = 0 \text{ falls } x = 1, \\ &\log_a(x) > 0 \text{ falls } 1 < x \end{aligned}$$

Das ist leicht zu verstehen. Es bedeutet ja $\log_a(x) = y$ dasselbe wie $a^y = x$. Nun ist a^y immer positiv, also muss x positiv sein. AuSSerdem ist $a^0 = 1$, und $a^y > 1$ falls $y > 0$.

Beispiel 5.13. Finden Sie die dekadischen Logarithmen der folgenden Zahlen, falls sie existieren:

$$100;\ 10000;\ 0,1;\ 0,001;\ \text{eine Million};\ 1;\ -2;\ 0$$

ohne den Taschenrechner zu benutzen.

Lösung.

- $\log_{10}(100) = 2$ denn $10^2 = 100$.
- $\log_{10}(10000) = 4$ denn $10^4 = 10000$.
- $\log_{10}(0,1) = -1$ denn $10^{-1} = \frac{1}{10} = 0,1$.
- $\log_{10}(0,001) = -3$ denn $10^{-3} = \frac{1}{1000} = 0,001$.
- $\log_{10}(10^6) = 6$ denn $10^6 = 10^6$.
- $\log_{10}(0)$ existiert nicht, denn 10^y ist nie 0.
- $\log_{10}(1) = 0$ denn $10^0 = 1$.
- $\log_{10}(-2)$ existiert nicht, denn 10^y ist immer positiv.

$\square$

Fakt 5.14. Sei $a > 1$. Die Logarithmusfunktion zur Basis a hat die folgenden Eigenschaften:

- $\log_a(x)$ existiert nur für $0 < x < \infty$
- Im Definitionsbereich:

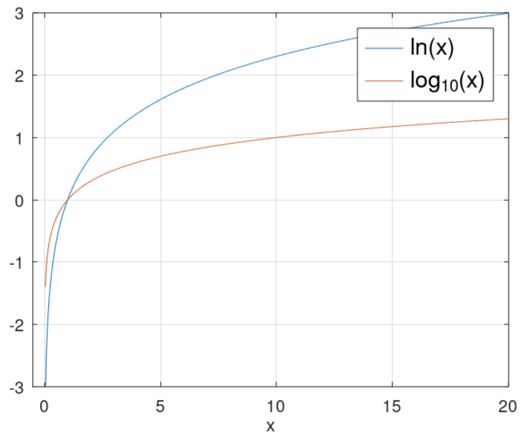
$$\log_a(x) \begin{cases} < 0 & \text{falls } 0 < x < 1 \\ = 0 & \text{falls } x = 1 \\ > 0 & \text{falls } 1 < x \end{cases}$$

- Die Logarithmusfunktion ist monoton steigend und konkav.
- Im Grenzprozess:

$$\lim_{x\to 0} \log_a(x) = -\infty$$
$$\lim_{x\to \infty} \log_a(x) = \infty$$

- Die Logarithmusfunktion $\log_a(x)$ wächst schnell für kleine x und sehr langsam im Bereich groSSer x.

Die folgende Grafik zeigt die Kurven des dekadischen und des natürlichen Logarithmus. Beachten Sie, dass eine Kurve in die andere übergeführt werden kann, indem man die y-Achse streckt oder staucht.



Dekadischer $\log_{10}(x)$ und natürlicher $\ln(x)$ Logarithmus

5.3 Rechenregeln für Logarithmen

Fakt 5.15. Sei $a > 1$. Für den Logarithmus zur Basis a gelten die folgenden Rechenregeln:

$$\begin{aligned}
\log_a(x \cdot y) &= \log_a(x) + \log_a(y) \\
\log_a\left(\frac{x}{y}\right) &= \log_a(x) - \log_a(y) \\
\log_a(x^m) &= m \log_a(x) \\
\log_a(x+y) &= \text{? Keine Regel !}
\end{aligned}$$

Anmerkung 5.16. Achten Sie beim Logarithmieren immer darauf, wie sich die Rechenoperationen ändern. Aus Multiplikation wird Addition, aus Potenz wird Multiplikation. Das ist eine häufige Fehlerquelle!

Beispiel 5.17. Zerlegen Sie die folgenden Logarithmen in Logarithmen möglichst einfacher Ausdrücke:

(a) $\ln(2e^{3x})$

(b) $\ln(5(z+v)w^2)$

(c) $\ln\left(\frac{\sqrt[3]{5a^2}}{c^3}\right)$

Lösung.

(a) $\ln(2e^{3x}) = \ln(2) + \ln(e^{3x}) = \ln(2) + 3\,x$

(b) $\ln(5(z+v)w^2) = \ln(5) + \ln(z+v) + \ln(w^2) = \ln(5) + \ln(z+v) + 2\ln(w)$

(c) $\ln\left(\frac{\sqrt[3]{5a^2}}{c^3}\right) = \ln\left(\sqrt[3]{5a^2}\right) - \ln\left(c^3\right) = \frac{1}{3}\ln\left(5a^2\right) - 3\ln(c) = \frac{1}{3}\left[\ln(5) + 2\ln(a)\right] - 3\ln(c)$
$= \frac{1}{3}\ln(5) + \frac{2}{3}\ln(a) - 3\ln(c)$

□

Beispiel 5.18. Fassen Sie die folgenden Ausdrücke als Logarithmus einer Zahl zusammen:

(a) $\frac{1}{2}\log_{10}(p) - \log_{10}(3)$

(b) $2\ln(a+b) + 4\ln(c-d)$

(c) $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x}{a} + \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}\right) + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}\right) + \ln\left(\sqrt{a}\right)$

Lösung.

(a) $\dfrac{1}{2}\log_{10}(p) - \log_{10}(3) = \log_{10}(\sqrt{p}) - \log_{10}(3) = \log_{10}\left(\dfrac{\sqrt{p}}{3}\right)$

(b) $2\ln(a+b) + 4\ln(c-d) = \ln\left((a+b)^2\right) + \ln\left((c-d)^4\right) = \ln\left((a+b)^2(c-d)^4\right)$

(c)

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x}{a} + \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}\right) + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}\right) + \ln\left(\sqrt{a}\right) = \\
&= \frac{1}{2}\left[\ln\left(\frac{x}{a} + \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}\right) + \ln\left(\frac{x}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}\right) + 2\ \ln(\sqrt{a})\right] \\
&= \frac{1}{2}\ln\left[\left(\frac{x}{a} + \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}\right) \cdot \left(\frac{x}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}\right) \cdot (\sqrt{a})^2\right] \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a} \cdot \frac{x}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} \cdot a\right) \\
&= \frac{1}{2}\ln(x).
\end{aligned}
$$

□

Fakt 5.19. Zur Umrechnung von Logarithmen und Exponentialfunktionen verschiedener Basen gelten die Formeln:

$$
\begin{aligned}
\log_a(x) &= \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}, \\
a^x &= b^{\log_b(a)\cdot x}, \\
a^x &= e^{\ln(a)\cdot x}.
\end{aligned}
$$

5.4 Lösen von Gleichungen mit Exponenten und Logarithmen

Beispiel 5.20. Lösen Sie die folgende Gleichung

$$5 + 2^{x+1} = 10.$$

Lösung. Wir isolieren zunächst den Exponentialausdruck mit der Unbekannten, und nehmen dann auf beiden Seiten den Logarithmus. Nach Anwendung der Rechenregeln für den Logarithmus und einigen weiteren Schritten steht die Unbekannte isoliert als Ausdruck mit mehreren

Logarithmen da. Letztlich rechnen wir diesen Ausdruck mit dem Taschenrechner oder Computer aus.

$$
\begin{aligned}
5 + 2^{x+1} &= 10 \qquad | - 5 \\
\Leftrightarrow \quad 2^{x+1} &= 5 \qquad | \ln(\cdot) \\
\Leftrightarrow \quad \ln\left(2^{x+1}\right) &= \ln(5) \\
\Leftrightarrow \quad (x+1)\ln(2) &= \ln(5) \qquad | \div \ln(2) \\
\Leftrightarrow \quad x + 1 &= \frac{\ln(5)}{\ln(2)} \qquad | - 1 \\
\Leftrightarrow \quad x &= \frac{\ln(5)}{\ln(2)} - 1 \approx 1,3219
\end{aligned}
$$

□

Beispiel 5.21. Lösen Sie die folgenden Gleichungen:

1. $e^{3x} = 4$
2. $4^{u^2 - \frac{7}{2}} = 2$

$$5 + 2^{x+1} = 10.$$

Lösung.

1.

$$
\begin{aligned}
e^{3x} &= 4 \\
\ln\left(e^{3x}\right) &= \ln(4) \\
3x &= \ln(4) \\
x &= \frac{\ln(4)}{3} \approx 0,4621
\end{aligned}
$$

2.

$$
\begin{aligned}
4^{u^2 - \frac{7}{2}} &= 2 \\
\ln\left(4^{u^2 - \frac{7}{2}}\right) &= \ln(2) \\
\left(u^2 - \frac{7}{2}\right)\ln(4) &= \ln(2) \\
u^2 - \frac{7}{2} &= \frac{\ln(2)}{\ln(4)} \\
u^2 &= \frac{7}{2} + \frac{\ln(2)}{\ln(4)} \\
u^2 &= \frac{7}{2} + \frac{1}{2} \\
u^2 &= 4 \\
u^2 &= \pm 2
\end{aligned}
$$

□

Beispiel 5.22. Lösen Sie die folgende Gleichung

$$25\ \ln(x-3) = 100$$

Lösung.

$$\begin{aligned}
25\ \ln(x-3) &= 100 \\
\ln(x-3) &= 4 \\
e^{\ln(x-3)} &= e^4 \\
x-3 &= e^4 \\
x &= e^4 + 3 \approx 57,598
\end{aligned}$$

□

Beispiel 5.23. Lösen Sie die folgenden Gleichungen:

1. $2 - \ln(26) = \ln(4R-1) - \ln(R)$

2. $y^{\log_{10}(y)} = 10000$

Lösung.

1.

$$\begin{aligned}
2 - \ln(26) &= \ln(4R-1) - \ln(R) \\
2 &= \ln(26) + \ln(4R-1) - \ln(R) \\
2 &= \ln\left(\frac{26(4R-1)}{R}\right) \\
e^2 &= e^{\ln\left(\frac{26(4R-1)}{R}\right)} \\
e^2 &= \frac{26(4R-1)}{R} \\
e^2\,R &= 26(4R-1) \\
e^2\,R &= 104R - 26 \\
26 &= 104R - e^2\,R \\
26 &= (104 - e^2)R \\
\frac{26}{104-e^2} &= R \\
R &\approx 0,2691
\end{aligned}$$

2. Die Gleichung kann man lösen, wenn man damit beginnt, auf beiden Seiten dekadische Logarithmen zu nehmen:

$$\begin{aligned}
y^{\log_{10}(y)} &= 10000 \\
\log_{10}\left(y^{\log_{10}(y)}\right) &= \log_{10}(10000) \\
\log_{10}(y) \cdot \log_{10}(y) &= 4 \\
\left(\log_{10}(y)\right)^2 &= 4 \\
\log_{10}(y) &= \pm 2 \\
10^{\log_{10}(y)} &= 10^{\pm 2} \\
y &= 10^{\pm 2} = \begin{cases} 100 \\ 0,01 \end{cases}
\end{aligned}$$

□

5.5 Beispiele zum Vorbereiten

Beispiel 5.24. Stellen Sie

$$e^{70\,x} \cdot 5^{-0,3\,y} \cdot \left(\frac{1}{e}\right)^{2\,z}$$

durch einen einzigen Exponentialausdruck der Form e^{α} dar.

Lösung:

Beispiel 5.25. Vereinfachen Sie

$$\ln\left((xyz)^3\right) - \ln\left(\left(\frac{xy}{z}\right)^2\right) - \left(\ln(x) + \ln\left(z^5\right)\right)$$

Lösung:

Beispiel 5.26. Lösen Sie die Gleichung

$$25\,e^{5t-2} = 1$$

Lösung:

Beispiel 5.27. Lösen Sie die Gleichung

$$4\log_{10}(x) - 3\log_{10}(2x) = 4$$

Lösung:

5.6 Weitere Beispiele zum Üben

5.6.1 Logarithmen

Beispiel 5.28. Der dekadische Logarithmus von 2 ist ungefähr $log_{10}(2) \approx 0,3010$. Bestimmen Sie ohne Benutzung eines Taschenrechners näherungsweise:

$$\log_{10}\left(\frac{1}{2}\right); \qquad \log_{10}(5); \qquad \log_{10}(20); \qquad \log_{10}\left(\frac{5}{8}\right)$$

Tipp: $\log_{10}(4) = \log_{10}(2 \cdot 2) = \log_{10}(2) + \log_{10}(2) = 2 \cdot \log_{10}(2) \approx 2 \cdot 0,3010 = 0,620$

Beispiel 5.29. Drücken Sie

$$\frac{1}{3}\left(\log_4(a) - \frac{1}{2}\log_4(a-b) - \frac{1}{3}\log_4(a+b) + \log_4(c)\right)$$

durch *einen* Logarithmus aus.

Beispiel 5.30. Vereinfachen Sie für $y > 0$ den Ausdruck

$$\log_{10}\left(\frac{1}{\sqrt{y^2+1}}\right) + \log_{10}\left(\sqrt{1+\frac{1}{y^2}}\right) + \log_{10}(y).$$

Beispiel 5.31. Welche Zahl ist gröSSer 2015^{2016} oder 2016^{2015}. Begründen Sie Ihre Antwort durch eine geeignete Rechnung.

Beispiel 5.32. Um wie viel verändert sich der pH-Wert einer wässrigen Lösung, wenn die H^+-Ionen Konzentration halbiert wird?

5.6.2 Gleichungen mit Exponenten

Beispiel 5.33. Lösen Sie die Formel

$$e^{K^2+aK+b} = \ln\left(L^2\right)(1+p)^{-5}$$

nach $K,\ a,\ b,\ L$ und nach p auf.

Beispiel 5.34. Lösen Sie folgende Gleichungen:

(a) $9^{x-1} = 27$

(b) $2^x + 3 \cdot 2^{x+1} = 28$

(c) $2^{x-7} = 3^{2x-4}$

(d) $\sqrt[x]{10} = 2$

(e) $2^{\frac{1}{x}-3} - 5^{\frac{1}{x}+1} = 0$

Beispiel 5.35. Lösen Sie folgende Gleichungen:

(a) $\log_{10}(x) = \frac{1}{4}\log_{10}(81)$

(b) $\log_{10}(50x) - 2\log_{10}(3-x) = 2 - \log_{10}(2x+3)$

(c) $\log_5(x+3) = 2$

(d) $\log_2\left(x^2\right) + \log_2\left(x^3\right) = \log_2(243)$

Beispiel 5.36. Lösen Sie die Gleichung:

$$\frac{\ln(x+1) - \ln\left(x^2+5\right)}{\ln(x+2)} = -1$$

Beispiel 5.37. Lösen Sie die Gleichung:

$$e^x + e^{-x} = 4$$

Beispiel 5.38. Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichung

$$(\log_{10}(x)+7)^2 + 5(\log_{10}(x)+7) = -\log_{10}\left(10^{42}x^6\right)$$

KAPITEL

6

ANWENDUNGEN VON EXPONENTIAL UND LOGARITHMUSFUNKTIONEN

6.1 Logarithmische Skalen

Logarithmische Skalen sind in zwei Fällen äuSSerst nützlich:

- Wenn ein Bereich mit enormen GröSSenunterschieden um mehrere Zehnerpotenzen abgedeckt werden soll.
- Wenn es auf das Verhältnis zwischen Intensitäten, nicht deren Differenz ankommt.

In dieser Lehrveranstaltung erwähnen wir zwei der wichtigsten logarithmischen Skalen.

Definition 6.1. Der Säuregrad einer wässerigen Lösung wird durch die Konzentration der positiven Wasserstoffionen bestimmt: Je mehr H^+, desto saurer die Lösung. Neutrales Wasser hat eine Ionenkonzentration von $10^{-7}\mathrm{mol/Liter}$. Der pH-Wert einer Lösung ist der negative dekadische Logarithmus der H^+-Konzentration:

$$\mathrm{pH} = -\log_{10}([\mathrm{H}^+]),$$
$$[\mathrm{H}^+] = 10^{-\mathrm{pH}}.$$

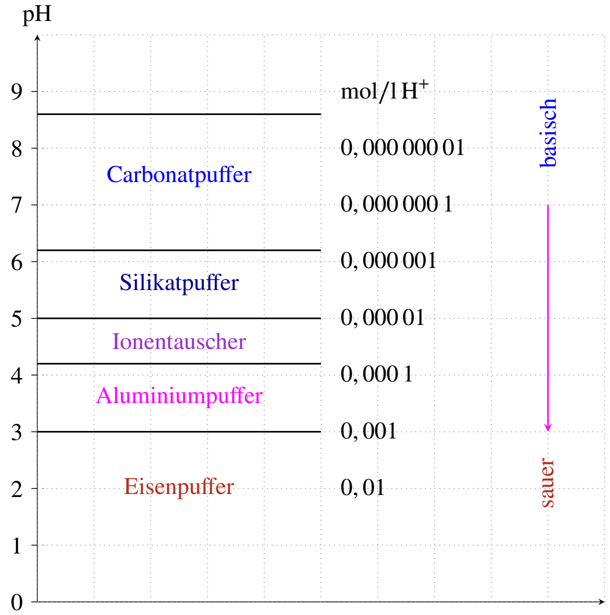
Beispiel 6.2.
- Wie hoch ist die Wasserstoffionenkonzentration in einer milden Lauge mit pH-Wert $8,5$?
- Wie hoch ist der pH-Wert einer starken Säure mit einer H^+-Konzentration von $5\mathrm{mmol/Liter}$?

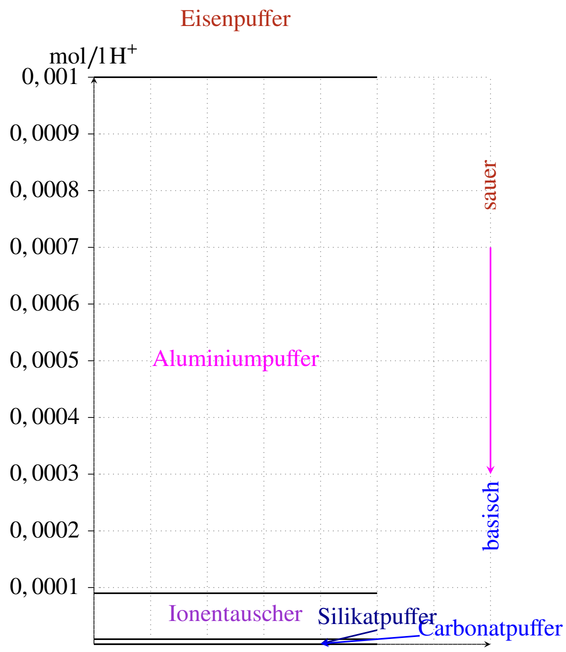
Lösung.

- Es gilt $10^{-8,5} \approx 3,16 \cdot 10^{-9}$, also ist die H^+-Konzentration in der Lauge $3,16 \cdot 10^{-9}$ mol/Liter.
- Es ist $-\log_{10}(0,005) \approx 2,3$, der pH-Wert der Säure beträgt 2, 3.

□

Beispiel 6.3. Die folgenden Grafiken zeigen **die selben** Pufferreaktionen im Boden, in Abhängigkeit vom Säuregrad.





pH-Wert logarithmische Darstellung
vergleichbare Darstellung

Ionenkonzentration in absoluten Zahlen
unübersichtliche Darstellung

Lösung.

biologisch-chemisch: Der pH-Wert eines Acker- oder Waldbodens ist ein entscheidender Parameter für das Gedeihen der Pflanzen; verschiedene Arten gedeihen auf verschieden sauren Böden. Durch die Umweltprobleme mit dem sauren Regen ist der pH-Wert stark ins öffentliche Interesse gerückt. Der pH-Wert des Bodens stabilisiert sich selbst, indem überflüssige Wasserstoffionen eingefangen und gegen Metallionen ausgetauscht werden. Im basischen Bereich geschieht das durch Bicarbonat (CaHCO3). (Bei Übersäuerung des Bodens hilft Kalkung.) Bicarbonat wird aber leicht ausgewaschen und sinkt mit dem Sickerwasser in tiefere, für Pflanzen unerreichbare Regionen ab. Ist der Bicarbonatpuffer erschöpft, wirken die Huminstoffe als Puffer. Das sind Makromoleküle auf Siliziumbasis, an denen zahlreiche Ionen angelagert sind, darunter auch Alkali- und Erdalkaliionen, welche gegen Wasserstoffionen ausgetauscht werden können. Wenn dieser Puffer erschöpft ist, wirken Aluminiumoxide als Puffer. Aluminiumionen, die in Lösung gehen, sind aber toxisch für die Feinwurzeln. Und das gilt ebenso für die Eisenionen, die in Lösung gehen, wenn der Aluminiumpuffer erschöpft ist. Deshalb zerstört saurer Regen die Feinwurzeln.

mathematisch:

- Die linke Grafik zeigt die Bereiche, in denen die einzelnen Puffer wirksam sind. Beachten Sie, dass diese Grafik nur auf Grund der logarithmischen pH-Skala eine verständliche/lesbare Gestalt hat.
- In der rechten Grafik wurde senkrecht die H^+-Konzentration linear auftragen, der Eisenbuffer ist in dieser Darstellung nicht mehr auf der Skaler, und alle anderen als der Aluminiumpuffer sind am unteren Rand zusammengepresst.

Beachten Sie auch, dass bei Addition von 1 zum pH-Wert die Wasserstoffkonzentration durch den Faktor 10 dividiert wird.

□

Definition 6.4. Die Intensität von Schall wird nach der Dezibelskala angegeben. Referenzdruck ist der Schalldruck von $p_0 = 20\mu\text{Pa}$ (mikroPascal), an der Grenze der Wahrnehmbarkeit. Das dB-MaSS eines Schalldruckes p wird dann definiert durch

$$\begin{aligned} \text{dB} &= 20\ \log_{10}\left(\frac{p}{p_0}\right) \\ \frac{p}{p_0} &= 10^{\text{dB}/20} \end{aligned}$$

Fakt 6.5.

- Addition von 20dB entspricht einer Verzehnfachung des Schalldruckes.
- Addition von 6dB entspricht in etwa einer Verdoppelung des Schalldruckes.

Beispiel 6.6.

- Um welchen Faktor erhöht sich der Schalldruck bei einer Erhöhung des dB-Wertes um 10 dB?
- Das dB-MaSS hat sich nicht nur als MaSS des Schalldruckes, sondern für alle Arten von Verhältnissen von Intensitäten in der Signalverarbeitung eingebürgert. Ein guter Audio-Verstärker kann eine Rauschspannungsabstand (Verhältnis Nutzsignal zu Rauschsignal) von 100 dB erreichen.
  Wenn der Verstärker bei Volllast eine Spannung von 30 V an die Lautsprecher liefert, wie hoch ist dann die Spannung des Rauschsignals?

Lösung.

- Wir erhöhen einen beliebigen Dezibelwert dB um 10 und nutzen die Potenzrechengesetze:
  $$10^{\frac{\text{dB}+10}{20}} = 10^{\frac{\text{dB}}{20}+\frac{10}{20}} = 10^{\frac{\text{dB}}{20}} \cdot 10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10} \cdot 10^{\frac{\text{dB}}{20}} \approx 3,16 \cdot 10^{\frac{\text{dB}}{20}}$$
  Also entsprechen 10 dB einem Faktor von 3, 16.
- Es gilt $10^{100/20} = 10^5$. Das Verhältnis von Nutzsignal zu Rauschsignal $\left(\frac{p}{p_0}\right)$ ist also 10^5, bei 30 V gibt es also 300 μV Rauschspannung. Rechnerisch:
  $$\frac{30\text{V}}{p_0} = 10^5 \Leftrightarrow p_0 = 30\,\text{V} \cdot 10^{-5} = 300\mu\text{V}$$
  Anmerkung: Bei Spannungen ist die Notation p_0 natürlich nicht üblich (Elektrotechnik), die Rechnung ist natürlich unabhängig von der Namensgebung der Variablen.

□

Beispiel 6.7. Die folgende Tabelle zeigt ungefähr das dB-MaSS für verschiedene Schallquellen an.

dB	Druck	Schallquelle
130	63,2 Pa	Schmerzgrenze
120	20 Pa	Probelauf von Düsentriebwerken
110	6,32 Pa	Höchstlautstärke eines Symphonieorchesters
100	2 Pa	Pressluftbohrer
90	632 mPa	LKW im Stadtverkehr
80	200 mPa	PKW im Stadverkehr
70	63,2 mPa	Schreibmaschine
60	20 mPa	Radio in Zimmerlautstärke
50	6,32 mPa	normale Unterhaltung
40	2 mPa	Hintergrundgeräusche im Haus
30	632 μPa	Flüstern
20	200 μPa	Ticken einer Standuhr
10	63,2 μPa	Blätterrascheln
0	20 μPa	Hörschwelle

Lösung. Der Hörbereich umfasst GröSSenordnungen vom Mikropascal-Bereich bis zu Pascal. Im Bereich der Schmerzgrenze gilt der Faktor $10^6 = 120\text{dB}$, was bedeutet, dass unser Ohr einen *Druckbereich* von einer Million abdeckt[1]. Die logarithmische Skala ist geeignet, einen so groSSen Bereich abzudecken. AuSSerdem wird nach dem Weber-Fechnerschen Gesetz der Zuwachs einer Sinneswahrnehmung linear wahrgenommen (gleiche Intensität kommt in gleichen Zeiteinheiten dazu) wenn die Energie exponentiell wächst (in gleichen Zeiteinheiten multipliziert sich die Energie mit demselben Faktor). Lautstärkeregler in Audioverstärkern sind logarithmisch ausgelegt: Verdreht man den Regler um gleiche Winkel, multipliziert sich der Widerstand mit den gleichen Faktoren. □

6.2 Modellierung von exponentiellem Wachstum bzw. exponentieller Abnahme

Definition 6.8. Eine GröSSe $u(t)$ hänge von der „Zeit“ t ab. Wir sagen: Die GröSSe u erfüllt ein exponentielles Wachstumsgesetz, wenn gilt: In gleichen Zeitabständen wird u mit demselben Faktor multipliziert. Ist der Faktor gröSSer als 1, so wächst die GröSSe u exponentiell. Ist er kleiner als 1, so klingt sie exponentiell ab.

Beispiel 6.9. Ein Kapital von 100 000 Euro wurde im Jahr 2022 angelegt, sodass es jährlich mit 6% verzinst wird. Wie vermehrt sich das Kapital in $2,\ 3,\ 4, \dots$ Jahren?

Lösung.

[1] Beeindruckend wenn man mal so darüber nachdenkt.

$$\begin{array}{ccccc}
\text{Jahr} & \text{Kapital} & & & \\
2020 & 100\,000 & & & \\
2021 & 1,06 \cdot 100\,000 & = & 106\,000 & \\
2022 & 1,06 \cdot 106\,000 & = & 112\,360 & = & 1,06^2 \cdot 100\,000 \\
2023 & 1,06 \cdot 112\,360 & = & 119\,101,6 & = & 1,06^3 \cdot 100\,000 \\
2024 & 1,06 \cdot 119\,101,6 & = & 126\,247,696 & = & 1,06^4 \cdot 100\,000 \\
\vdots & & & & & \vdots \\
2020+n & & & & & 1,06^n \cdot 100\,000
\end{array}$$

In jeweils n Jahren vervielfältigt sich das Kapital um den Faktor $1,06^n$. □

Anmerkung 6.10. Eine zentrale und wichtige Eigenschaft des exponentiellen Wachstums ist, dass die Vervielfältigung in gleichen Zeitabständen gleich bleibt. Bei unserem letzten Beispiel bedeutet das:

$$\begin{array}{lcl}
2020-2022: & \dfrac{112\,360}{100\,000} & = & 1,1236 \\
2021-2023: & \dfrac{119\,101,6}{106\,000} & = & 1,1236 \\
2022-2024: & \dfrac{126\,247,696}{112\,360} & = & 1,1236
\end{array}$$

Anmerkung 6.11. Praktische Anwendungen der exponentiellen Wachstums- und Zerfallsgesetze *gibt es wie Sand am Meer*. Zum Beispiel:

- Zinseszinsen, Inflation über Zeiträume, in denen sich die Bedingungen des Finanzmarktes nicht wesentlich ändern.
- Wachstum kleiner Populationen, solange keine Ressourcenknappheit oder Übervölkerungseffekte das Wachstum einbremsen: Jedes Individuum hat pro Zeiteinheit im Durchschnitt eine bestimmte Zahl Nachkommen.
- Radioaktiver Zerfall oder spontaner chemischer Zerfall eines Stoffes, soweit jedes Molekül spontan und ohne Wechselwirkung mit anderen Molekülen zerfällt (Reaktion erster Ordnung).

Fakt 6.12. Wenn eine GröSSe $u(t)$ in Abhängigkeit von der Zeit t exponentiell wächst oder abklingt, so gilt mit geeigneten Zahlen C und k das Exponentialgesetz

$$u(t) = c\, e^{kt}.$$

Dabei gilt:

- $C = u(0)$ der Wert von u zum Zeitpunkt $t = 0$.
- Der Parameter k bestimmt, ob und wie stark u wächst.
- Die GröSSe u wächst, wenn $k > 0$ ist und sie fällt, wenn $k < 0$ gilt.

Beispiel 6.13. Die Biomasse $B(t)$ (in Gramm) einer Bakterienkultur am Tag t folgt einem exponentiellen Wachstumsgesetz:

$$B(t) = 4\,e^{0{,}25\,t}$$

1. Wie groSS war die Biomasse am Tag $t = 0$, als die Kultur angelegt wurde?
2. Wie groSS wird die Biomasse am Tag $t = 8$ sein?
3. Um welchen Faktor vervielfacht sich die Biomasse in 6 Tagen?
4. In wie vielen Tagen verdoppelt sich die Biomasse?

Lösung. Wir stellen klar: In dieser Formel bedeutet t die Zeit in Tagen, und B die Biomasse. Der Ausdruck $B(t)$ drückt aus, dass die Biomasse vom Zeitpunkt t abhängt.

1. Wir setzen einfach den Tag $t = 0$ in die Formel ein:
$$B(0) = 4\,e^{0{,}25\cdot 0} = 4\,e^0 = 4$$
Am Tag $t = 0$ betrug die Biomasse 4 Gramm.

2. Ebenso für den achten Tag $t = 8$:
$$B(8) = 4\,e^{0{,}25\cdot 8} = 4\cdot e^2 \approx 29{,}56\,\mathrm{g}$$
Also beträgt am Tag $t = 8$ die Biomasse $29{,}56$ Gramm.

3. Innerhalb von 6 Tagen vervielfacht sich (unabhängig von welchen 6 Tagen) die Biomasse um einen konstanten Faktor. Wir rechnen nach, um welchen Faktor sich die Biomasse von Tag 0 auf Tag 6 vervielfacht hat, indem wir die Tage $t = 6$ und $t = 0$ in die Exponentialformel einsetzen und die beiden Biomassen dividieren:
$$\frac{B(6)}{B(0)} = \frac{4e^{0{,}25\cdot 6}}{4e^{0{,}25\cdot 0}} = \frac{4e^{1{,}5}}{4} = e^{1{,}5} \approx 4{,}4817.$$
In 6 Tagen vervielfacht sich die Biomasse um den Faktor $4{,}4817$.

4. An welchem Tag hat sich die Biomasse seit ihrer Anlage verdoppelt? Wir benennen diesen Zeitpunkt mit t_2. Der folgende Ansatz sagt aus, dass die Biomasse zum Zeitpunkt t_2 doppelt so groSS ist wie zum Zeitpunkt t_0.
$$\frac{B(t_2)}{B(0)} = 2$$
Wir setzen jetzt für $B(t_2)$ und $B(0)$ in die Formel ein und erhalten eine Gleichung, die wir nach t_2 auflösen:
$$\begin{aligned} \frac{4e^{0{,}25\,t_2}}{4e^{0{,}25\cdot 0}} &= 2 \\ \frac{e^{0{,}25\,t_2}}{e^{0{,}25\cdot 0}} &= 2 \\ e^{0{,}25\,t_2} &= 2 \qquad \text{jede Zahl hoch 0 ist 1} \\ 0{,}25\,t_2 &= \ln(2) \\ t_2 &= 4\ln(2) \approx 2{,}7726 \end{aligned}$$
Die Verdoppelungszeit beträgt ungefähr $2{,}8$ Tage.

$\square$

Definition 6.14. Eine GröSSe $u(t)$ entwickle sich nach einem exponentiellen Wachstumsgesetz. Wenn die GröSSe exponentiell wächst, so ist die Verdoppelungszeit jene Zeit, in der sich die GröSSe verdoppelt. Wenn die GröSSe exponentiell abklingt, so ist die Halbwertszeit jene Zeit, in der sich die GröSSe halbiert.

Anmerkung 6.15. Wenn sich eine GröSSe u nach einem Exponentialgesetz

$$u(t) = Ce^{kt}$$

entwickelt, dann hängen Halbwertszeit und Verdoppelungszeit nur vom Parameter k ab. Der Faktor C kürzt sich aus allen Rechnungen, die die Halbwertszeit und Verdoppelungszeit betreffen.

Beispiel 6.16. Das radioaktive Kohlenstoffisotop C^{14} hat eine Halbwertszeit von ungefähr 5600 Jahren. Ein bestimmter Anteil der Kohlenstoffatome im CO_2 der Atmosphäre besteht aus C^{14}. Entsprechend ist auch der gleiche Anteil von C^{14} im Kohlenstoff der pflanzlichen Biomasse zu finden. Da die Pflanze regelmäSSig Kohlenstoff aus der Atmosphäre aufnimmt, passt sich der C^{14}-Anteil in der Pflanze dem Anteil in der Atmosphäre an. In einem toten Pflanzenstück kann C^{14} zerfallen, ohne ersetzt zu werden. Der Anteil von C^{14} im Kohlenstoff eines Fossils sinkt daher unter den Anteil in der Atmosphäre.
Der C^{14}-Anteil in einem Fossil sei ungefähr ein Zehntel des Anteils in der Atmosphäre. Wie alt ist das Fossil?

Lösung. Für den C^{14}-Anteil $u(t)$ in einem abgestorbenen Pflanzenstuck zur Zeit t (in Jahren) gilt ein Exponentialgesetz

$$u(t) = Ce^{kt}.$$

Der Parameter k lässt sich aus der Halbwertszeit berechnen: Wir setzen an, dass sich in 5600 Jahren der C^{14}-Anteil halbiert.

$$\begin{aligned}
\frac{u(5600)}{u(0)} &= \frac{1}{2} \\
\frac{Ce^{5600k}}{Ce^{0k}} &= \frac{1}{2} \\
e^{5600k} &= \frac{1}{2} \\
5600k &= -\ln(2) \qquad (= \ln\left(\frac{1}{2}\right)) \\
k &= -\frac{\ln(2)}{5600}
\end{aligned}$$

Beachten Sie, dass es insbesondere für Zahlen im Exponenten *gefährlich* ist zu runden, da dabei der Rundungsfehler sehr schnell signifikant wird.
Nun berechnen wir die Zeit t, die der radioaktiven Zerfall braucht, damit der Kohlenstoffanteil

auf ein Zehntel sinkt:

$$\begin{aligned}
\frac{u(t)}{u(0)} &= \frac{1}{10}\\
\frac{Ce^{kt}}{Ce^{0k}} &= \frac{1}{10}\\
e^{kt} &= \frac{1}{10}\\
kt &= -\ln(10)\\
t &= -\frac{\ln(10)}{k} = -\frac{\ln(10)}{-\frac{\ln(2)}{5600}} = 5600\frac{elog10}{\ln(2)} \approx 18602
\end{aligned}$$

Das Fossil ist ungefähr 18000 Jahre alt. □

6.3 Zwei aufwendigere Beispiele

Im folgenden Beispiel wird gezeigt wie die in den letzten drei Kapiteln kennengelernte Methoden verknüpft werden können um komplexe, biologische Vorgänge zu beschreiben.

Beispiel 6.17. Einem Försterteam kann in einer Forstkampagne 10 ha Wald pflanzen. Dabei nehmen wir an dass die Dauer der Kampagne so kurz ist, dass Sie für weitere Betrachtungen nicht ins Gewicht fällt. Weiter nehmen wir an, dass Sie immer nur 1 Mal im Jahr (z.B. immer im Frühling) durchgeführt werden kann. Zuletzt gehen wir davon aus, dass vor der ersten Forstkampagne kein Wald vorhanden ist.

1. Angenommen der Wald wächst nicht von alleine weiter, wie viele Jahre muss die Forstkampagne durchgeführt werden damit 640 ha Wald bepflanzt werden?

2. Angenommen der Wald wächst um 2% jährlich wie lange muss der Förster warten damit der Wald nach einer einmaligen Kampagne auf die gewünschten 640 ha anwächst?

3. Wie viele jährliche Kampagnen müssen durchgeführt werden, wenn ein jährliches Waldwachstum von 2% angenommen wird?

Lösung. 1. Der Wald wächst um einen festen Wert (10 ha) pro Kampagne an. Damit handelt es sich um lineares Wachstum bezüglich der Kampagnenanzahl n. Das Gesetz für den Waldwachstum ist also

$$F_n = F_0 + n \cdot a$$

mit $F_0 = 0$, $a = 10\,\text{ha}$ und $F_n = 640\,\text{ha}$. Damit ergibt sich für die Anzahl der Kampagnen die Gleichung $640 = 10 \cdot n$, oder $n = 64$. Die Kampagne muss also 64 Mal durchgeführt werden.
Beachten Sie dass also die gewünschte Fläche nach 63 Jahren nach der ersten Kampagne erreicht wird. Wenn wir also das Gesetz für Waldwachstum so ansetzen, dass n für die Anzahl der Jahre ab ersten Kampagne steht, dann ist F_0 mit 10 $athrmha$ anzusetzen.

Womit aus dem gleich aussehenden Gesetz $F_n = F_0 + n \cdot a$ die Gleichung $640 = 10 + n \cdot 10$ für die Anzahl der Jahre folgt. Diese hat die schon erwähnte Lösung $n = 63$.
Dieses Beispiel verdeutlicht, warum es immer notwendig ist neben dem Wachstumsgesetz die Bedeutung der Symbole in diesem mitanzugeben.

2. Der Wald wächst um einen festen Faktor (2%) pro Jahr an. Damit handelt es sich um exponentielles Wachstum. Das Wachstumsgesetz lautet also

$$F_n = F_0 \cdot (1 + a)^n.$$

Die Startfläche F_0 ist nun die Fläche die in einer Forstkampagne gepflanzt wird, d.h. $10ha$, $a = 2\% = 0.02$ und wieder $F_n = 640$ ha. Damit ergibt sich die Gleichung $640 = 10 \cdot 1.02^n$, welche die Lösung $n = \frac{\ln(64)}{\ln(1{,}02)} \approx 210$ hat. Der Förster muss ca. 210 Jahre warten.

3. Für diese Aufgabe werden wir ein neues Wachstumsgesetz herleiten müssen. Die spannende Frage dabei ist ob das gleichzeitige Zupflanzen und die natürliche Flächenvergrö-SSerung insgesamt ein Waldwachstum ergeben dass noch schneller als exponentiell ist? Grundsätzlich wissen wir aus den Überlegungen im ersten Teil, dass höchstens 64 Kampagnen durchgeführt werden müssen. Wir gucken uns zur besseren Übersicht zuerst das Waldwachstum für die ersten Jahre an. Direkt nach der ersten Kampagne ist die Waldfläche

$$F_0 = 10.$$

Nach einem Jahr ist diese Fläche um 2% gewachsen und zusätzlich kommen 10 ha Neupflanzung dazu, insgesamt gilt also

$$F_1 = 10 \cdot 1{,}02 + 10 = 10 \cdot (1{,}02 + 1).$$

Nach zwei Jahren hat sich die gesamte Vorjahresfläche um 2% erhöht und es sind wieder 10 ha dazugekommen, d.h.

$$F_2 = 10 \cdot F_1 \cdot 1{,}02 + 10 = 10 \cdot (1{,}02^2 + 1{,}02 + 1).$$

Ähnlich nach 3 Jahren

$$F_3 = 10 \cdot F_2 \cdot 1{,}02 + 10 = 10 \cdot (1{,}02^3 + 1{,}02^2 + 1{,}02 + 1).$$

Wir fühlen uns sicher genug das folgende allgemeine Gesetz zu fordern

$$F_n = F_{n-1} \cdot (1 + a) + F_0$$

Der letzte Term „$+F_0$“ist also der Unterschied zu einem exponentiellen Wachstum. Gleichzeitig muss nach der Betrachtung des auftretenden Musters auf der rechten Seite der Flächen $F_0,\ F_1,\ F_2,\ F_3$ gelten:

$$F_n = F_0 \left[(1 + a)^n + (1 + a)^{n-1} + \ (1 + a)^2 + (1 + a) + 1 \right].$$

Können wir für die Summe in der eckigen Klammer auch einen einfacheren Ausdruck finden?

Nebenrechnung: Geometrische Reihe
Nachdenken über dieses Problem liefert, dass eine ähnliche Summe mit einem Term der die nächsthöhere Potenz enthält sich auf zwei Arten schreiben lässt:

$$\begin{aligned}
1:\quad & q^{n+1} + q^n + q^{n-1} + \cdots + q^2 + q + 1 = q \cdot (q^n + q^{n-1} + \cdots + q^2 + q + 1) + 1 \\
2:\quad & q^{n+1} + q^n + q^{n-1} + \cdots + q^2 + q + 1 = q^{n+1} + (q^n + q^{n-1} + \cdots + q^2 + q + 1)
\end{aligned}$$

anders geschrieben

$$q \cdot (q^n + q^{n-1} + \cdots + q^2 + q + 1) + 1 = q^{n+1} + (q^n + q^{n-1} + \cdots + q^2 + q + 1)$$

damit es übersichtlicher ist schreiben wir $Q = q^n + q^{n-1} + \cdots + q^2 + q + 1$, womit wir die gleiche Gleichung erhalten, die wir dann einfach auf Q umformen können:

$$\begin{aligned}
q \cdot Q + 1 &= q^{n+1} + Q \\
q \cdot Q - Q &= q^{n+1} - 1 \\
Q \cdot (q - 1) &= q^{n+1} - 1 \\
Q &= \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}
\end{aligned}$$

Q zurück eingesetzt erhalten wir:

$$q^n + q^{n-1} + \cdots + q^2 + q + 1 = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$$

Wir können mit dieser Nebenrechnung unsere Reihe lösen, mit $q = a + 1$. Damit erhalten wir

$$F_n = F_0 \frac{(1+a)^{n+1} - 1}{(1+a) - 1} = \frac{F_0}{a}\left[(1+a)^{n+1} - 1\right].$$

Wie erwartet wächst der Wald nicht genau exponentiell. Andererseits sehen wir, dass der Wald pro Jahr trotzdem um etwa den Faktor $(1 + a)$ zuwächst. Damit ist das Wachstum für groSSe n also „im Wesentlichen“exponentiell allerdings bezogen auf die StartgröSSe F_0/a.
Nach diesen Überlegungen sind wir bereit die Frage der Teilaufgabe zu beantworten. Wenn n die Zahl der Jahre nach der ersten Kampagne ist dann müssen wir die Gleichung

$$640 = \frac{10}{0,02}(1,02^{n+1} - 1)$$

lösen.

$$\begin{aligned}
640 &= 500(1,02^{n+1} - 1) \\
1,28 &= 1,02^{n+1} - 1 \\
2,28 &= 1,02^{n+1} \\
\ln(2,28) &= (n+1)\ln(1,02) \\
\frac{\ln(2,28)}{\ln(1,02)} - 1 &= n \\
n &\approx 40,6
\end{aligned}$$

Also ist $n \approx 40,6$. Damit erreicht der Wald 40, 6 Jahre nach der ersten Kampagne die gewünschte GröSSe. Wir können also die in der Aufgabe gestellte Frage so beantworten: Es sind 41 Kampagnen nötig. Der Wald erreicht vor der Durchführung der 42-sten Kampagne die gewünschte GröSSe.

□

Beispiel 6.18. Fibonacci-Folge
Eine Kaninchenzucht wachse nach folgenden drei Gesetzen:

1. Ein geschlechtsreifes Kaninchenpaar wirft pro Monat genau ein neues Paar an Kaninchen (stets Männchen + Weibchen).

2. Ein neues Kaninchenpaar braucht zwei Monate zur Geschlechtsreife.

3. Über keinen anderen Weg kommen Kaninchen dazu oder weg.

Betrachte die Entwicklung der Zucht unter der Annahme dass diese mit einem neuen Kaninchenpaar startet.

Lösung. Natürlich vermuten wir, dass das Wachstum exponentiell ist. Zu Beginn der Zucht (Monat 1) besteht die Zucht aus 1 Pärchen. Nach einem Monat (Monat 2) ist das Pärchen noch nicht geschlechtsreif, damit ist die Zucht weiter 1 Pärchen groSS. Nach zwei Monaten (Monat 3) wirft das Pärchen ein neues Pärchen, die Zucht besteht aus zwei Pärchen. Nach drei Monaten haben wir ein geschlechtsreifes Pärchen, welches ein neues Pärchen wirft; und das im letzten Monate geborene Pärchen welches nun 1 Monat alt ist; insgesamt also 3 Pärchen. Nach vier Monaten haben wir zwei geschlechtsreife Pärchen, und damit zwei neue Pärchen, und ein ein Monat altes Pärchen, insgesamt also 5 Pärchen. Die Sache wird schnell unübersichtlich deswegen tragen wir ab jetzt die Entwicklung bis Monat 11 in einer Tabelle zusammen:

Monat	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Alter 0	1		1	1	2	3	5	8	13	21	34
Alter 1		1		1	1	2	3	5	8	13	21
Alter 2			1		1	1	2	3	5	8	13
Alter 3				1		1	1	2	3	5	8
Alter 4					1		1	1	2	3	5
Alter 5						1		1	1	2	3
Alter 6							1		1	1	2
Alter 7								1		1	1
Alter 8									1		1
Alter 9										1	
Alter 10											1
Zucht	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89

Damit ergibt sich also folgende Entwicklung der ZuchtgröSSe in Pärchen:

n (Monat)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
F_n (Zuchtpärchen)	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89

Falls die Entwicklung der Kaninchen einem exponentiellen Wachstum gehorcht dann muss F_{n+1}/F_n ein fester Wert sein

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
F_{n+1}/F_n	1,000	2,000	1,500	1,667	1,600	1,625	1,616	1,619	1,618	1,618	1,618

Wir erkennen also dass der Wert sich nach anfänglichem Schwanken auf etwa den Wert $1,618$ einzupendeln scheint. Unglücklicherweise bedeutet die anfängliche Schwankung dass das Wachstum nicht exakt exponentiell ist. Andererseits, vermuten wir aufgrund des „Einpendelns“dass ein ungefähr exponentielles Wachstum vorliegt.
Um das exakte Wachstumsgesetz zu ermitteln müssen wir also nochmals in die Tabelle *reingucken*. Betrachten wir zum Beispiel die Spalte für Monat 11, dann sehen wir dass der Teil, welcher die Kaninchen im Alter 2-10 Monaten beschreibt genau die Spalte für Monat 9 ist (vgl. rote Zahlen im Monat 9 und 11). Damit ist also nicht verwunderlich dass die Anzahl der neuen Pärchen im Monat 11 genau der Anzahl der Pärchen insgesamt im Monat 9 ist (vgl. magenta Zahlen im Monat 9 und 11). Weiter, durch Betrachten der roten der blauen Zahlen im Monat 11 und Monat 10 sehen wir dass die Population im Alter 1-10 im Monat 11 genau die volle Population im Monat 9 ist. Da aber die gesamte Population im Monat 11 aus der Pärchen im Alter 0 und der Pärchen im Alter 1-10 besteht folgt insgesamt dass:

$$F_{10} = F_9 + F_8$$

Genaueres betrachten der Tabelle liefert dass dieses Gesetz analog für alle Monate ab Monat 3 gilt und auch für alle nachfolgenden Monate gelten wird. Insgesamt

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

und zusätzlich wissen wir, dass

$$F_1 = 1; \qquad F_2 = 1$$

Falls exponentielles Wachstum für F_n so mussten wir Zahlen C und a finden, so dass

$$F_n = C \cdot a^n$$

gilt.
Offensichtlich liefert das Ansetzen dieser Formel auf die Bedingungen $F_1 = 1$ und F2 = 1, dass $C = 1$ und $a = 1$ und damit $F_n = 1$ was nicht unserem Wachstum entspricht. Das, das so nicht klappen konnte war aber klar, denn wir haben ja schon festgestellt dass am Anfang die Zucht nicht exponentiell ist.
Wir nutzen daher alleine das Gesetzt für gröSSere n also $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ und versuchen das mit dem Prototyp $F_n = C \cdot a^n$ in Einklang zu kriegen. Einsetzen der Formeln ineinander liefert

$$C \cdot a^n = C \cdot a^{n-1} + C \cdot a^{n-2}$$

nach Teilen durch $C \cdot a^{n-2}$ erhalten wir die Gleichung

$$a^2 = a + 1.$$

Das ist nun eine *wunderschöne* quadratische Gleichung und die können wir lösen. Die Gleichung liefert zwei Lösungen für den Parameter a, und zwar

$$a_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad a_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Das heiSSt wir suchen ein C_1 so, dass $F_n = C_1 a_1^n$ oder wir suchen ein C_2 so, dass $F_n = C_2 a_2^n$. Welche Lösung ist nun die richtige? Leider existiert aber sowohl kein C_1 wie auch kein C_2 so dass beide Bedingungen $F_1 = 1$ und $F_2 = 1$ gleichzeitig erfüllt sind. Damit reicht also eine Lösung alleine nicht um unser Problem zu lösen.
In unserer Verzweiflung setzen wir einfach F_n als die Summe der beiden Teilansätze an, d.h.

$$F_n = C_1\, a_1^n + C_2\, a_2^n.$$

Wenn wir diese Formel in die Bedingung $F_1 = 1$ einsetzen so erhalten wir

$$1 = F_1 = C_1 \frac{1+\sqrt{5}}{2} + C_2 \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

analog, aus $F - 2 = 1$ erhalten wir

$$1 = C_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + C_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2$$

Durch Einsetzen kann überprüft werden, dass die Werte

$$C_1 = \frac{1}{a_1 - a_2}$$
$$C_2 = -\frac{1}{a_1 - a_2}$$

die Gleichungen lösen.
Damit haben wir insgesamt die Formel

$$F_n = \frac{a_1^n - a_2^n}{a_1 - a_2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Da der Absolutbetrag des Werts $\frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0,618$ kleiner als 1 ist, wissen wir dass die Entwicklung von F_n für groSSe n von dem Term $\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$ bestimmt wird. Das heiSSt für groSSe n ist

$$F_n \approx \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \approx 0,447 \cdot 1,618^n.$$

Damit ist auch letztendlich der Fakt, dass F_{n+1}/F_n sich dem Wert $1,618$ für groSSe n nähert erklärt.
Die Zahlen F_n heiSSen Fibonacci Zahlen. □

6.4 Beispiele zum Vorbereiten

Beispiel 6.19. Im Jahre 0 hat *Mandy Cohen* (Brian's Mutter in *The life of Brian*) für ihren Sohn *Brian* ein Sparbuch bei der Bank *NeverKonkurso* eröffnet, sie hatte nur einen Cent (= 0,01 Euro) darauf einbezahlt und zu einem effektiven Fixzins[2] von 4% veranlagt.
Unglücklicherweise hat sie das Sparbuch verloren! Heute 2025 Jahre später finden **Sie** das Sparbuch und gehen zur Bank *NeverKonkurso* um es einzulösen.

- Berechnen Sie wie viel Euro Sie für das Sparbuch ausbezahlt bekommen würden.
- Ohne das Ergebnis der vorherigen Aufgabe zu *spoilern*: Wenn eine Unze Gold 2700 Euro kostet[3], eine Unze 31,1034768 g wiegt, und die gesamte Erde $5,9722 \cdot 10^{24}$kg wiegt. Wie viele Erden aus purem Gold müsste die Bank Ihnen ausbezahlen?[4]

Lösung:

[2] effektiv meint hierbei, dass keine weiteren Kontogebühren und Steuern anfallen.
[3] ca. Stand 2025
[4] Falls Sie sich fragen was dieses Beispiel in einem Skript für BiologInnen sucht: Dieser Grundgedanke ist dafür verantwortlich, dass wir das 6. Massenaussterben der **Erdgeschichte** auslösen ......

Beispiel 6.20. Um wie viel Dezibel sinkt der Schalldruckpegel bei Absenkung des Schalldrucks auf zwei Drittel des ursprünglichen Wertes?

Lösung:

Beispiel 6.21. Ein radioaktives Isotop zerfällt mit einer Halbwertszeit von 6 Minuten. Sei $m(t)$ die Masse (in Gramm) des Isotops, die zum Zeitpunkt t (in Minuten) vorhanden ist. Es gilt das Exponentialgesetz

$$m(t) = Ce^{kt}$$

- Bestimmen Sie k.
- Zum Zeitpunkt $t = 0$ sind 10 g des Isotops vorhanden. Bestimmen Sie C.

Lösung:

Beispiel 6.22. Eine Bakterienkolonie wächst exponentiell um 30% in 10 Stunden, wie lange braucht Sie um um 50% zu wachsen?

Lösung:

6.5 Weitere Beispiele zum Üben

Beispiel 6.23. Die Seismische Energie (nach Richter) eines Erdbebens mit Magnitudenstärke M_s ist gegeben durch

$$E = 10^{1{,}5 \cdot M_s + 4{,}8} \tag{6.1}$$

- Bestimmen Sie um welchen Faktor sich die Energie eines Erdbebens ändert, wenn sich die Magnitude um 2 erhöht.
- Formen Sie die Gleichung (6.1) auf M_s um.

Beispiel 6.24. Weltweit sterben derzeit täglich ca. $0,0008\,\%$ der Arten aus.
Wir nehmen vereinfacht an, dass die Aussterberate konstant bleibt.

a) Formulieren Sie ein Modell der Form $f(t) = C\,e^{\lambda \cdot t}$ welches den Artenschwund beschreibt.

b) Berechnen Sie wie viele Jahre es dauert bis nur noch die Hälfte aller Arten der Welt verbleiben.

c) Berechnen Sie wie viele Jahre es dauert bis $30\,\%$ der Arten verbleiben.

Beispiel 6.25. Im Jahr 1967 wurden bei Nowaja Semlja zahlreiche Fässer mit Atommüll aus einem sowjetischen Kernreaktor in die Barentssee gekippt. Eines der Fässer enthielt unter anderem 200 kg des Plutonium-Isotops $\mathrm{Pu}^{2}42$, das eine Halbwertszeit von 380 000 Jahren hat.

1. Durch welches Gesetz mit zwei Parametern C und k ist die zu einem Zeitpunkt t im betreffenden Fass jeweils vorhandene Menge des Isotops bestimmt?
2. Bestimmen Sie den Wert von C und berechnen Sie k.
3. Wie viele Kilogramm $\mathrm{Pu}^{2}42$ befanden sich im Vorjahr (2002) noch in diesem Fass?

Beispiel 6.26. In einem Experiment wurde eine Bakterienpopulation angesetzt, die sich in einer bestimmten Nährlösung alle 110 Minuten verdoppelt. Gegenwärtig besteht die Population aus etwa 100 000 Individuen.

1. Durch welches Gesetz mit zwei Parametern C und k lässt sich die zu einem Zeitpunkt t jeweils vorhandene Anzahl von Individuen bestimmen?
2. Bestimmen Sie den Wert von C und berechnen Sie k.
3. Welche GröSSe hatte die Population, mit der das Experiment vor 11 Stunden gestartet worden war?

Beispiel 6.27. In einem fossilen Pflanzenstück betrage der C^{14}-Anteil 6% des Anteils, der an lebenden Exemplaren beobachtet wird. Wie alt ist das Fossil? (Halbwertszeit von C^{14} ca. 5600 Jahre).

Beispiel 6.28. Bakterienkolonie wächst exponentiell. Heute um 19:00 betrug die Anzahl der Bakterien 10.000 Individuen. Die Population wächst exponentiell um 10% in 70 min. Welche Population war heute um 8:00 gegeben?

Beispiel 6.29. Im Verlauf eines Experiments vermindere sich die Masse $M(t)$ eines Isotops ausschlieSSlich durch radioaktiven Zerfall. Vom Isotop sind nach 10 Sekunden nach Beginn des Experiments bereits 10 Prozent zerfallen.

1. Berechnen Sie die Konstante k im Zerfallsgesetz $M(t) = Ce^{kt}$.
2. Zu welchem Zeitpunkt ist nur noch ein Zehntel der zu Beginn vorhandenen Masse übrig.
3. Berechnen Sie die Halbwertszeit des Isotops.

Beispiel 6.30. Messprotokoll einer Bakterienkultur:

Uhrzeit	10:00	12:00
Masse [g]	10	11

Angenommen die Masse gehorcht dem Wachstumsgesetz $M(t) = Ce^{kt}$ (t ist Zeit in Stunden gemessen):

1. Berechnen Sie die Konstante k im Wachstumsgesetz.

2. Berechnen Sie die Verdoppelungszeit der Bakterienkultur.

3. Das Experiment begann um 8:00 Uhr. Um wie viel Uhr ist die zu Beginn vorhandene Masse um 10% gewachsen?

Beispiel 6.31. Das Wachstum einer Bakterienkultur verdreifacht sich in 40,4 Stunden. Acht Tage nach Beginn des Experiments sind $2 \cdot 10^4$ Bakterien in der Kultur.
Bestimmen Sie ein Exponentialgesetz der Form $f(t) = B_0\, e^{\lambda t}$ welches das Wachstum der Bakterien beschreibt. Dabei soll B_0 die Anfangsmenge (zu Beginn des Experiments) der Bakterien sein. Wie lange dauert es bis 2 000 000 Bakterien in der Kultur sein werden?

KAPITEL

7

LINEARE REGRESSION

Anmerkung. In diesem Kapitel wollen wir Messpunkte durch Geraden approximieren. In einer x, y-Ebene wird eine Solche durch eine Gleichung der Form

$$y = kx + d$$

beschrieben.
Eine Gerade zeichnet man, indem man zwei Punkte festlegt. Zu Punkten auf der Geraden kann man auf mehrere Arten gelangen:

- Zu jedem Wert von x erhält man den passenden Wert von y, indem man in die Geradengleichung $y - kx + d$ einsetzt.
- Befindet sich $x = 0$ (also die y-Achse) auf dem Bild, erhält man insbesondere sofort den Punkt $x = 0$, $y = d$.
- Hat man einen Punkt (x, y) der Geraden gegeben, kann man mit Hilfe von k einen zweiten Punkt erhalten, indem man von x weitere h Einheiten nach rechts aufträgt, und in senkrechter Richtung von y weitere $k \cdot h$ Einheiten senkrecht aufträgt. (Die Strecke h kann man sich dabei so aussuchen, dass die Zeichnung ausreichend groSS und genau ausfällt).

7.1 Die Methode der kleinsten Quadrate

Typischerweise hat man in der Biologie Daten, die nicht exakt zu einer mathematischen Formel passen. Trotzdem wird gar nicht selten der wesentliche Zusammenhang zwischen zwei GröSSen durch eine Geradengleichung (oder auch eine komplexere Formel) treffend wiedergegeben. Wir sprechen von einem mathematischen Modell, welches die Wirklichkeit zwar nicht exakt abbildet, aber trotzdem wesentliche Aspekte gut darstellt.

Wenn ein Datensatz von Punkten $(x_1, y_1), \cdots, (x_n, y_n)$ gegeben ist, kann man eine Gerade anpassen, indem man die Parameter k und d so geschickt wählt, dass die Gerade möglichst gut zu den Punkten passt. Man spricht von Parameteranpassung. Weil aber die Daten normalerweise nicht exakt auf einer Geraden leben, muss auch die beste Anpassung mit einem gewissen Fehler auskommen. Ein MaSS für den Anpassungsfehler ist der quadratische Fehler:

Definition 7.1. An einen Datensatz$(x_1, y_1), \cdots, (x_n, y_n)$ soll eine Gerade $y = kx + d$ angepasst werden. Der quadratische Fehler wird folgendermaSSen definiert:

- An jedem Datenpunkt errechnet sich der Einzelfehler als die Differenz des Wertes y_i aus dem Datensatz und des Wertes $\hat{y}_i = kx_i + d$, den die Gerade vorhersagt:

$$e_1 = y_i - \hat{y}_i \quad \text{mit} \quad \hat{y}_i = kx_i + d$$

- Der quadratische Fehler ist die Quadratsumme der Einzelfehler.

$$E = e_1^2 + \cdots + e_n^2$$

Die Methode der kleinsten Quadrate bestimmt jene Parameter k, d, für die der quadratische Fehler am kleinsten ausfällt.
Wird eine Gerade nach der Methode der kleinsten Quadrate an Datenpunkte angepasst, spricht man von der Regressionsgeraden.

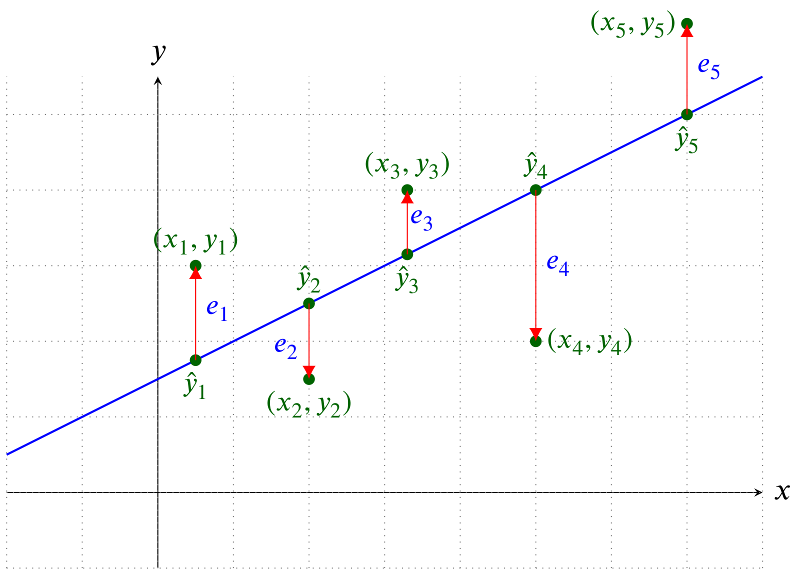


Abbildung 7.1: Einzelfehler bei Anpassung einer Gerade

Den quadratischen Fehler und die Methode der kleinsten Quadrate gibt es natürlich auch für kompliziertere Modelle als nur die Gerade. Komplexere Modelle passt man mit Hilfe von Computerprogrammen an. Für die Gerade lernen wir dagegen ein Verfahren kennen, das mit Bleistift und Papier nachgerechnet werden kann.

7.2 Berechnung der Regressionsgeraden

Algorithmus 7.2. Gegeben sei ein Satz von n Datenpunkten:

x	x_1	x_2	$\dots$	x_n
y	y_1	y_2	$\dots$	y_n

Zu bestimmen sind Parameter k, d, für welche die Gerade $kx + d$ die Datenpunkte am besten wiedergibt. Nach der Methode der kleinsten Quadrate sind folgende Schritte durchzuführen:

1. Erstellen Sie eine Tabelle mit den Werten i, x_i, y_i, x_i^2, $x_i y_i$ und bestimmen Sie den Wert von n.

2. Summieren Sie die Spalten der Tabelle und dividieren Sie durch den Stichprobenumfang n:

$$\begin{aligned} \overline{x} &= \frac{1}{n}\left(x_1 + \cdots + x_n\right), \\ \overline{y} &= \frac{1}{n}\left(y_1 + \cdots + y_n\right), \\ S_{xx} &= \frac{1}{n}\left(x_1^2 + \cdots + x_n^2\right), \\ S_{xy} &= \frac{1}{n}\left(x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n\right). \end{aligned}$$

   Beachten Sie, $\overline{x}$ und $\overline{y}$ sind die Mittelwerte von x und y.

3. Die Parameter der Regressionsgerade bekommt man dann durch:

$$\begin{aligned} k &= \frac{S_{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{S_{xx} - \overline{x} \cdot \overline{x}} \\ d &= \overline{y} - k\overline{x} \end{aligned}$$

Beispiel 7.3. Berechnen Sie die Regressionsgerade und das BestimmtheitsmaSS der Daten

x	0	1	2	3	4
y	1	1	2	6	5

Lösung. Wir führen der Algorithmus 7.2 Schritt für Schritt aus (wenn Sie fortgeschritten sind, könnnen Sie natürlich mehrere Schritte auf einmal lösen):

1. Wir erstellen eine Tabelle mit den Datenpunkten:

Index i	x	y	x^2	xy
1	0	1		
2	1	1		
3	2	2		
4	3	6		
$n = 5$	4	5		
Summe durch 5				

2. Nun können wir die Werte der Spalten berechnen, dann die Summen der Spalten bilden und schlieSSlich erhalten wir die Mittelwerte indem wir durch $n = 5$ dividieren:

Index i	x	y	x^2	xy
1	0	1	0	0
2	1	1	1	1
3	2	2	4	4
4	3	6	9	18
$n = 5$	4	5	16	20
Summe	10	15	30	43
durch 5	2	3	6	8,6

3. Damit können wir die Werte der Regressionsgerade berechnen, wobei

$$\overline{x} = 2; \quad \overline{y} = 3; \quad S_{xx} = 6; \quad S_{xy} = 8,6$$

gilt, somit:

$$k = \frac{8,6 - 2 \cdot 3}{6 - 2 \cdot 2} = 1,3$$
$$d = 3 - 1,3 \cdot 2 = 0,4$$

Damit erhalten wir die Regressionsgerade als

$$y = 1,3\,x + 0,4$$

Wir können nun natürlich die Gerade mit den Datenpunkten zeichnen:

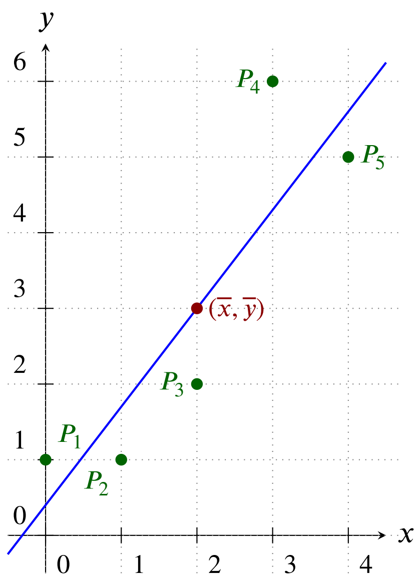


Abbildung 7.2: Einzelfehler bei Anpassung einer Gerade

□

Fakt 7.4. Eine gute Regression durch eine Gerade ist dann erreicht, wenn die Punkte teils über, teils unter der Geraden liegen, als wären sie zufällig um die Gerade verstreut. Nicht alle Datensätze passen gut zu einer Geraden. Die Regressionsgerade ist die bestmögliche Lösung, aber nicht immer gut. Weiter geht die Gerade immer durch den Punkt $(\overline{x}, \overline{y})$.

Anmerkung 7.5. Für den Algorithmus 7.2 ist die Reihenfolge der Datenpunkte vollkommen irrelevant. Also ob im Beispiel 7.3 das Punktepaar $(0, 1)$ an erster Stelle steht oder erst später in der Liste vorkommt verändert das Resultat nicht. **Wichtig** bleibt natürlich, dass man die Wertepaare (x_i, y_i) zusammen lässt, also:

x	0	1	2	3	4
y	1	1	2	6	5

(a) Originale der Tabelle

x	2	1	0	3	4
y	2	1	1	6	5

(b) Umordnung der Tabelle → OK

x	0	1	2	3	4
y	2	1	1	6	5

(c) Umordnung der Tabelle → FALSCH

Abbildung 7.3: Umordnung der Wertetabelle

7.2.1 BestimmtheitsmaSS der Linearen Regression

Anmerkung 7.6. Die lineare Regression ist *verführerisch* anzuwenden, sie ist einfach umzusetzen und ist in sehr vielen Fällen eine gute Wahl um ein Messresultat in ein Mathematisches Model *umzuformulieren*.
Jedoch muss man beachten, dass nicht jedes Beobachtung einem linearen Zusammenhang hat. Um zu ermitteln, ob man einen linearen Zusammenhang anwenden kann ist es notwendig den Fehler der Regression abzuschätzen und zu interpretieren.

Definition 7.7. Das BestimmtheitsmaSS eines Datensatzes

x	x_1	x_2	$\dots$	x_n
y	y_1	y_2	$\dots$	y_n

ist definiert als

$$r^2 = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \overline{y}\right)\left(x_i - \overline{x}\right)\right)^2}{\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \overline{x}\right)^2 \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \overline{y}\right)^2}.$$

Anmerkung 7.8. Für das BestimmtheitsmaSS gilt $0 \leq r^2 \leq 1$, wobei gilt, dass, je näher r^2 bei 1 ist, desto besser ist approximiert die Gerade den Datensatz. Ein Wert $r^2 = 0$ würde bedeuten, dass x und y vollkommen nicht korrelierend sind und $r^2 = 1$ bedeutet, dass die Wertepaare (x_i, y_i) genau auf der Geraden liegen.

Algorithmus 7.9. Gegeben sei ein Satz von n Datenpunkten:

x	x_1	x_2	$\dots$	x_n
y	y_1	y_2	$\dots$	y_n

Zu bestimmen ist r^2, welche die *Güte* der Regressionsgerade $kx + d$ die Datenpunkte besten beschreibt. Folgende Schritte sind durchzuführen

1. Erstellen Sie eine Tabelle mit den Werten i, x_i, $x_i - \overline{x}$, $y_i - \overline{y}$, $(y_i - \overline{y})(x_i - \overline{x})$, $(x_i - \overline{x})^2$, $(y_i - \overline{y})^2$, und bestimmen Sie den Wert von n.

2. Bestimmen Sie die Mittelwerte $\overline{x}$ und $\overline{y}$ indem Sie ersten beiden Spalten summieren und anschlieSSend durch n dividieren.
$$\overline{x} = \frac{1}{n}\left(x_1 + \cdots + x_n\right),$$
$$\overline{y} = \frac{1}{n}\left(y_1 + \cdots + y_n\right).$$

3. Bestimmen Sie die Werte der letzten 3 Spalten, summieren diese
$$R_{xy} = (y_1 - \overline{y})(x_0 - \overline{x}) + \cdots + (y_n - \overline{y})(x_n - \overline{x})$$
$$R_{xx} = (x_1 - \overline{x})^2 + \cdots + (x_n - \overline{x})^2$$
$$R_{yy} = (y_1 - \overline{y})^2 + \cdots + (y_n - \overline{y})^2$$

4. Das BestimmtheismaSS ist dann
$$r^2 = \frac{R_{xy}^2}{R_{xx} \cdot R_{yy}}$$

Beispiel 7.10. Wir wollen zum Beispiel 7.3 das Bestimmtheitsmass berechnen, die Wertetabelle ist

x	0	1	2	3	4
y	1	1	2	6	5

Lösung.

1. Wir erstellen zuerst die Tabelle mit den Datenpunkten, und bestimmen die Mittelwerte:

Index i	x	y	$x_i - \overline{x}$	$y_i - \overline{y}$	$(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})$	$(x_i - \overline{x})^2$	$(y_i - \overline{y})^2$
1	0	1					
2	1	1					
3	2	2					
4	3	6					
$n = 5$	4	5					
Summe	10	15	-	-			
durch 5	2	3	-	-	-	-	-

2. Nun können wir zuerst die Spalten mit den Differenzen bilden, und anschlieSSend die Spalten der Produkte :

Index i	x	y	$x_i - \overline{x}$	$y_i - \overline{y}$	$(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})$	$(x_i - \overline{x})^2$	$(y_i - \overline{y})^2$
1	0	1	-2	-2	4	4	4
2	1	1	-1	-2	2	1	4
3	2	2	0	-1	0	0	1
4	3	6	1	3	3	1	9
$n = 5$	4	5	2	2	4	4	4
Summe	10	15	-	-			
durch 5	2	3	-	-	-	-	-

3. Nun können wir Summen der letzten Spalten bilden um die gesuchten Werte zu erhalten:

Index i	x	y	$x_i - \overline{x}$	$y_i - \overline{y}$	$(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})$	$(x_i - \overline{x})^2$	$(y_i - \overline{y})^2$
1	0	1	-2	-2	4	4	4
2	1	1	-1	-2	2	1	4
3	2	2	0	-1	0	0	1
4	3	6	1	3	3	1	9
$n = 5$	4	5	2	2	4	4	4
Summe	10	15	-	-	13	10	22
durch 5	2	3	-	-	-	-	-

4. Und schlieSSlich erhält man das BestimmtheismaSS mit

$$R_{xy} = 13; \qquad R_{xx} = 10; \qquad R_{yy} = 22$$

als

$$r^2 = \frac{13^2}{10 \cdot 22} = 0,7682$$

□

Anmerkung 7.11. Als Beispiel für eine problematische Anwendung der Regression und des BestimmtheitsmaSS betrachten wir folgende Abbildung:

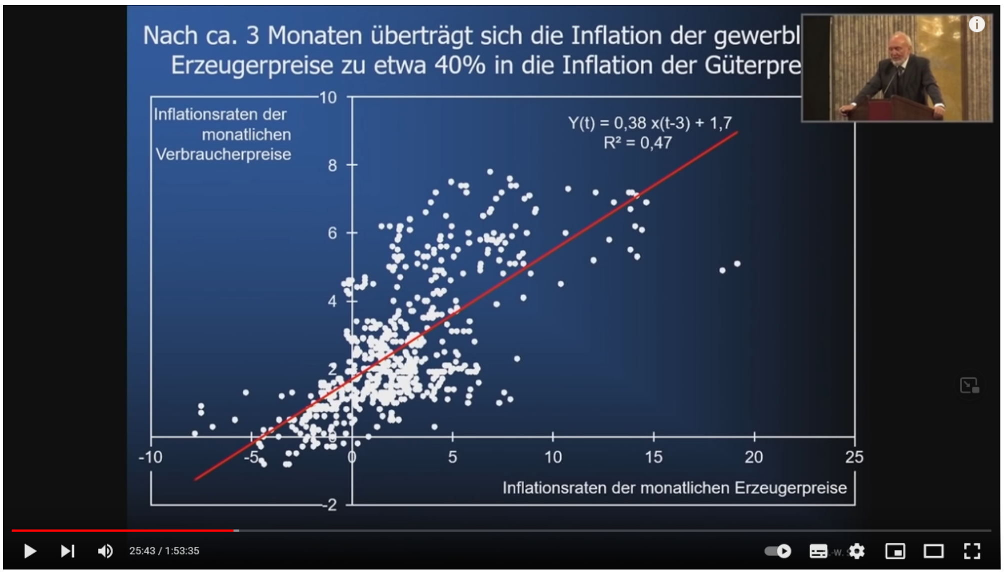


Abbildung 7.4: Problematische Anwendung der Regression und des BestimmtheitsmaSS [3]

Wichtig: Man muss das BestimmheitsmaSS mit *Vorsicht* verwenden, es zeigt lediglich an wie die *Qualität* der linearen Approximation ist, jedoch sagt es nichts darüber aus ob wirklich eine lineare *Kausalität* vorliegt. In dieser Präsentation wird der Zusammenhang zwischen zwei GröSSen formuliert, die schlicht und einfach nicht zusammenhängen müssen. Wenn Sie sich bei einem Modell nicht sicher sind ob ein linearer Zusammenhang vorhanden ist und Ihr BestimmheitsmaSS unter $0,9$ liegen sollte (in diesem Beispiel gerade einmal $0,47$) so ist es fraglich ob wirklich ein lineares Modell anwendbar ist. Falls möglich führen Sie mehr Messungen durch und überprüfen erneut die Bestimmtheit. Alternativ können Sie versuchen eine andere Form der Regression anzuwenden, die wir (leider) in dieser VU nicht besprechen werden.

Und schlieSSlich kann man natürlich den Algorithmus 7.2 und den Algorithmus 7.9 in einer groSSen Tabelle vereinen, wenn man beide Berechnungen durchführen möchte.

7.2.2 Regression einer Exponentialfunktion und Potenzfunktion

Anmerkung 7.12. Man kann die lineare Regression auch auf ein exponentielles Modell und Potenz Modell anwenden indem man folgende *einfache* Umformung mithilfe des Logarithmus durchführt:

Exponentialgesetz

$$\begin{aligned}
B(t) &= B_0\, e^{\lambda t} \\
\ln(B(t)) &= \ln\left(B_0\, e^{\lambda t}\right) \\
\ln(B(t)) &= \ln\left(B_0\right) + \ln\left(e^{\lambda t}\right) \\
\ln(B(t)) &= \ln\left(B_0\right) + \lambda t \\
\ln(B(t)) &= \lambda t + \ln\left(B_0\right)
\end{aligned}$$

Potenzgesetz

$$\begin{aligned}
C(t) &= C_0 \cdot t^{\lambda} \\
\ln(C(t)) &= \ln\left(C_0 \cdot t^{\lambda}\right) \\
\ln(C(t)) &= \ln\left(C_0\right) + \ln\left(t^{\lambda}\right) \\
\ln(C(t)) &= \ln\left(C_0\right) + \lambda \ln(t) \\
\ln(C(t)) &= \lambda \ln(t) + \ln\left(C_0\right)
\end{aligned}$$

Nun können wir eine Beobachtung über die Veränderlichen ($B(t)$, $C(t)$ und t) machen: Beim Exponentialgesetz steht die Veränderliche links im Logarithmus und rechts *ohne Umrechnung* da, beim Potenzgesetz steht die Veränderliche links und rechts im Logarithmus, **jedoch** haben beide Formeln Ähnlichkeit zu einer Geradengleichung:

Exponentialgesetz

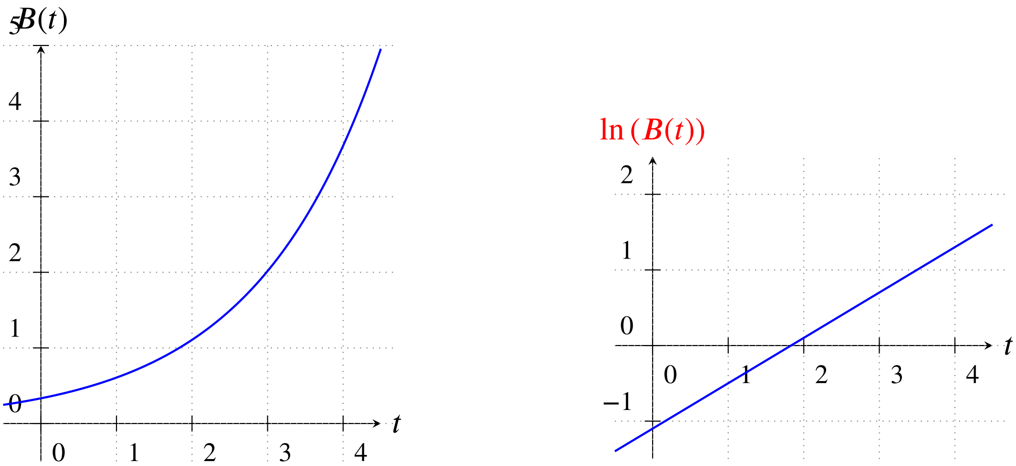
$$\begin{aligned}
\ln(B(t)) &= \lambda\, t + \ln\left(B_0\right) \\
y &= k\, x + d \\
&\Rightarrow \begin{cases} k = \lambda \\ d = \ln\left(B_0\right) \end{cases}
\end{aligned}$$

Potenzgesetz

$$\begin{aligned}
\ln(C(t)) &= \lambda \ln(t) + \ln\left(C_0\right) \\
y &= k\, x + d \\
&\Rightarrow \begin{cases} k = \lambda \\ d = \ln\left(C_0\right) \end{cases}
\end{aligned}$$

Damit erkennen wir insbesondere, dass, wenn wir das Exponentialgesetz semilogarithmisch betrachten (nur die Veränderliche der linke Seite hat nen Logarithmus) und das Potenzgesetz doppellogarithmisch betrachten (die Veränderlichen links und rechts haben Logarithmen) so können wir im der Semi bzw. doppellogarithmischen Darstellung die Regression durchführen, und anschlieSSend auf die GröSSen λ und B_0 bzw. λ und C_0 schlieSSen. Der Logarithmus ist (in $\mathbb{R}$) nur für positive Zahlen definiert, daher können wir diese Umrechnung für das Potenzgesetz natürlich nur für positive t durchführen.

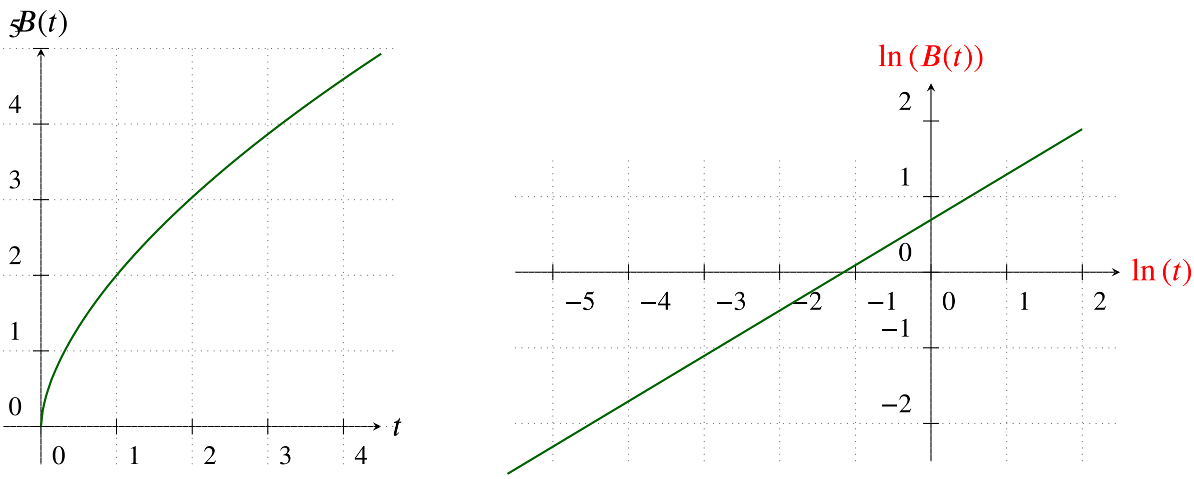
Wichtig: Bitte beachten Sie, die Rechnung für die Exponentialfunktion klappt nur so wenn wir den natürlichen Logarithmus anwenden.
Das Exponentialgesetz in der Form $B(t) = B_0 \cdot a^{\lambda t}$ mit $a > 1$ behandelt man ebenso, wenn man statt der natürlichen Logarithmen den Logarithmus zur Basis a ($\equiv \log_a(\cdot)$) nimmt.
Für das Potenzgesetz ist es irrelevant welchen Logarithmus Sie verwenden, **jedoch müssen** Sie beim Umrechnen von $k = \log\left(C_0\right)$ den Logarithmus verwenden, den Sie zum Umrechnen benutzt haben!
Die Abbildung 7.5 zeigt Ihnen anhand eines Beispiels, wie sich die Darstellung einer Exponentialfunktion ändert, wenn man diese in ein Semilogarithmisches Diagramm überträgt.
Die Abbildung 7.6 zeigt Ihnen anhand eines Beispiels, wie sich die Darstellung einer Potenzfunktion ändert, wenn man diese in ein Doppellogarithmisches Diagramm überträgt.



(a) Exponentialfunktion
$B(t) = \frac{1}{3} \cdot e^{0{,}6\,t}$

(b) Exponentialfunktion
$\ln(B(t)) = 0{,}6\,t + \ln\left(\frac{1}{3}\right)$

Abbildung 7.5: Darstellung Exponentialfunktion normal und semilogarithmisch



(a) Potenzfunktion
$B(t) = 2 \cdot t^{0{,}6}$

(b) Potenzfunktion
$\ln(B(t)) = 0{,}6\,\ln(t) + \ln(2)$

Abbildung 7.6: Darstellung Potenzfunktion normal und doppellogarithmisch

Wir wollen noch kurz einige Begriffe zusammenfassen, die wir hierbei brauchen bzw. gebraucht haben.

Definition 7.13. Ein **(semi-)logarithmisches Diagramm** der GröSSe u über t erstellt man, indem man waagrecht die Werte von t, und senkrecht die Werte von $\ln(u)$ oder $\log_{10}(u)$ aufträgt. Ein **doppelt logarithmisches Diagramm** der GröSSe u über t erstellt man, indem man waagrecht die Werte von $\ln(t)$ oder $\log_{10}(t)$, und senkrecht die Werte von $\ln(u)$ oder $\log_{10}(u)$ aufträgt.

Fakt 7.14. Die GröSSe $u(t)$ erfüllt genau dann ein *Exponentialgesetz*: $u(t) = C\,e^{kt}$
wenn im logarithmischen Diagramm eine Gerade entsteht: $\ln(u(t)) = k\,t + d$.
Dabei ist k die Steigung der Geraden (dasselbe k wie im Exponentialgesetz), und $d = \ln(C)$ der Achsenabschnitt der Geraden an der senkrechten Achse

Fakt 7.15. Die GröSSe $u(t)$ erfüllt genau dann ein *Potenzgesetz*: $u(t) = C\,t^k$
wenn im doppel logarithmischen Diagramm eine Gerade entsteht: $\ln(u(t)) = k\,\ln(t) + d$. Dabei ist k die Steigung der Geraden (dasselbe k wie im Exponentialgesetz), und $d = \ln(C)$ der Achsenabschnitt der Geraden an der senkrechten Achse

Beispiel 7.16. Passen die folgenden Daten eher zu einem Exponentialgesetz oder einem Potenzgesetz?

t	1	3	5	7	9
u	5	14	33	102	255

Lösung. Um zu untersuchen welches Gesetz besser *passt*, rechnen wir die Werte zuerst in semi- und dann doppellogarithmisch um.

Index i	t	u	$y = \ln(u)$	t^2	ty
1	1	2	1,61		
2	3	14	2,64		
3	5	33	3,50		
4	7	102	4,62		
5	9	255	5,54		
Summe					
durch 5					

(a) Exponentialgesetz

Index i	t	u	$x = \ln(t)$	$y = \ln(u)$	x^2	xy
1	1	2	0,00	1,61		
2	3	14	1,10	2,64		
3	5	33	1,61	3,50		
4	7	102	1,95	4,62		
5	9	255	2,20	5,54		
Summe						
durch 5						

(b) Potenzgesetz

Nun bilden wir die Regressionsgeraden für die Semilogarithmische Darstellung bezüglich der Daten $(t, y) = (t, \ln(u))$ und in für die Doppellogarithmische Darstellung bezüglich der Daten $(x, y) = (\ln(t), \ln(u))$

Index i	t	u	$y = \ln(u)$	t^2	ty
1	1	2	1,61	1	1,61
2	3	14	2,64	9	7,92
3	5	33	3,50	25	17,48
4	7	102	4,62	49	32,37
5	9	255	5,54	81	49,87
Summe	25		17,91	165,00	109,26
durch 5	5		3,58	33,00	21,85

(a) Exponentialgesetz

Index i	t	u	$x = \ln(t)$	$y = \ln(u)$	x^2	xy
1	1	2	0,00	1,61	0,00	0,00
2	3	14	1,10	2,64	1,21	2,90
3	5	33	1,61	3,50	2,59	5,63
4	7	102	1,95	4,62	3,79	9,00
5	9	255	2,20	5,54	4,83	12,18
Summe			6,85	17,91	12,41	29,70
durch 5			1,37	3,58	2,48	5,94

(b) Potenzgesetz

Nun können wir die Werte der Regressionsgeraden bestimmen:

$$k = \frac{21,85 - 5 \cdot 3,58}{33,00 - 5 \cdot 5} \approx 0,4925$$
$$d = 3,58 - 0,4925 \cdot 5 \approx 1,1199$$
$$C = e^d = e^{1,1199} \approx 3,06$$

(a) Exponentialgesetz

$$k = \frac{5,94 - 1,37 \cdot 3,58}{2,48 - 1,37 \cdot 1,37} \approx 1,7062$$
$$d = 3,58 - 1,7062 \cdot 1,37 \approx 1,2444$$
$$C = e^d = e^{1,2444} \approx 3,47$$

(b) Potenzgesetz

Mit diesen Werten erhalten wir nun die Regressionsgeraden und die Modelle als:

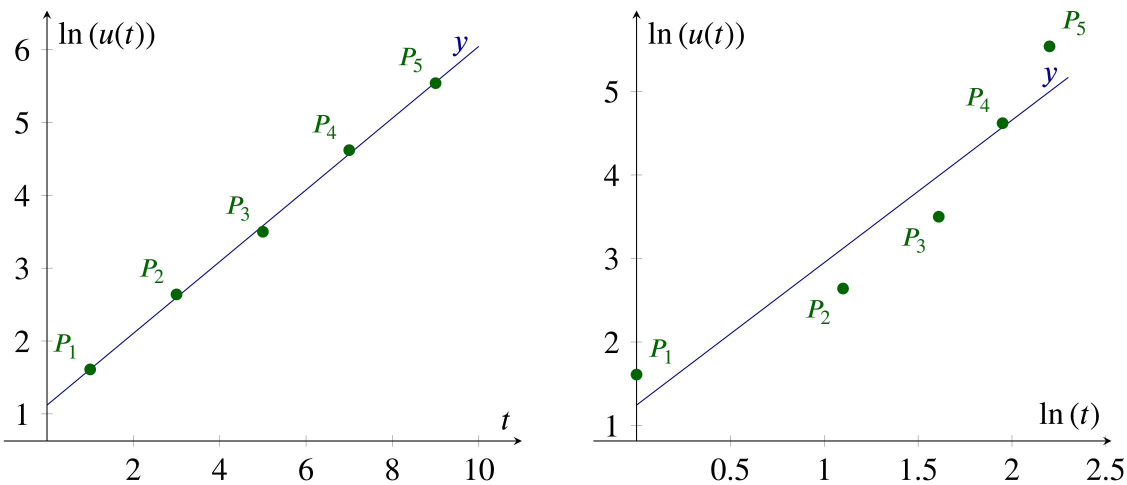
$$y = 0,4925 \cdot t + 1,1199$$
$$u(t) = 3,06 \cdot e^{0,4925 \cdot t}$$

(a) Exponentialgesetz

$$y = 1,7062 \cdot t + 1,2444$$
$$u(t) = 3,47 \cdot t^{1,7062}$$

(b) Potenzgesetz

Vergleichen wir nun unsere Resultate:

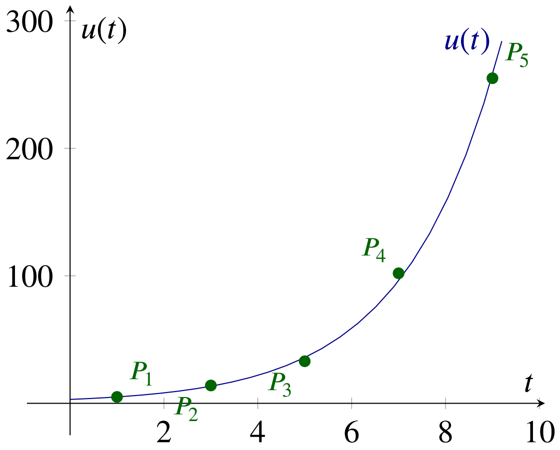


(a) Exponentialgesetz
$y = 0,4925 \cdot t + 1,1199$

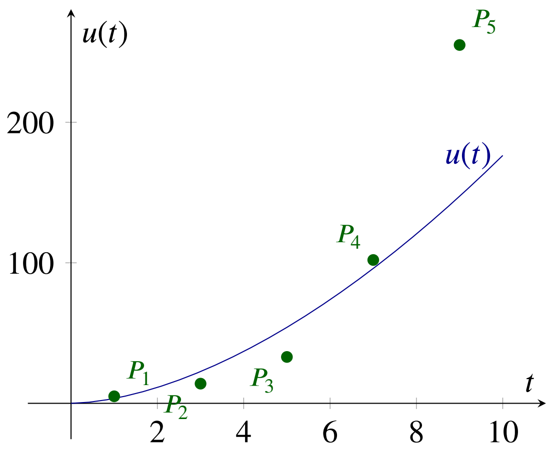
(b) Potenzgesetz
$y = 1,7062 \cdot t + 1,2444$

Abbildung 7.11: Logarithmische Darstellung Regressionsgeraden mit Datenpunkten

Wir können bereits in den logarithmischen Darstellungen 7.11a und 7.11b erkennen, dass die Punkte $P_1, \dots, P_5$ in der semi-logarithmischen Darstellung 7.11a eine Gerade bilden, jedoch in der doppellogarithmischen Darstellung 7.11b eine Gerade schlecht approximieren.



(a) Exponentialgesetz
$u(t) = 3,06 \cdot e^{0,4925 \cdot t}$



(b) Potenzgesetz
$u(t) = 3,47 \cdot t^{1,7062}$

Abbildung 7.12: Modelle mit Datenpunkten

SchlieSSlich sieht man in den Modellen 7.12, dass die Exponentialfunktion die Punkte wesentlich besser wiedergibt. $\square$

7.3 Beispiele zum Vorbereiten

Beispiel 7.17. Berechnen Sie die Regressionsgerade der Daten

x	$2,3$	$3,1$	$1,3$	$8,1$	$0,3$
y	$-2,2$	$-1,5$	$-3,7$	$4,7$	-5

Lösung:

Beispiel 7.18. Gegeben Sei die folgende Tabelle der Körpermasse und des stündlichen Sauerstoffverbrauches verschiedener Tierarten

Art	Körpermasse kg	O_2 Verbrauch l/h
Spitzmaus	$0,0048$	$0,0355$
Maus	$0,025$	$0,042$
Katze	$2,5$	$1,7$
Schaf	$42,7$	$9,59$
Elefant	3833	268

Gibt es einen Potenzzusammenhang zwischen Masse m und Sauerstoffverbrauch v

$$v = Cm^k?$$

Bestimmen Sie die Regression und urteilen Sie.

Lösung:

Beispiel 7.19. Folgende Grafik zeigt den *Living-Planet-Index*,

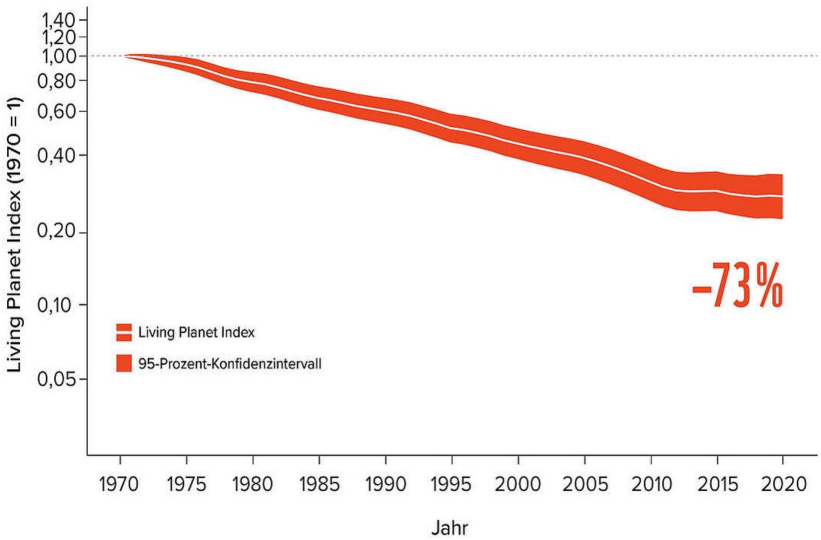


Abbildung 7.13: Living-Planet-Index des WWF [6]

dieser ist ein MaSS für die Biodiversität auf der Erde. Welchen Schluss können Sie aus dieser Grafik ziehen? Wie können Sie sich erklären, warum das *Konfidenzintervall* gröSSer wird[1]?

Lösung:

[1] Insbesondere, da sich die Messtechniken ja verbessert haben.

7.4 Weitere Beispiele zum Üben

Beispiel 7.20. Berechnen Sie die Regressionsgerade $y = k \; + d$ zu

x	1	4	7	10
y	2	5,3	6,9	10,7

Zeichnen Sie die Datenpunkte und die Gerade.

Beispiel 7.21. Die Konzentration eines radioaktiven Stoffes in einer Lösung wurde zu 6 aufeinanderfolgenden Zeitpunkten gemessen.

Zeit t	0	1	2	3	4	5
Konzentration $u(t)$	8	5	3	1	0,6	0,4

Zur Bestimmung des Exponentialgesetzes für die Konzentration $u(t)$ zur Zeit t:

$$u = C\,e^{kt}$$

- Zeichnen Sie ein logarithmisches Diagramm und überzeugen Sie sich, dass ein Exponentialgesetz einigermaSSen gut passt.
- Bestimmen Sie die Parameter der Regressionsgeraden aus dem logarithmischen Diagramm.
- Bestimmen Sie daraus k und C für das Exponentialgesetz.

Beispiel 7.22. Bei einer Horde von Westlichen Flachlandgorilla (*Gorilla gorilla gorilla*[2]) wurde folgende Charakteristik für täglichen Nahrungsbedarf beobachtet:

Gewicht [kg]	100	120	170	200
tägl. Nahrung [kg]	12	15	17	25

1. Es wird folgender Zusammenhang angenommen:

   $$\text{tägl. Nahrung} = k \cdot \text{Gewicht} + d.$$

   Bestimme k und d mithilfe der linearen Ausgleichsrechnung.

2. Zeichnen Sie die Datenpunkte und die Ausgleichsgerade. Wählen Sie die Einheiten so dass 100 kg Gewicht bzw. 10 kg Nahrung je mindestens 5 cm entsprechen.

3. Der Zoo von San Diego hat ein Gorilla-Exemplar mit einem Gewicht von 275 kg. Welcher tägliche Nahrungsbedarf ist bei diesem Tier zu erwarten?

Beispiel 7.23. Berechnen Sie zu folgenden Daten eine angepasste Exponentialfunktion $y = C\,e^{k\,t}$:

t	-1	0	1	1,5
y	1	2	3	4

[2] Mal ohne *ScheiSS*: Das ist echt der wissenschaftliche Name.

KAPITEL

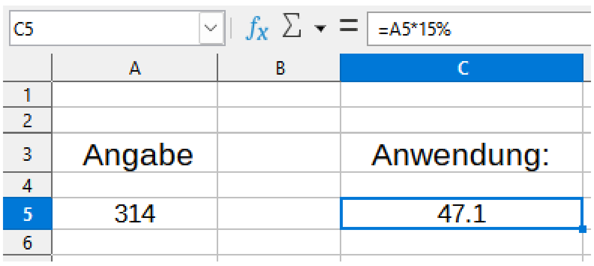
8

LIBRE OFFICE CALC

8.1 Elementare Berechnungen

Es gibt (natürlich) viele Computerprogramme mit deren Hilfe man Berechnungen vereinfachen und effizienter gestalten kann. Wir wollen hier anhand von LibreOffice Calc (oder *Excel*) zeigen wie man dies umsetzten kann.

Um in LibreOffice Calc Berechnungen durchzuführen sollte man zuerst verstehen, dass man immer in Referenz auf eine Zelle arbeitet.
Um zum Beispiel 15% von 315 zu berechnen kann man einfach $= 315 * 15\%$ in eine Zelle eingeben.



Achten Sie auch darauf, dass man Zahlen durch verweisen (in diesem Beispiel $= A5$) verwenden kann **bzw.** auch so verwenden **soll**! Es funktionieren natürlich die Rechenoperationen wie Addition/Subtraktion/Multiplikation/Division wie zu erwarten mit den Üblichen Tasten (Operatoren) auf den Nummernfeld.

8.2 Verweisen und wiederverwenden von Resultaten

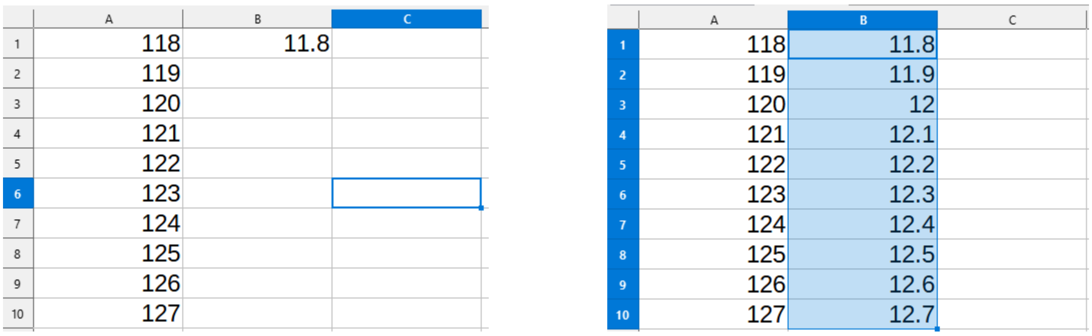
LibreOffice Calc ist **nur** dann sinnvoll verwendet wenn man Eingaben von Zahlen minimiert und

möglichst immer versucht mit Referenzen auf Zellen zu arbeiten. Zur Demonstration wollen wir 17% von 118 berechnen lassen:

(a) Zellenwerte durch Verweisen berechnen

(b) Berechnete Werte

Häufig möchte man Zellen *automatisiert* wiederverwenden. Wenn Sie nun die Zelle A1 markieren und auf die **rechte untere Ecke** der Umrahmung der Zelle klicken, können Sie den Wert in die Nachbarzellen *update-en* lassen.



(a) Zahlen werden um 1 erhöht

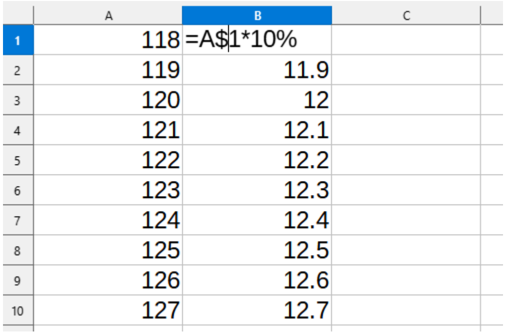
(b) Formeln werden entsprechend Zeile/Spalte angepasst.

In Spalte A wird jeder Wert um 1 erhöht (default), in Spalte B wird hingegen die Formel in der ersten Zeile so geändert, dass der Verweis auf A1 in der ersten Zeile zu A2 in der zweiten Zeile wird. Damit kann man die Formel unmittelbar auf die nächsten Zeilen anpassen. Das funktioniert in gleicher Form für die Spalten, nur dass dann aus A1 die Zelle B1 wird.

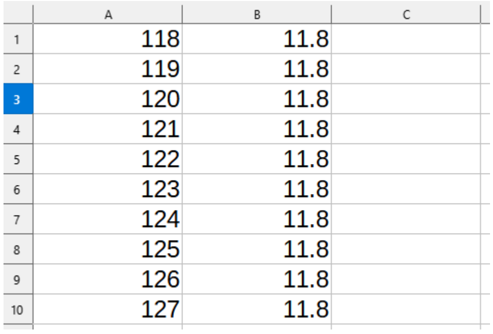
In vielen Fällen möchte man einzelne Zellen beim *Ziehen* fixieren. Um das zu erreichen, dann man die Zeile bzw. Spalte fixieren lassen:

- **A1** Zeile und Spalte können verändert werden.
- **A$1** Zeile ist fixiert, Spalte kann verändert werden.
- **$A1** Zeile kann verändert werden, Spalte ist fixiert.
- **A1** Zeile und Spalte ist fixiert.

Wenn man im obigen Beispiel die Formel von A1 auf A$1 ändert, so wird beim *Ziehen* immer auf den Wert in A1 verwiesen:



(a) Veränderte Formel

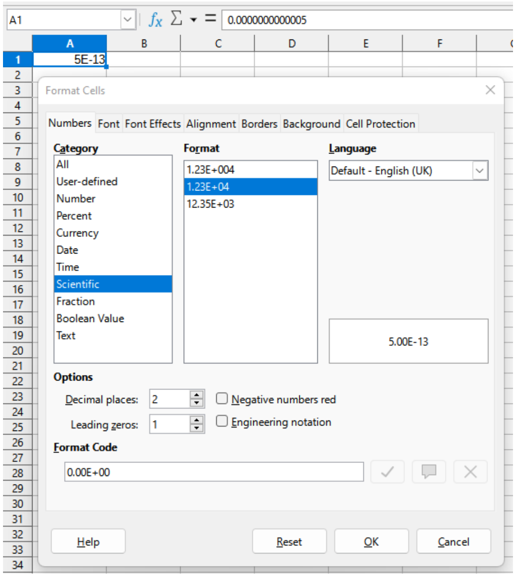


(b) Nach dem *Ziehen*

In vielen Fällen möchte man einzelne Zellen beim *Ziehen* fixieren.
Beachten Sie: Man kann auf unterschiedliche *Sheets* in LibreOffice Calc verweisen, wenn Sie mehr als eines in der Datei haben (Sheets sind ganz unten im Screen).

8.3 Zellen Formatieren

Wenn man eine oder mehrere Zellen markiert, diese mit der rechten Maustaste anklickt, so kann man unter *Zellen formatieren* ein hilfreiches Menü finden. Unter anderem kann man Zahlen angepasst darstellen lassen. **Die Technische Notation:** Zum Beispiel können Sie die Darstellung der Zehnerpotenzen in LibreOffice Calc einstellen. Aktiviert man die *Engineering notation* so bekommt man unmittelbar die technische Notation als Ausgabe.

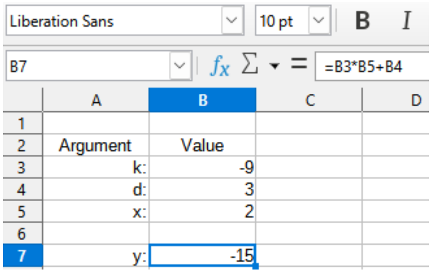


8.4 Gleichungen lösen

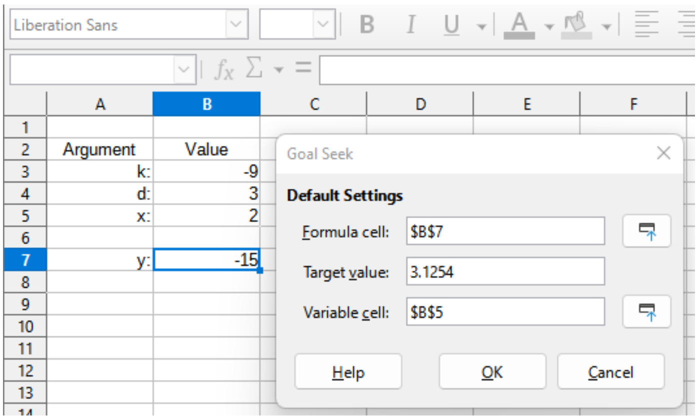
Simple Gleichungslösungssysteme sind in vielen Programmen integriert, so auch in LibreOffice Calc. Wir betrachten eine einfache lineare Gleichung:

$$y = -9\,x + 3$$

Und wollen diese für einen gesuchten Wert lösen.



Nun können wir in dieser Form die Gleichung für jedes x berechnen lassen, wir wollen die Gleichung jedoch lösen. Um dies zu tun, können Sie unter: *Tools* → *Goal-Seek* (auf Deutsch: Zielwertsuche) die Gleichung lösen lassen:



Hierfür müssen Sie in der ersten Zeile *Formula cell* die Zelle angeben in der Sie die Gleichung formuliert haben, in der zweiten Zeile *Target value* jenen Wert den Sie für y haben wollen und in der Zeile *Variable cell* die Zelle der Formel die veränderlich ist (bei uns das x).
Wir haben in diesem Beispiel den Zielwert als $3,1254$ gewählt und das System liefert uns, dass $x = -0,0139\dot{3}$ sein muss.

8.5 Exponential und Logarithmusfunktion

Die Darstellung von Funktionen ist in den Wissenschaften eine tägliche *Notwendigkeit*, dies kann man natürlich auch mit LibreOffice Calc.
Man kann das System bei einer grafischen Darstellung unmittelbar auf eine Logarithmische Darstellung umstellen lassen. Schreiben Sie dafür die x-Werte der Funktion in eine Spalte, und daneben die zugehörigen Bildwerte (y-Werte) und markieren dann beide Spalten. Unter `Insert` → `Chart` können Sie eine Grafische Darstellung einbinden, wählen Sie dann `X-Y-(Scatter)`. (Achtung: NICHT `Line` wählen!).
Mit einem Doppelklick auf die y-Achse erscheint ein Eigenschaftsfenster, worin Sie unter Scale eine Logarithmische Darstellung wählen können (vgl. 8.5).

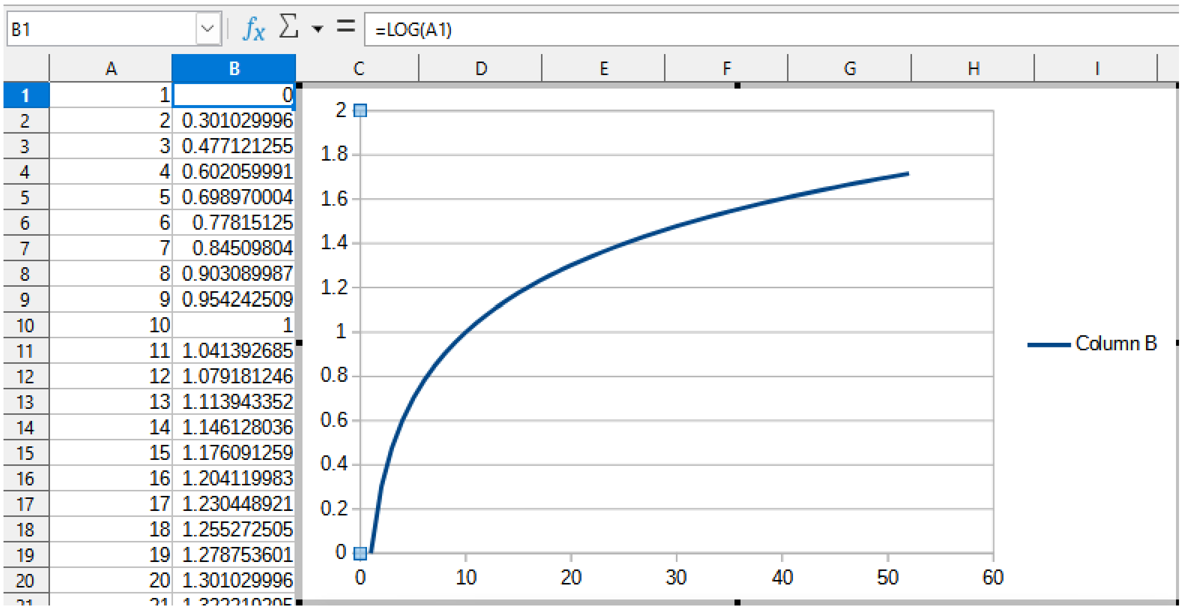


Abbildung 8.4: Funktionen zeichnen mit Libre-Office

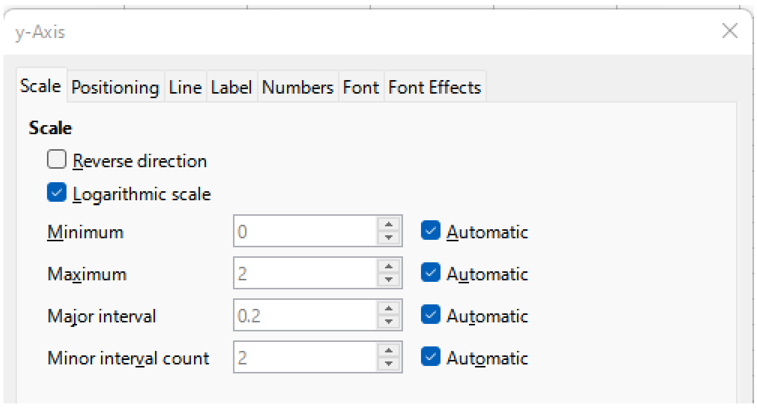


Abbildung 8.5: Logarithmische Scalen mit Libre-Office

8.6 Lineare Regression

Die Regression ist eine *Standardrechnung*, welche sich in fast allen Mathematischen Computerprogrammen wiederfindet, so auch in LibreOffice Calc.

Beispiel 8.1. Bestimmen Sie die Exponentielle Regression durch die Datenpunkte der Aufgabe 7.16:

t	1	3	5	7	9
u	5	14	33	102	255

Lösung. Um dies zu tun überträgt man die Datenpunkte in zwei Spalten eines LibreOffice Calc sheets. AnschlieSSend, markiert man beide Spalten → Insert → Chart → $X - Y$ (Scatter) → Nur Punkte wählen.

Dies fügt eine Grafik der Datenpunkte ein, anschlieSSend markiert man einen Datenpunkt → **rechte Maustaste** auf den Datenpunkt → Insert Trend Line.
Dort kann man verschiedene Regressionen wählen, insbesondere Können wir eine Exponentialfunktion einfügen:

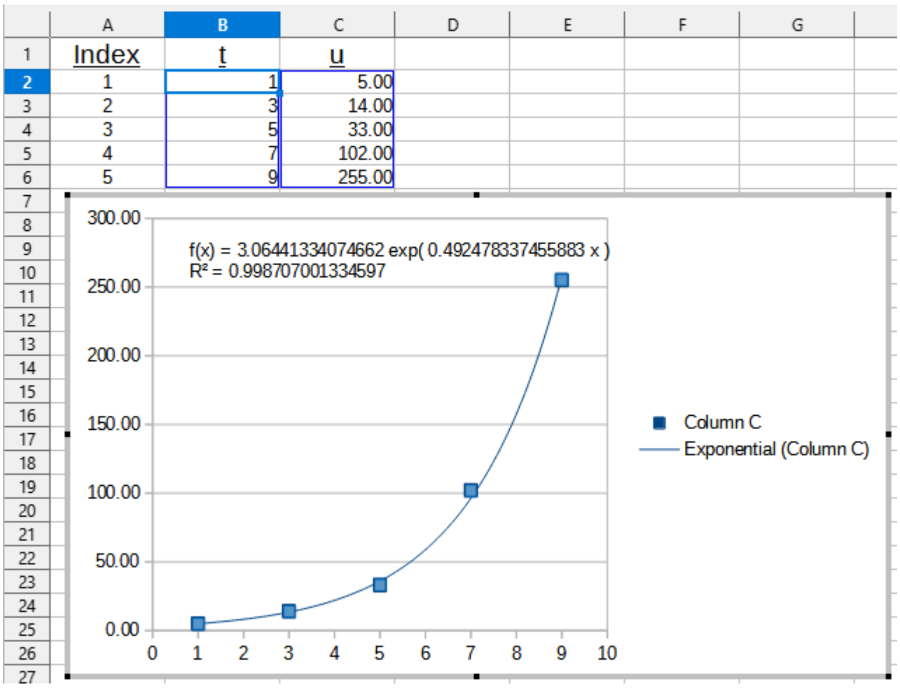


Abbildung 8.6: Modell mit Datenpunkten

□

8.7 Befehle

Für die hier angeführten Berechnungen haben wir folgende Befehle verwendet:

=	Beginn einer Berechnung
%	Prozent (Hunderstel) der Zahl
`LN`	natürlicher Logarithmus ln()
`LOG10`	dekadischer Logarithmus $\log_{10}$
`LOG`	Logarithmus zu beliebiger Basis, wobei der zweite Input Parameter die Basis ist.
`EXP`	Eulersche Funktion (z.B.: =EXP(3)→ e^3
∧	Hochzahl eingeben, z.B. = 10∧4 → 10^4.

Eine Übersicht über die möglichen Funktionen finden Sie unter *Insert* ⟶ *Function* finden. Dort ist auch eine kurze Beschreibung der Befehle angeführt.

8.7.1 Marcos

Aktivieren und Aufzeichnen

Bei häufigem verwenden von LibreOffice Calc ist es sinnvoll zu versuchen immer wiederkehrende Arbeitsschritte zu *automatisieren*. Hierfür sind Macros **äuSSerst** nützlich. Um Macros zu verwenden müssen Sie zuerst erlauben, dass *experimentelle* Operationen ausgeführt werden können.
Gehen Sie hierfür auf *Tools* → *Options* → im Abschnitt *Libre Office* → *Advanced*. Hier sind beide Optionen, *record Macro* und *Use experimental Functions* zu aktivieren.
Nach den Neustart können Sie nun unter *Tools* → *Macros* → *Record Macro* ein Macro aufnehmen.
Alle Schritte die Sie nun ausführen werden gespeichert. Wenn Sie mit Ihrem Arbeitsablauf fertig sind klicken Sie auf *Stop Recording*, und vergeben Sie im erscheinenden Fenster Ihrem Macro einen Namen.
Wenn Sie nun die Arbeitsschritte, die Sie aufgezeichnet haben, erneut ausführen wollen, so müssen Sie nur unter *Tools* → *Macros* → *Run Macros* ihr Macro wählen, und es werden alle Schritte erneut ausgeführt.
Langfristig geht's aber noch besser: Sie können Ihr Macro auf eine Tastenkombination legen: *Tools* → *Customise* → *Keyboard*. Hier wählen Sie eine Tastenkombination, welche **noch nicht** belegt ist. Im Abschnitt *Category* wählen Sie nun das von Ihnen erstellte Macro und weisen es der Tastenkombination zu.
Wenn Sie nun die Tastenkombination verwenden, werden alle Arbeitsschritte, welche Sie aufgezeichnet haben, unmittelbar ausgeführt.

Eigene Macro Funktionen

Häufig möchte man eigene Macrofunktionen schreiben, welche man mit einem = in einer Zelle aufrufen kann.
Gehen Sie hierfür unter *Tools* → *Macros* → *Organize Macros*, und wählen Sie *Basic*.
Nun können Sie wählen wo das Macro gespeichert werden soll, wählen Sie *New* und fügen Sie das Macro der Datei hinzu.
Nun öffnet sich ein Editor, in dem Man Source-Code schreiben kann. Sie können folgenden Code:

```
Function AddiereZahlen(a As Double, b As Double) As Double
        AddiereZahlen = a + b
End Function
```

einfügen. Wenn Sie nun in irgendeine Zelle Ihres Dokuments klicken und *=AddiereZahlen(10,15)* eintippen, so wird die Summe von 10 und 15 in der Zelle berechnet werden.

8.8 Beispiele zum Vorbereiten

Beispiel 8.2. Sie benötigen 250 ml eine Cyanwasserstoff Lösung mit einer Konzentration von $0,2\,\mathrm{mg/l}$. Ihnen stehen hierfür eine Lösung A mit einer Konzentration von $0,05\,\mathrm{mg/l}$ und B mit $0,02\,\mathrm{mg/ml}$ zur Verfügung.

Verwenden Sie LibreOffice Calc um Volumina der Lösungen A und B zu bestimmen welche vermengt die gesuchte Lösung ergeben.

Beispiel 8.3. Wir betrachten folgende Gleichungen

$$y = \frac{2 + x^2}{x - 1}$$

Verwenden Sie LibreOffice Calc um all jene x zu bestimmen für die y die Werte 5, 18 und 10^5 annimmt.

Beispiel 8.4. Erstellen Sie ein `Macro`, welches die Zahlendarstellung in einer Zelle

- Horizontal und Vertikal zentriert
- Nur zwei Nachkommastellen darstellen lässt.
- Die Hintergrundfarbe auf `Grün` ändert
- Und der Zelle einen Rahmen verpasst.

Belegen Sie nun eine Tastenkombination, welche Ihr `Macro` ausführt.

Beispiel 8.5. Die folgenden Punkte (x, y)

x	-1	1	2	3	4
y	2	7	13	24	44

liegen in der Nähe einer Exponentialfunktion

$$f(x) = C\, e^{kx}, \quad C > 0.$$

Verwenden Sie das passende (logarithmische oder doppelt logarithmische) Diagramm und berechnen Sie dort die lineare Regressionsgerade, aus der Sie dann eine gute Approximation der Parameter C und k von f herleiten.
Vergleichen Sie Ihr Resultat mit dem Resultat aus der Option *Trendlinie* eines Diagramms.

8.9 Weitere Beispiele zum Üben

Beispiel 8.6. Erstellen Sie ein LibreOffice Calc **Sheet**[1] und lösen die Aufgabe 2.23 erneut. Vergleichen Sie Ihr *per Hand* berechnetes Ergebnis mit der Excel-Lösung (Sie sollten natürlich gleich sein).
Zusatzaufgabe: Gestalten Sie Ihre Lösung so, dass diese auch *ansehnlich* ist.[2].

[1]Sie können natürlich auch Microsoft Excel verwenden. Sollten Sie Apple Numbers verwenden wollen, so achten Sie bei der **Abgabe von Übungen** darauf, dass Sie die Datei konvertieren, sodass die Funktionen auch bei Excel und LibreOffice funktionieren, da Apple zu Apple zwar super funktioniert, jedoch ist das Softwaredesign von Apple leider vollkommen inkompatibel mit anderen Systemen!

[2]Wenn Sie Zellen markieren, anschlieSSend mit der rechten Maustaste darauf klicken können Sie unter *Zellen Formatieren* (bzw. auf Englisch sprachlichen Systemen *Format Cells*) die Zellen gestalten: Rahmen, Hintergrundfarbe, Textfarbe etc.

Beispiel 8.7. Erstellen Sie ein **Sheet** um die Mischungsrechnung umzusetzen. Erstellen Sie die Tabelle so, dass Sie unmittelbar benötigten Volumina nicht bekannt sind, jedoch die Konzentrationen bekannt sein müssen um Aufgabe 1.8 effizienter lösen zu können.
Lösen Sie die Aufgabe erneut, jedoch mit folgenden geänderten Angaben:

1. Lösung A: 8 mol/l, Lösung B: 22 mol/l, Gemisch: 150ml mit 17 mol/l Konzentration.
   Ergebnis:
   $$A = \dots\dots\dots \mathrm{l}$$
   $$B = \dots\dots\dots \mathrm{l}$$

2. Lösung A: 1,25 mol/l, Lösung B: 33,77 mol/l, Gemisch: 1,586l mit 25,2 mol/l Konzentration.
   Ergebnis:
   $$A = \dots\dots\dots \mathrm{l}$$
   $$B = \dots\dots\dots \mathrm{l}$$

3. Lösung A: 58 mol/l, Lösung B: 5 mol/l, Gemisch: 153875l mit 57,68 mol/l Konzentration.
   Ergebnis:
   $$A = \dots\dots\dots \mathrm{l}$$
   $$B = \dots\dots\dots \mathrm{l}$$

4. Lösung A: 10 mol/l, Lösung B: 50 mol/l, Gemisch: 3,5l mit 65 mol/l Konzentration.
   Ergebnis:
   $$A = \dots\dots\dots \mathrm{l}$$
   $$B = \dots\dots\dots \mathrm{l}$$

   Zusatzaufgabe: Bei diesem Beispiel sollte bei Ihrer Lösung etwas sonderbar sein! Lassen Sie automatisch markieren, dass bei solchen Lösungen etwas nicht funktioniert.[3]

Beispiel 8.8. Wir betrachten folgende Gleichungen

$$y = 7\,x + 9; \quad y = \frac{3 - x}{x + 5}$$

Verwenden Sie LibreOffice Calc um all jene x zu bestimmen für die y die Werte $-2, -1$ und $0,5$ annimmt.

[3] Hinweis: Unter Zellen Formatieren gibt es eine Option. Sie können es auch gerne anders umsetzen.

Beispiel 8.9. Stickoxide sind sehr wirksam in der Blutdruckregulation. In einem pharmakologischen Experiment zerfällt eine organische Substanz Y spontan, wobei NO abgegeben wird. Es wird vermutet, dass es sich um eine Reaktion erster Ordnung handelt. Wenn das der Fall ist, musste die Konzentration $u(t)$ des Stoffes Y (in μmol/l) zum Zeitpunkt t (in Sekunden) einem Exponentialgesetz genügen:

$$u(t) = C\, e^{k\, t}$$

Die folgende Tabelle gibt die Messwerte alle 100 Sekunden nach Beginn der Reaktion wieder. Kann ein Exponentialgesetz passen?

t	1	100	200	300	400	500	600	700	800	900
$u(t)$	$9,968$	$7,4$	$5,6$	$3,9$	$2,9$	$2,0$	$1,5$	$1,0$	$0,8$	$0,6$

Verwenden Sie LibreOffice Calc um die Daten zusammen mit einer Regression als Exponential und Potenzfunktion darzustellen.

KAPITEL

9

DIMENSIONEN UND EINHEITEN TEIL A

Anmerkung 9.1. In der Praxis ist es oftmals wichtig zu **verstehen**, welche Eigenschaften einer Variable *anhaften*. Sie stellen Sich zum Beispiel die Frage, welche Einheit das Ergebnis einer Rechnung haben muss, wenn die Messwerte, die Sie messen, anders sind als in der Gleichung angegeben.
Als *einfachstes* Beispiel betrachten wir die Rechteckfläche, in der Formel

$$A = a \cdot b$$

kennen Sie die Seite a als $0,75\,\mathrm{m}$, und sie verwenden für b die Einheit cm. In diesem Zusammenhang ist die Problemstellung noch *leicht* lösbar, Sie müssen *einfach* umrechnen.
Schwieriger wird es schon wenn Sie *Sievert* messen, welche sich als Wert in einer Gleichung befindet, wie zum Beispiel:

$$E = \sum_T w_t \sum_R w_R \, D_{T,R}$$

worin Gewichtungsfaktoren w_T, w_R sind und die Absorbtionsdosen $D_{T,R}$ vorkommen. Der Zusammenhang der Einheiten ist in dieser Formel markant schwieriger zu erkennen.

Um nun zu verstehen, wie sich Einheiten analysieren lassen, und welchen Einfluss abweichende Einheiten auf das Ergebnis haben, beschäftigen wir uns mit der Dimensionsanalyse.

9.1 Dimensionen, Einheiten und das SI-System

Definition 9.2. Die *Dimension* einer GröSSe gibt an, welche Art von Objekt diese GröSSe beschreibt: Länge, Masse, Kraft, Stromstärke, usw. Ein System von MaSSeinheiten weist jeder Dimension eine passende MaSSeinheit zu.

Diese etwas abstrakte Definition wird klarer, wenn wir das SI-Einheitensystem vorstellen:

Definition 9.3. Das SI-Einheitensystem baut auf folgenden Dimensionen auf, welchen folgende Einheiten zugewiesen werden:

	Dimension		Einheit
L	Länge	m	Meter
T	Zeit	s	Sekunde
M	Masse	kg	Kilogramm
Θ	Temperatur	K	Kelvin
I	Stromstärke	A	Ampere
n	Teilchenzahl	mol	Mol
	Lichtstärke	cd	Candela

Anmerkung 9.4. Die anderen Dimensionen werden auf die Grunddimensionen des SI-Systems 9.3 zurückgeführt, und daraus ihre Einheiten abgeleitet, und zwar nach folgender Regel: Werden GröSSen miteinander multipliziert (durch einander dividiert), so werden auch die entsprechenden Dimensionen und Einheiten multipliziert (dividiert).
Wir zeigen im folgenden Beispiel, wie die wichtigsten mechanischen GröSSen auf die Grunddimensionen zurückgeführt werden.

Beispiel 9.5. Tabelle der wichtigsten mechanischen GröSSen:

Dimension	Ableitung aus Grunddimensionen			Name der Einheit	
	Formel	Dimension	Einheit		
Geschwindigkeit	Weg/Zeit	LT^{-1}	$\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$		
Beschleunigung	Geschwindigkeit / Zeit	LT^{-2}	$\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$		
Kraft	Masse × Beschleunigung	MLT^{-2}	$\frac{\mathrm{kg\,m}}{\mathrm{s}^2}$	N	Newton
Arbeit	Kraft × Weg	ML^2T^{-2}	$\frac{\mathrm{kg\,m}^2}{\mathrm{s}^2}$	J	Joule
Leistung	Arbeit/Zeit	ML^2T^{-3}	$\frac{\mathrm{kg\,m}^2}{\mathrm{s}^3}$	W	Watt
Fläche	Länge × Länge	L^2	m^2		
Volumen	Länge × Länge × Länge	L^3	m^3		
Druck	Kraft / Fläche	$ML^{-1}T^{-2}$	$\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m\,s}^2}$	Pa	Pascal

Anmerkung 9.6. Beachten Sie, wir kümmern uns in diesem Kapitel **nicht** darum wie groSSe der numerische Wert vor der Einheit ist, wir sind *ausschlieSSlich* an den Einheiten interessiert. Folgendes Beispiel erscheint auf den ersten Blick *simple*, aber beachten Sie, wir wollen die Einheiten verstehen lernen!

Beispiel 9.7. Ein Rechteck hat die Seitenlängen 1 m und 40 cm. Wie groSS ist der Umfang, welche Dimension hat der Umfang, welche Einheit hat der Umfang?

Lösung.

- Nun, der Umfang eines Rechtecks sollte noch für alle *schaffbar* sein:

$$U = 2 \cdot a + 2 \cdot b = 2 \cdot 1\,\mathrm{m} + 2 \cdot 40\,\mathrm{cm} = 2\,\mathrm{m} + 80\,\mathrm{cm}$$

Beachten Sie, dass diese Rechnung **sinnvoll** ist, denn wir addieren am Ende **die selbe Dimension**, eine Länge L. Wir dürfen die Addition der Zahlenwerte jedoch noch nicht ausführen, da die Einheiten unterschiedlich sind, dies lässt sich *einfach* lösen:

$$U = 2\,\mathrm{m} + 0,8\mathrm{m} = 2,8\,\mathrm{m}$$

Wir erkennen also, dass der Unterschied von Dimension zu Einheit jener ist, dass die Dimension entscheidend ist, ob eine Rechnung *Sinn* ergibt. Es ist also sinnvoll Lichtjahre zu Nanometer zu addieren, es wäre jedoch *nonsens* Lichtjahre und Minuten zu addieren. Die Einheiten müssen nur gleich sein, wenn man die Addition/Subtraktion der Werte explizit ausführen möchte.

- Die Dimension lässt sich aus den Einheiten ablesen: $U = 2,8\,\mathrm{m}$, es handelt sich also um eine Länge L.
- Die Einheit lässt sich unmittelbar aus dem Ergebnis ablesen: Meter m (beachten Sie: die Einheit ist **nicht** $2,8\,\mathrm{m}$)

□

Anmerkung 9.8. Beachten Sie, es ist Unsinn, zu behaupten, eine GröSSe habe die Einheit 5 Meter.

Beispiel 9.9. Die physikalische GröSSe W sei definiert durch

$$W = V \cdot p$$

worin V ein Volumen und p ein Druck ist. Welche Einheit hat W?

Lösung.

GröSSe	Dimension	Einheit
Druck	$ML^{-1}T^{-2}$	$\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m\,s^2}}$
Volumen	L^3	m^3
Druck × Volumen	$ML^{-1}T^{-2} \times L^3 = ML^2T^{-2}$	$\frac{\mathrm{kg\,m^2}}{\mathrm{s^2}}$

Das ist die Dimension der Arbeit, die Einheit ist ein Joule. Physikalisch ist das leicht zu verstehen: Wenn ein Volumen gegen einen Druck weiter verdichtet wird, wird Arbeit geleistet. □

Beispiel 9.10. Welche Dimension hat das Verhältnis der Länge der Diagonale zur Seitenlänge eines Quadrates?

Lösung. Das Verhältnis entsteht durch Division der Diagonalenlänge durch die Seitenlänge, die Dimension ist also $\frac{L}{L} = 1$. Das ist eine dimensionslose GröSSe. □

Definition 9.11. Eine GröSSe, in deren Dimension sich alle Dimensionen der GrundgröSSen gegenseitig wegkürzen, sodass nur 1 bleibt, heiSSt eine dimensionslose GröSSe, und wir schreiben 1 für die Dimension.

9.2 Rechenregeln für dimensionierte GröSSen

Anmerkung 9.12. Soll ein mathematischer Ausdruck eine sinnvolle (physikalische, biologische, ...) Interpretation besitzen, müssen die Dimensionen der GröSSen in passender Beziehung zueinander stehen. Zum Beispiel darf nicht eine Fläche mit einer Länge gleich gesetzt werden, oder man darf zu einer Masse nur eine andere Masse, und keine Stromstärke addieren. Einen Ausdruck, in dem die Dimensionen in passender Beziehung miteinander stehen, nennt man homogen in der Dimension:

Definition 9.13. Ein Ausdruck, der dimensionierte GröSSen enthält, heiSSt homogen in der Dimension, wenn folgende Regeln erfüllt sind:

$=$ Auf der linken und rechten Seite einer Gleichung stehen GröSSen mit der gleichen Dimension.

$\pm$ Nur GröSSen mit der gleichen Dimension dürfen zueinander addiert oder voneinander subtrahiert werden. Die Summe (die Differenz) hat dann dieselbe Dimension wie jeder der Summanden.

$\times$ GröSSen beliebiger Dimension dürfen miteinander multipliziert oder durcheinander dividiert werden. Die Dimension des Produktes (Quotienten) ist dann das Produkt (der Quotient) der Dimensionen der einzelnen Faktoren.

$\int$ GröSSen beliebiger Dimension dürfen über Variablen beliebiger Dimension integriert oder nach Variablen beliebiger Dimension differenziert werden. Die Dimension des Integrals ist das Produkt der Dimension des Integranden und der Variablen, über die integriert wird. Die Dimension der Ableitung ist der Quotient aus der abgeleiteten GröSSe durch die Variable, nach der differenziert wird.

f In Winkelfunktionen, Exponentialfunktion, Logarithmus (und die meisten anderen Funktionen, die nicht direkt durch Grundrechnungsarten geschrieben werden können) dürfen nur dimensionslose GröSSen eingesetzt werden. Das Ergebnis der Funktion ist ebenfalls dimensionslos.

Diese Regeln können lassen sich in folgender Tabelle zusammenfassen:

Fakt 9.14. In der folgenden Tabelle bedeuten $x,\ y,\ z$ dimensionierte GröSSen, und $[x],\ [y],\ [z]$ ihre Dimensionen. Es gilt:

Regel Nr.	Ausdruck	Zusammenhang der Dimensionen	Bedingung: nur erlaubt wenn
1:	$x = y$	$[x] = [y]$	$[x] = [y]$
2: 3:	$z = x + y$ $z = x - y$	$[z] = [x] = [y]$ $[z] = [x] = [y]$	$[x] = [y]$ $[x] = [y]$
4: 5: 6:	$z = x \cdot y$ $z = x/y$ $z = x^m$	$[z] = [x] \cdot [y]$ $[z] = [x]/[y]$ $[z] = [x]^m$	 m ganz, dimensionslos
7: 8:	$z = \int y \mathrm{d}x$ $z = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$	$[z] = [y] \cdot [x]$ $[z] = [y]/[x]$	
9: 10: 11:	$z = f(x)$ $f(x) = a^x, \log_a(x)$ $\sin(x)$ oder ähnliches	$[z] = 1$	$[x] = 1$

Anmerkung 9.15. Wenn man mathematische Modelle für physikalische, biologische und andere Vorgänge entwickelt, ist es eine gute Probe, die Homogenität in der Dimension zu überprüfen. Wenn einer der Ausdrücke nicht homogen in der Dimension ist, hat man bei der Entwicklung der Formel einen Fehler gemacht.

Beispiel 9.16. Das Schlagvolumen V_S der linken Herzkammer ist das Blutvolumen, das die Kammer mit einem einzigen Schlag transportiert. Das enddiastolische Volumen V_D ist das Volumen, zu dem die Herzkammer am Ende der Diastole, also bei Beendigung der Entspannungs- und Fullphase, aufgefüllt ist. Je stärker die Kammer angefüllt ist, desto straffer sind die Muskeln vorgedehnt, und desto effizienter arbeiten sie beim gesunden Herzen. Desto gröSSer ist also auch das Schlagvolumen. Andererseits kämpft der Herzschlag gegen den Druck P_A in der Aorta an. Je höher also der Druck in der Aorta, desto geringer das Schlagvolumen. In der Herzphysiologie hat sich das Frank-Starlingsche Gesetz als gute Näherung der tatsächlichen Sachverhalte bewährt:

$$V_S = S\frac{V_D}{P_A}$$

Dabei ist S, die sogenannte Kontraktilität, eine Konstante, die den allgemeinen Zustand (Gesundheit und Muskelkraft, Stärke der nervösen Anregung) des Herzens beschreibt.
Die beiden Volumina sind in m^3 gegeben, der Druck in Pascal $Pa = kgm^{-1}s^{-2}$.
Welche Einheit hat die Kontraktilität S?

Lösung. Ein *einfaches* Beispiel, denn es kommen nur Multiplikationen und Divisionen vor, und die geschehen mit den Einheiten genauso wie mit den GröSSen selbst. Wir wollen **nur** Einheiten betrachten:

$$\begin{aligned}
& V_S = S\frac{V_D}{P_A} & \\
\Rightarrow \quad & [V_S] = \left[S\frac{V_D}{P_A}\right] & \quad | \text{ wegen Regel Nr. 1} \\
\Rightarrow \quad & [V_S] = [S]\,\frac{[V_D]}{[P_A]} & \quad | \text{ wegen Regel Nr. 3 und 4}
\end{aligned}$$

Nun haben wir eine Gleichung mit **Einheiten** (keine Zahlwerte) in der **nur** noch Multiplikationen, Divisionen und Hochzahlen vorkommen (hier ist jeder Exponent 1). In dieser Situation gibt es zwei Möglichkeiten die Einheit von S zu bestimmen:

1. Wir setzen alle Einheiten ein, die wir bereits kennen:

$$\begin{aligned} [V_S] &= [S]\,\frac{[V_D]}{[P_A]} \\ \Rightarrow \qquad m^3 &= [S]\,\frac{m^3}{kg\, m^{-1}\, s^{-2}} \end{aligned}$$

   Nun kann man erkennen, dass S die Einheit

$$[S] = \frac{kg}{m\, s^2}$$

   haben muss, damit die Gleichung stimmt.

2. Wenn man die Einheiten in einer Form hat, in der **keine** Additionen, Subtraktionen und Funktionen (z.B. e^x) vorkommen, darf man vorgehen wie beim *normalen* Formelumformen. Aber Achtung: Es handelt sich nicht um Formelumformen! Wir versuchen Einheiten und Dimensionen zu analysieren:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \qquad [V_S] &= [S]\,\frac{[V_D]}{[P_A]} \\ \Rightarrow \qquad [V_S]\cdot[P_A] &= [S]\cdot[V_D] \\ \Rightarrow \qquad \frac{[V_S]\cdot[P_A]}{[V_D]} &= [S] \end{aligned}$$

   Und nun können wir die bekannten Einheiten einsetzten:

$$[S] = \frac{m^3 \cdot \frac{kg}{m\, s^2}}{m^3} = \frac{kg}{m\, s^2}$$

□

Beispiel 9.17. Häufige Fehlerquellen! Ein Rechteck hat den Umfang U (Einheit Meter) und die erste Seitenlänge a in Metern. Welche Einheit hat die zweite Seitenlänge b?

Lösung. Wir wissen natürlich bereits, dass die zweite Seitenlänge in Meter gemessen wird (vgl. Beispiel 9.7). Wir wollen uns dennoch folgende *Dimensionsanalysen* ansehen:

Typische Fehler:

$$U = 2a + 2b \qquad \text{Wir wollen Dimensionen analysieren} \tag{9.1}$$

$$[U] = [2a] + [2b] \qquad 2a \text{ und } 2b \text{ haben natürlich dieselben Einheiten wie } a \text{ und } b. \tag{9.2}$$

$$[U] = [a] + [b] \qquad \text{Die Einheit von } U \text{ und } a \text{ sind laut Angabe je Meter.} \tag{9.3}$$

$$m = m + [b] \qquad \text{Subtrahiere auf beiden Seiten Meter!} \tag{9.4}$$

$$0 = [b] \qquad \text{Subtrahiere auf beiden Seiten Meter!} \tag{9.5}$$

Also ist die Einheit von $b \ldots\ldots 0$??!!??
Hierbei sind gleich zwei elementare Dinge falsch angewendet worden: Zum Einen in (9.2) wurde die Dimensions-Klammer *einfach* auf die Summe aufgeteilt! Wenn Sie die Tabelle 9.14 genauer betrachten, so können Sie sehen, dass man diesen Schluss **NICHT** ziehen darf.
Zum Anderen wurde in (9.4) $m - m$ als Dimension gleich 0 gesetzt, was *natürlich* falsch ist.
Selbst beim Berechnen von Werten (was wir hier **nicht** tun) wäre die Rechnung: $1\,m - 1\,m = 0\,m$ was **noch immer** die Einheit Meter hat!
Dimensionen bestimmen ist ein anderer Vorgang als Gleichungen lösen. Die Regel für Addition und Subtraktion ist: Alle Summanden und Summe (bzw. Differenz) haben dieselbe Dimension.

Richtige Analyse:

$$\begin{aligned} U &= 2a + 2b \\ [U] &= [a] = [b] && \text{Wegen Regel Nr. 2} \\ m &= m = [b] \end{aligned}$$

Weitere typische Fehler:

$$U = 2a + 2b \qquad U \text{ und } a \text{ sind je in Meter gegeben!} \tag{9.6}$$

$$m = 2\,m + 2\,[b] \qquad \text{Wir subtrahieren } 2m! \tag{9.7}$$

$$-m = 2\,[b] \qquad \text{Division durch 2} \tag{9.8}$$

$$-\frac{1}{2}m = [b] \tag{9.9}$$

Das ist *natürlich* falsch, zu behaupten die **Dimension** wäre $-\frac{1}{2}m$. Hierbei sind wiederum zwei Fehler passiert. In (9.7) wurde den Einheiten ein Zahlwert zugewiesen, bei der Dimensionsanalyse spielen die Zahlwerte jedoch überhaupt keine Rolle! In (9.8) wurde wiederum wie im vorangegangenen Beispiel die Einheit subtrahiert.

□

9.3 Beispiele zum Vorbereiten

Beispiel 9.18. Der Winddrucks kann über die Gleichung

$$W_D = c_P \frac{\rho}{2} v^2$$

bestimmt werden. Der Winddruck W_D ist in $\mathrm{N/m^2}$, die Geschwindigkeit v in $\mathrm{m/s}$ und ρ die Luftdichte in $\mathrm{kg/m^3}$ gegeben. Welche Einheit hat c_P?
Hinweis: $\mathrm{N} = \frac{\mathrm{kg\,m}}{\mathrm{s^2}}$.

Lösung:

Beispiel 9.19. Der Scheinwiderstand in einer Parallelschaltung kann durch die Formel

$$Z = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R_C^2} + \frac{1}{X_C^2}}}$$

bestimmt werden, worin Z ein Widerstand in Ohm ($\equiv [\Omega]$) ist. Bestimmen Sie die Einheiten von R_C und X_C.

Lösung:

9.4 Weitere Beispiele zum Üben

Beispiel 9.20. Die Zentripetalkraft wird bestimmt durch

$$F_{zp} = -m\,\omega^2\,r$$

worin m die Masse in kg, r der Radius der Kreisbahn in m und F_{zp} die Kraft in N ist. Welche Einheit hat die Winkelgeschwindigkeit ω?

Beispiel 9.21. Der Elastizitätsmodul E drückt aus, mit welcher Spannung σ (in $\frac{kg}{m\,s^2}$) ein Material auf eine Dehnung λ reagiert. Es gilt

$$\sigma = E\,\lambda.$$

Dabei ist

$$\lambda = \frac{l}{l_0},$$

wobei l_0 die Länge des ungedehten Materials, l die Länge des gedehnten Materials ist (beide in Meter). Welche Einheiten haben λ und E?

Beispiel 9.22. Ein System möge Energie nur durch Wärme speichern. Die Enthalpie H errechnet sich aus Temperatur T (in Kelvin K), spezifischer Wärme c, Druck p (in Pascal $\frac{kg}{m\,s^2}$), Dichte ρ (in $\frac{kg}{m^3}$) und Volumen (in m^3) durch

$$H = c\rho T V + pV.$$

Welche Einheiten haben H und c?

Beispiel 9.23. Die Entropie H eines Systems sei definiert durch

$$H = -p\,\log_2(p) - (1-p)\,\log_2(1-p).$$

Bestimmen Sie die Einheit von H.

KAPITEL

10

DIMENSIONEN UND EINHEITEN TEIL B

Beispiel 10.1. Die Van-der-Waals-Gleichung bringt einen Zusammenhang zwischen Druck, Temperatur, Teilchenzahl und einschlieSSendem Volumen für ein nicht ideales Gas, also ein Gas, dessen Teilchen nicht unendlich klein angenommen werden dürfen, und dessen Moleküle aufeinander Kräfte ausüben:

$$nRT = \left(P + \frac{\alpha\, n^2}{V^2}\right)(V - \beta\, n)\,.$$

Dabei bedeuten die GröSSen und ihre Einheiten:

GröSSe		Einheit
P	Druck	$kg\, m^{-1}\, s^{-2}$
V	Volumen	m^3
T	absolute Temperatur	K
n	Anzahl der Gasteilchen	mol
R	Allgemeine Gaskonstante, für alle Gase gleich	
α	Konstante (Wechselwirkung zwischen den Gasteilchen)	
β	Konstante (GröSSe der Gasteilchen)	

Welche Einheiten haben die Konstanten R, α und β?

Lösung. In diesem Beispiel kommen Additionen und Subtraktionen vor. Wir dürfen nicht einfach so vorgehen wie beim Lösen von Gleichungen. Beachten Sie aber, dass jeder Rechenschritt in der Van-der-Waals-Gleichung erlaubt und sinnvoll sein muss, insbesondere die beiden Klammern.

- Wir beginnen mit der zweiten Klammer:

$$
\begin{aligned}
&(V - \beta\, n) && \text{muss sinnvoll sein, mit Regel 3 folgt}\\
&[V] = [\beta\, n] && \text{mit Regel 4 dürfen wir die Multiplikation aufteilen}\\
&[V] = [\beta]\,[n] && \text{nun sind nur noch Multiplikationen übrig!}\\
&[\beta] = \frac{[V]}{[n]} && \text{nun können wir die Einheiten einsetzen}\\
&[\beta] = \frac{m^3}{mol}
\end{aligned}
$$

- Nun betrachten wir die erste Klammer:

$$
\begin{aligned}
&\left(P + \frac{\alpha\, n^2}{V^2}\right) && \text{muss sinnvoll sein, mit Regel 3 folgt}\\
&[P] = \left[\frac{\alpha\, n^2}{V^2}\right] && \text{mit Regeln 4,5 und 6 dürfen wir aufteilen}\\
&[P] = \frac{[\alpha]\ [n]^2}{[V]^2} && \text{nun sind nur noch Multiplikationen übrig!}\\
&[\alpha] = \frac{[P]\ [V]^2}{[n]^2} && \text{nun können wir die Einheiten einsetzen}\\
&[\alpha] = \frac{(kg\, m^{-1}\ s^{-2}) \cdot (m^3)^2}{(mol)^2} = \frac{kg\ \cdot m^5}{s^2\, mol^2}
\end{aligned}
$$

- Nun betrachten wir die gesamte Gleichung. Zuerst beobachten wir mit Regel 3, dass für beide Klammern rechts

$$[(V - \beta\, n)] = [V] = m^3 \tag{10.1}$$

$$\left[\left(P + \frac{\alpha\, n^2}{V^2}\right)\right] = [P] = \frac{kg}{m\, s^2} \tag{10.2}$$

gilt. Nun folgt:

$$
\begin{aligned}
nRT &= \left(P + \frac{\alpha\, n^2}{V^2}\right)(V - \beta\, n) && \text{muss sinnvoll sein, mit Regel 4 folgt}\\
[nRT] &= \left[P + \frac{\alpha\, n^2}{V^2}\right]\ [V - \beta\, n] && \text{mit der Überlegung (10.1) und Regel 4 folgt}\\
[n]\,[R]\,[T] &= [P]\ [V] && \text{nun sind nur noch Multiplikationen übrig!}\\
[R] &= \frac{[P]\ [V]}{[n]\,[T]} = \frac{\frac{kg}{m\, s^2}\, m^3}{mol \cdot K} = \frac{kg\, m^2}{s^2\, mol\, K}
\end{aligned}
$$

□

Beispiel 10.2. In einer Lösung laufen 2 chemische Reaktionen ab: Eine organische Substanz, genannt Donor (Spender, nämlich NO-Spender) zerfällt spontan in einer Reaktion erster Ordnung, wobei Stickoxid NO entsteht. Je 2 Moleküle NO reagieren mit dem Sauerstoff in der Lösung und ergeben NO_2:

$$\begin{aligned} \text{Donor} &\rightarrow \text{NO} + \text{Rest} \\ 2\text{NO} + \text{O}_2 &\rightarrow 2\text{NO}_2 \end{aligned}$$

Für die Konzentrationen $c_O(t)$, $c_D(t)$ und $c_{NO}(t)$ von O_2, Donor und NO in der Lösung zum Zeitpunkt t gilt die folgende Mengenbilanz

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} c_{NO} = \underbrace{k_d c_D}_{\text{Gewinn durch Donorzerfall}} - \underbrace{k_O\, c_O\, c_{NO}^2}_{\text{Verlust durch Oxidation}}$$

Dabei sind k_D und k_O zwei Parameter, die die Geschwindigkeit der Donor-Zerfallsreaktion und der Oxidation von NO beschreiben.
Die Konzentrationen werden in mol/l (Mol pro Liter) angegeben, die Zeit in s Sekunden. Welche Einheiten haben k_D und k_O?

Lösung. Die Einheiten müssen so bestimmt werden, dass die gesamte Gleichung homogen in der Dimension ist. Auf der linken Seite der Gleichung steht eine erste Ableitung einer Konzentration nach der Zeit, mit Regel 8 folgt

$$\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} c_{NO}\right] = \frac{[c_{NO}]}{[t]} = \frac{mol}{l\, s}.$$

Auf der rechten Seite stehen zwei Terme, und die werden addiert, um die linke Seite zu ergeben. Somit bekommen wir mit Regel 2, dass

$$\frac{mol}{l\, s} = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} c_{NO}\right] = \left[k_d c_D\right] = \left[k_O\, c_O\, c_{NO}^2\right]$$

Damit bekommen wir:

$$\left[k_d c_D\right] = \frac{mol}{l\, s} \quad \Rightarrow \left[k_d\right]\ \left[c_D\right] = \frac{mol}{l\, s} \quad \Rightarrow \left[k_d\right]\ \frac{mol}{l} = \frac{mol}{l\, s} \Rightarrow \left[k_d\right] = \frac{1}{s}$$

sowie

$$\begin{aligned} \left[k_O\, c_O\, c_{NO}^2\right] &= \frac{mol}{l\, s} & \Rightarrow \quad [k_O]\,[c_O]\,[c_{NO}]^2 &= \frac{mol}{l\, s} \\ \Rightarrow \quad [k_O]\, \frac{mol}{l} \left(\frac{mol}{l}\right)^2 &= \frac{mol}{l\, s} & \Rightarrow \quad [k_O]\, \frac{mol^3}{l^3} &= \frac{mol}{l\, s} \\ \Rightarrow \quad [k_O] &= \frac{l^2}{mol^2\, s} \end{aligned}$$

□

10.1 Beispiele zum Vorbereiten

Beispiel 10.3. In diesem Beispiel rechnen wir mit den Einheiten V (Volt), A (Ampere) und s (Sekunden). An eine Spule wird zum Zeitpunkt $t = 0$ (in s) eine konstante Gleichspannung U (in V) angelegt. Der Strom I (in A), der über die Spule flieSSt, berechnet sich nach der Formel:

$$I = \frac{U}{R} - \frac{U}{R}e^{-\frac{Rt}{L}}.$$

Dabei ist R der Widerstand des Spulendrahtes, und L die Induktivität der Spule (abhängig von der Anzahl der Windungen, Eisenkern usw.). Welche Einheiten haben R und L?

Lösung:

Beispiel 10.4. In einer chemischen Reaktion verbinden sich drei Moleküle einer Substanz X zu einem Molekül Y. Seien $c_X(t)$, $c_Y(t)$ die Konzentrationen von X und Y zum Zeitpunkt t. Wir geben t in Sekunden (s) und die Konzentrationen in Mol pro Liter (mol/l) an. Bei konstanter Temperatur, wenn keine weiteren Stoffe in die Reaktion eingreifen, gilt die Gleichung:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}c_Y(t) = k\,c_X(t)^3$$

Bestimmen Sie die Einheit von k.

Lösung:

10.2 Weitere Beispiele zum Üben

Beispiel 10.5. Die physikalische Arbeit ist die Summe aus allen aufgewendeten Kräften mal dem Weg in der sie (die Kräfte) angewandt wurden. Im Grenzprozess führt dies zu folgenden Integral

$$W = \int_{s_1}^{s_2} F \, \mathrm{d}s$$

worin $s,\ s_1,\ s_2$ Distanzen in Meter, und die Kraft F in N gegeben ist. Rechnen (bzw. begründen) Sie, dass auch in dieser Rechnung die Arbeit das Produkt aus Kraft und Weg ist.

Beispiel 10.6. Wir betrachten die saure Rohrzuckerinversion: $R + H_2O \xrightarrow{H_3O}$ Glucose+Fructose. Die Geschwindigkeit mit der Rohrzucker (R) invertiert wird ist gegeben durch:

$$-\frac{\mathrm{d}\, R}{\mathrm{d}t} = k\, R\, C_{H_2O}\, C_{H_3O}$$

wobei C_{H_2O} und C_{H_3O} die Konzentrationen von H_2O und H_3O in mol/l sind. Weiters ist die Zeit t in Sekunden gegeben. Bestimmen Sie die Einheit von k.

Beispiel 10.7. Die Dieterici-Gleichung für reale Gase hat die Form

$$p = \frac{aT}{V_m - b} \exp\left(-\frac{c}{aV_mT}\right)$$

dabei ist p der Druck ($[p] = \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{-1} \cdot s^{-2}$) und T die Temperatur in Kelvin. Die GröSSe V_m hat die Einheit $\mathrm{m}^3 \cdot \mathrm{mol}^{-1}$. Bestimme die Einheiten von a (Gaskonstante), b (Kovolumen) und c (Adhäsionsdruck).

Beispiel 10.8. Gegeben sei die Reaktionsgleichung $CS_2 + 3O_2 \rightarrow CO_2 + 2SO_2$. Weiter seien $u_{CS_2},\ u_{O_2},\ u_{CO_2},\ u_{SO_2}$ (zeit-abhängige) Konzentrationen der einzelnen Stoffe (in mol/m^3) und die Zeit t sei in Sekunden s. Dann folgt, dass

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u_{SO_2} = \alpha \cdot u_{CS_2} + \beta \cdot \left(u_{O_2}\right)^3 .$$

Bestimmen Sie die Einheiten der Reaktionskonstanten α und β.

KAPITEL

11

WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG DIE VIER FELDERTAFEL

11.1 Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeit

Definition 11.1. Ein Ereignis ist jede Aussage, welche entweder falsch oder wahr ist.

Anmerkung 11.2.
Beispiele für Ereignisse: „Herr Meyer ist an Krebs erkrankt.“ „Bei Frau Meyer wurde Krebs diagnostiziert.“
Keine Ereignisse: „Geburtsort von Herr Meyer“„Abiturnote von Frau Meyer“

Definition 11.3. Sei A ein Ereignis. Das Symbol $P(A)$ bezeichnet die Wahrscheinlichkeit mit der A wahr ist.

Fakt 11.4.

- $(P(A))$ ist eine Zahl zwischen 0 und 1 (0 und 100%).
- Ob das Ereignis A eintritt, hängt vom Zufall ab. Würde man sehr viele unabhängige Versuche machen, ob das Ereignis A eintritt, würde das Ereignis im Anteil $P(A)$ aller Fälle eintreten.
- $P(A) = 1$ heiSSt, dass das Ereignis sicher eintritt. $P(A) = 0$ heiSSt, dass das Ereignis sicher nicht eintritt.

Anmerkung 11.5. Eine mathematisch befriedigende, korrekte Definition von Ereignis und Wahrscheinlichkeit können wir hier aus Zeitgründen nicht geben.

Definition 11.6. Sind A und B zwei Ereignisse, so können wir dadurch weitere Ereignisse definieren. Wir bedienen uns der Schreibweise der Mengenlehre.

- $\overline{A}$ („Nicht A“) Das Ereignis A tritt nicht ein.
- $A \cap B$ („A und B“) Das Ereignis A und das Ereignis B treten beide ein.
- $A \cup B$ („A oder B“) Mindestens eines der Ereignisse tritt ein (A oder B oder **auch** beide).

Wir definieren der Vollständigkeit halber zwei „triviale“Ereignisse:

- $\emptyset$ (leere Menge:) Das sogenannte unmögliche Ereignis, das nie eintritt.
- Ω Das sogenannte sichere Ereignis, das immer eintritt.

Mit diesen Schreibweisen gelten die folgenden Rechenregeln fur Wahrscheinlichkeiten:

Fakt 11.7. Seien A und B Ereignisse. Es gilt:

1. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.
2. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, falls A und B **nicht** gleichzeitig eintreten können (d.h. $P(A \cap B) = 0$).
3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
4. $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$.
5. $P(\emptyset) = 0$.
6. $P(\Omega) = 1$.

11.2 Berechnen und Darstellen der WSK

11.2.1 Die Vierfeldertafel

Eine übersichtliche Methode, die verschiedenen Kombinationen für das Eintreten und Ausbleiben zweier Ereignisse darzustellen, ist die Vierfeldertafel:

Algorithmus 11.8. Seien A und B zwei Ereignisse. Die Vierfeldertafel gibt die Wahrscheinlichkeiten von A und B sowie aller vier möglichen Kombinationen des Eintretens oder Ausbleibens der Ereignisse A, B an:

	B	$\overline{B}$	
A	$P(A \cap B)$ A tritt ein B tritt ein	$P(A \cap \overline{B})$ A tritt ein B tritt nicht ein	$P(A)$ A tritt ein
$\overline{A}$	$P(\overline{A} \cap B)$ A tritt nicht ein B tritt ein	$P(\overline{A} \cap \overline{B})$ A tritt nicht ein B tritt nicht ein	$P(\overline{A})$ A tritt nicht ein
	$P(B)$ B tritt ein	$P(\overline{B})$ B tritt nicht ein	1

Am rechten und unteren Rand der Vierfeldertafel stehen die Wahrscheinlichkeiten für das Eintreten und Ausbleiben von A bzw. B allein. Im Inneren der Tabelle stehen die Wahrscheinlichkeiten für die verschiedenen Kombinationen.

Beispiel 11.9. In einem fernen Land kandidiert eine Ultralinke Partei. 1% der Wahlberechtigten wählt ultralinks. Die Partei gibt ihr Parteiblatt „Der Rote Revolver“heraus. 2% aller Wahlberechtigten lesen das Parteiblatt. Insgesamt 0,8% der Wahlberechtigten lesen das Blatt und wählen ultralinks. Eine wahlberechtigte Person wird zufällig ausgewählt und befragt.
Betrachten Sie die Ereignisse:

- U Die befragte Person wählt ultralinks.
- R Die befragte Person liest den Roten Revolver.

Stellen Sie die Vierfeldertafel für U und R auf.

Lösung. Häufig entscheidend ist es, dass man die Angaben richtig versteht. Aus der Angabe kann man folgende Wahrscheinlichkeiten ablesen:

- $P(U) = 0,01$. Wahrscheinlichkeit, dass die Person ultralinks wählt.
- $P(R) = 0,02$. Wahrscheinlichkeit, dass die Person den R.R. liest.
- $P(U \cap R) = 0,008$. Wahrscheinlichkeit, dass die Person ultralinks wählt **und** den R.R. liest.

Diese Wahrscheinlichkeiten von U und R tragen wir am rechten und unteren Rand der Vierfeldertafel ein. Die Wahrscheinlichkeit von $U \cap R$ kommt ins linke obere Eck der Tabelle. (Im rechten unteren Eck steht immer 1.)

	R	$\overline{R}$	
U	0,008		0,01
$\overline{U}$			
	0,02		1

Das *nützliche* an der Vierfeldertafel ist es, dass man die Formeln aus Fakt 11.7 nutzen kann, um die verbleibenden Wahrscheinlichkeiten zu erstellen. Mit der ersten Formel erhalten wir:

- $P(\overline{U}) = 1 - P(U) = 0,99$.
- $P(\overline{R}) = 1 - P(R) = 0,98$.

Diese Werte können wir unmittelbar in die Tafel übertragen:

	R	$\overline{R}$	
U	0, 008		0, 01
$\overline{U}$			0,99
	0, 02	0,98	1

Formel 4 aus Fakt 11.7 liefert uns:

$$P(U \cap R) + P(U \cap \overline{R}) = P(U) \quad \Leftrightarrow \quad P(U \cap \overline{R}) = P(U) - P(U \cap R)$$

Damit können wir berechnen:

$$P(U \cap \overline{R}) = 0,01 \ - 0,008 \ = 0,002 \tag{11.1}$$

Analog erhalten wir

$$P(\overline{U} \cap R) = 0,02 \ - 0,008 \ = 0,012 \tag{11.2}$$

Und schlieSSlich:

$$P(\overline{U} \cap \overline{R}) = P(\overline{U}) - P(\overline{U} \cap R) = 0,99 \ - 0,012 \ = 0,978$$

Diese Zahlen lassen sich nun in die Vierfeldertafel übertragen:

	R	$\overline{R}$	
U	0, 008	0,002	0, 01
$\overline{U}$	0,012	0,978	0,99
	0, 02	0,98	1

Damit ist die Vierfeldertafel fertig. □

Anmerkung 11.10.

- Man kann sich die Gleichung (11.1) auch anders überlegen:
Die Ultralinks-WählerInnen teilen sich in zwei Gruppen: solche, die das Parteiblatt lesen, und solche, die es nicht lesen. Insgesamt wählen 1% der Bevölkerung ultralinks. $0,8\%$ der gesamten wahlberechtigten Bevölkerung sind Ultralinks-WählerInnen, die den R.R. lesen. Damit verbleiben $0,2\%$ der gesamten wahlberechtigten Bevölkerung, die zwar ultralinks wählen, aber das Parteiblatt nicht lesen. Sie sehen: Die erste Zeile des Tabelleninneren addiert sich zum Wert am Rand daneben.

- Analog kann man sich Gleichung (11.2) überlegen:
Insgesamt sind 2% der gesamten wahlberechtigten Bevölkerung R.R.-LeserInnen, aber nur $0,8\%$ der Wahlberechtigten lesen R.R. und wählen zugleich ultralinks. Damit verbleiben $1,2\%$ der gesamten wahlberechtigten Bevölkerung, welche den R.R. lesen, aber nicht ultralinks wählen. Sie sehen: Die erste Spalte des Tabelleninneren addiert sich zum Wert am Rand darunter.

- Die Vierfeldertafel bietet eine übersichtliche Möglichkeit die Ereignisse in Zusammenhang zu bringen. Es gilt, dass wenn man die Spalten addiert, man als Ergebnis die letzte Spalte erhält. Ebenso gilt, dass wenn man die Zeilen addiert, man als Ergebnis die letzte Zeile erhält:

	B		$\overline{B}$		
A	$P(A \cap B)$	$+$	$P(A \cap \overline{B})$	$=$	$P(A)$
	$+$		$+$		$+$
$\overline{A}$	$P(\overline{A} \cap B)$	$+$	$P(\overline{A} \cap \overline{B})$	$=$	$P(\overline{A})$
	$\parallel$		$\parallel$		$\parallel$
	$P(B)$	$+$	$P(\overline{B})$	$=$	1

11.2.2 Bedingte Wahrscheinlichkeit

In diesem Kapitel wollen wir uns eine *Sonderform* der Wahrscheinlichkeit widmen, der bedingten Wahrscheinlichkeit. Bisher haben wir **nur** Wahrscheinlichkeiten betrachtet, welche sich auf die Gesamtmenge der möglichen *Grundmenge* bezieht. Im letzten Beispiel war die Wahl der Person auf die wir die Wahrscheinlichkeit beziehen vollkommen beliebig. Nun schränken wir diese Menge ein! In der Prozentrechnung bezeichnet man das, als eine Veränderung der *Grundmenge*.

Beispiel 11.11. Wir betrachten die Situation aus Beispiel 11.9. Eine Person wird zufällig ausgewählt und befragt.

- Die Person liest den Roten Revolver. Wie groSS ist nun die Wahrscheinlichkeit einzuschätzen, dass diese Person ultralinks wählt.

- Eine andere Person wird befragt. Sie wählt ultralinks. Wie groSS ist nun die Wahrscheinlichkeit einzuschätzen, dass sie den Roten Revolver liest.

Lösung. Wir beziehen uns auf die oben errechnete Vierfeldertafel, die wir hier wiederholen:

	R	$\overline{R}$	
U	$0,008$	0,002	$0,01$
$\overline{U}$	0,012	0,978	0,99
	$0,02$	0,98	1

- Insgesamt 2% der Wahlberechtigten lesen den R.R., darunter befinden sich $0,8\%$ (bezogen auf alle Wahlberechtigten), welche zugleich R.R. lesen und ultralinks wählen[1]. Bezogen auf die R.R.-LeserInnen allein sind das $0,008/0,02 = 0,4 = 40\%$. Also wählen 40% des Leserkreises des R.R. die ultralinke Partei.
- Insgesamt 1% aller Wahlberechtigten wählt ultralinks, darunter befinden sich $0,8\%$ (bezogen auf alle Wahlberechtigten), welche zugleich R.R. lesen und ultralinks wählen[2]. Bezogen auf die Ultralinks-WählerInnen allein ergibt das $0,008/0,01 = 0,8 = 80\%$. Also lesen 80% der Ultralinks-WählerInnen das Parteiblatt.

□

Anmerkung 11.12. Sie sehen, dass sich durch Information über eines der Ereignisse die Einschätzung der Wahrscheinlichkeit des anderen ganz drastisch ändert. Diese neu eingeschätzten Wahrscheinlichkeiten unter Vorinformation nennt man bedingte Wahrscheinlichkeiten.

Definition 11.13. Seien $A,\ B$ zwei Ereignisse. Wir führen die **bedingte Wahrscheinlichkeiten** ein.
$P(B|A)$ ist die Wahrscheinlichkeit von B, wenn **bekannt ist**, dass A eintritt:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

Anmerkung 11.14. Die **unbedingte** Wahrscheinlichkeit $P(A)$ bezieht sich auf die Gesamtheit aller Versuche. Der Anteil $P(A)$ aller Versuche fällt zu Gunsten von A aus.

Dagegen bezieht sich die **bedingte** Wahrscheinlichkeit $P(A|B)$ nur auf die Gesamtheit jener Versuche, in denen B eintritt: Welcher Anteil jener Versuche, in denen B eintritt, geht zu Gunsten von A aus? Von allen Versuchen erfüllt nur der Anteil $A \cap B$, dass er zugunsten von A ausgeht und zugleich in die Gesamtheit der Versuche mit Ausgang B mitgerechnet wird. Bezogen auf die Gesamtheit aller Versuche mit Ausgang B gibt das also den Anteil

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

[1] **Beachten Sie**, wir betrachten eine **Teilmenge** aller Wahlberechtigten

[2] **Beachten Sie**, wir betrachten wieder eine **Teilmenge** aller Wahlberechtigten

Wenn sich durch die Vorkenntnis über ein Ereignis die Einschätzung der Wahrscheinlichkeit des anderen Ereignisses nicht ändert, dann heiSSen die Ereignisse unabhängig:

Definition 11.15. Zwei Ereignisse A und B heiSSen unabhängig, wenn eine der drei folgenden Eigenschaften gilt. Wenn eine davon gilt, dann gelten alle drei.

$$\begin{aligned} P(A|B) &= P(A), \\ P(B|A) &= P(B), \\ P(A \cap B) &= P(A) \cdot P(B). \end{aligned}$$

Drogenhund Bello

Beispiel 11.16. Der brave Drogenhund Bello bellt 90% der DrogenschmugglerInnen aus, die einen bestimmten Grenzübergang zu passieren versuchen. Leider verbellt er auch 5% der anderen PassantInnen. An diesem Grenzübergang kommt ein/e DrogenschmugglerIn auf 999 harmlose PassantInnen. Ein Passant kommt vorüber.

- Erstellen Sie eine Vierfeldertafel für die Ereignisse
  - D Der Passant schmuggelt Drogen.
  - B Der Passant wird ausgebellt.
- Wie groSS ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Passant ein Drogenschmuggler ist und ausgebellt wird?
- Wie groSS ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Passant ausgebellt wird?
- Der Passant wurde ausgebellt. Wie groSS ist die Wahrscheinlichkeit, dass er Drogen schmuggelt?

Lösung.

- Unsere Angaben beinhalten die folgenden Informationen
  - $P(B|D) = 0,9$. Bedingte Wahrscheinlichkeit: Wenn die Information gegeben ist, dass D eintritt, wird die Wahrscheinlichkeit von P mit 0,9 angegeben!
  - $P(B|\overline{D}) = 0,05$.
  - $P(D) = 0,001$. Unbedingte Wahrscheinlichkeit! Von 1000 Passanten - über die wir noch nicht mehr wissen - ist einer Drogenschmuggler.

  Wir erstellen zunächst schrittweise die Vierfeldertafel. Direkt aus den Angaben können wir die Wahrscheinlichkeit $P(D)$ und die Wahrscheinlichkeit $P(\overline{D}) = 1 - P(D)$ eintragen:

	B	$\overline{B}$	
D			0,001
$\overline{D}$			0,999
			1

Aus der Formel für bedingte Wahrscheinlichkeit (Definition 11.13) folgt

$$P(B|D) = \frac{P(B \cap D)}{P(D)} \quad \Leftrightarrow \quad P(B \cap D) = P(D) \cdot P(B|D) = 0,001 \cdot 0,9 = 0,0009$$

$$P(B|\overline{D}) = \frac{P(B \cap \overline{D})}{P(\overline{D})} \quad \Leftrightarrow \quad P(B \cap \overline{D}) = P(\overline{D}) \cdot P(B|\overline{D}) = 0,999 \cdot 0,05 = 0,04995$$

	B	$\overline{B}$	
D	0,009		0,001
$\overline{D}$	0,04995		0,999
			1

Nun können wir die Zeilen und Spaltensummen vervollständigen:

	B	$\overline{B}$	
D	0,0009	0,0001	0,001
$\overline{D}$	0,04995	0,94905	0,999
	0,05085	0,94915	1

- Nun können wir die Wahrscheinlichkeiten ablesen:
  - $P(D \cap B)$ Die Wahrscheinlichkeit, dass der Passant ein Drogenschmuggler ist und ausgebellt wird, ist $0,0009$. (Linke obere Ecke der inneren Tafel).
  - $P(B)$ Die Wahrscheinlichkeit, dass der Passant ausgebellt wird, ist 0,05085. (Unterer Rand, links.)
  - $P(D|B)$ Die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass der Passant ausgebellt wird, wenn bekannt ist dass er Drogen schmuggelt, ist $0,0009/0,05085 \approx 0,0177$.

□

11.3 Beispiele zum Vorbereiten

Beispiel 11.17. In einer Versuchsanordnung muss eine Maus in einem Labyrinth ein Stück Speck finden. Von hundert Mäusen macht jede zweimal den Versuch. Es stellt sich heraus, das 36 Mäuse bei beiden Versuchen den Speck finden. 90% der Mäuse, denen der erste Versuch gelingt, schaffen auch den zweiten Versuch. Die Hälfte der Mäuse, denen der erste Versuch nicht gelingt, schafft trotzdem den zweiten Versuch.

- Erstellen Sie die Vierfeldertafel für die Ereignisse

- E Erster Versuch gelingt.
- Z Zweiter Versuch gelingt.

- Wie groSS ist der Prozentsatz aller Mäuse, denen der erste Versuch gelingt?
- Wie groSS ist der Prozentsatz aller Mäuse, denen der zweite Versuch gelingt?
- Welcher Prozentsatz aller Mäuse, denen der zweite Versuch gelingt, hat auch im ersten Versuch bestanden?

Lösung:

Beispiel 11.18. Es soll die Widerstandsfähigkeit einer neuen Hühnerzuchtrasse gegen *Kokzidiose* erprobt werden. Es werden hierfür 2830 Hühner der Rasse *Ross 308* und 3520 Hühner der neuen Mutation *Ross 308a* untersucht. Man stellt fest, dass 15% der Hühner mit *Kokzidiose* erkrankten. 528 Hühner waren erkrankt und von der Art *Ross 308a*.
Erstellen Sie eine Vierfelder-Tafel welche die Untersuchung beschreibt. Wählen Sie hierfür die Ereignisse E: das Huhn ist erkrankt und A: das Huhn ist von der mutierten Art *Ross 308a*.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Huhn der Art *Ross 308* nicht erkrankt ist.
Argumentieren Sie zusätzlich ob die Ereignisse A und E unabhängig sind.

Lösung:

11.4 Weitere Beispiele zum Üben

Beispiel 11.19. In einer Studie wurde der Befall von Ratten mit Milben der Typen A und B untersucht. 250 Ratten wurden eingefangen, 75 davon waren von Milben des Typs B befallen. 60% der von Typ B befallenen Ratten waren auch von Milben des Typs A befallen, während 37,5% der von Typ A befallenen Ratten auch von Milben des Typs B befallen waren. Eine Ratte wird zufällig ausgewählt, A bezeichne das Ereignis „Befall mit Milben vom Typ A“, B das Ereignis „Befall mit Milben vom Typ B“.

1. Welche der folgenden drei Behauptungen finden sich in der Angabe (ankreuzen)?

$$P(B|A) = 0,6;\ \ P(A \cap B) = 0,6;\ \ P(A|B) = 0,6$$

2. Erstellen Sie eine Vierfeldertafel für die Ereignisse A und B und tragen Sie passende Zahlenwerte ein.

3. Es sei bereits festgestellt, dass die ausgewählte Ratte von Milben des Typs A nicht befallen ist. Wie groSS ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass sie von Milben des Typs B befallen ist?

Beispiel 11.20. Bei einer Studie zur Wirksamkeit einer Katzen-Impfung gegen eine Erkrankung wurden folgende Daten erhoben: $52,2\%$ aller Katzen sind nicht geimpft, $45,3\%$ aller Katzen sind erkrankt. Unter den erkrankten Katzen sind $52,3\%$ geimpft.

1. Bestimmen Sie eine Vierfeldertafel für die zwei Ereignisse
   E: Eine zufällig gewählte Katze ist erkrankt.
   G: Eine zufällig gewählte Katze ist geimpft.
2. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine geimpfte Katze erkrankt ist.
3. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine nicht geimpfte Katze nicht erkrankt ist?
4. Analysieren und argumentieren Sie, ob die Ereignisse E und G abhängig oder unabhängig sind!

Beispiel 11.21. Zwei verschiedene Marillen-Züchtungen sollen auf Monilia-Resistenz untersucht werden. Hierfür untersucht man 1578 Pflanzen, wovon 750 der Sorte A sind, und der Rest der Sorte B. Man stellt fest, dass eine Pflanze der Sorte A mit einer Wahrscheinlichkeit von 27% gegen Monilia resistent ist. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine beliebige Pflanze der Sorte B ist und resistent gegen Monilia ist liegt bei 8%.

- Erstellen Sie eine Vier-Felder-Tafel welche die Versuchsanordnung beschreibt.
- Wie groSS ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Pflanze der Sorte B resistent gegen Monilia ist?
- Gibt es einen Zusammenhang zwischen der Sortenwahl und der Resistenz (bzw. sind die Ereignisse unabhängig)?

KAPITEL

12

WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG DER EREIGNISBAUM

Im folgenden Beispiel wollen wir den Ereignisbaum verstehen lernen:

Beispiel 12.1. Zwei Getreidesorten, von denen eine gentechnisch manipuliert ist, sind unterschiedlich sensibel gegen einen bestimmten Schadstoff. In einer Studie werden viele Proben beider Getreidesorten dem Schadstoff ausgesetzt. Wir greifen eine Pflanze aus der Probe zufällig heraus und betrachten die zwei Ereignisse:

- G Die Pflanze gehört zur gentechnisch manipulierten Sorte.
- S Die Pflanze zeigt Schäden nach der Schadstoffbehandlung.

Die Ergebnisse der Studie finden Sie in folgender Vierfeldertafel:

	S	$\overline{S}$	
G	0,1	0,5	0,6
$\overline{G}$	0,2	0,2	0,4
	0,3	0,7	1

1. Bestimmen Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten und interpretieren Sie, was sie bedeuten:

$$P(G),\ P(G \cap S),\ P(G|S), P(S|G).$$

Sind die Ereignisse S und G unabhängig?

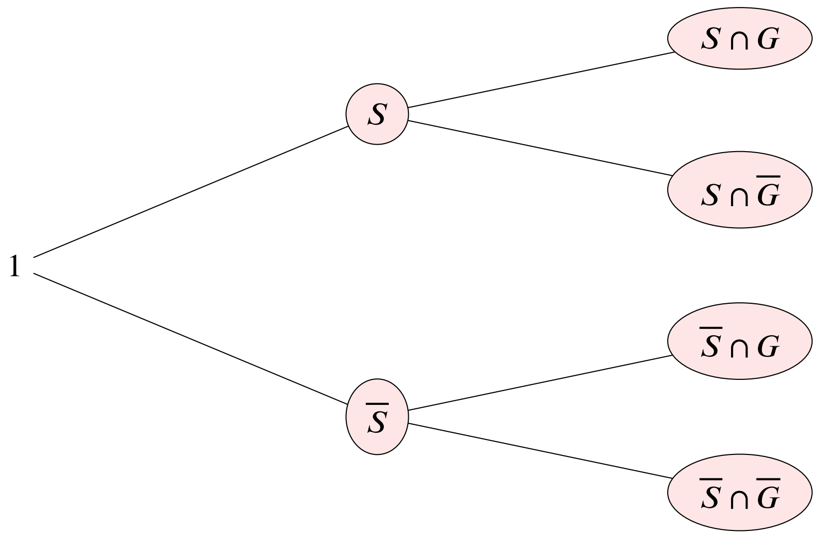
2. Erstellen Sie einen Ereignisbaum welcher die Beobachtung beschreibt.

Lösung.

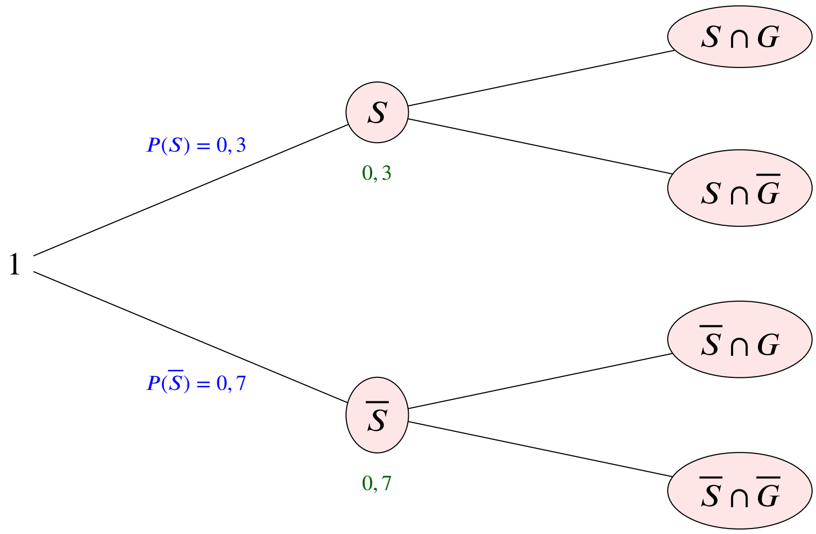
1. Es bedeuten:

   - $P(G)$ Die Wahrscheinlichkeit, dass die Pflanze zur gentechnisch manipulierten Sorte gehört. Wir können den Wert direkt aus der Tabelle ablesen:
     $P(G) = 0,6$ (obere Zeile, rechter Rand).
   - $P(G \cap S)$ Die Wahrscheinlichkeit, dass die Pflanze gentechnisch manipuliert ist und gleichzeitig Schäden zeigt. Auch diesen Wert können wir direkt ablesen:
     $P(G \cap S) = 0,1$ (links oben).
   - $P(G|S)$ Die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass es eine gentechnisch manipulierte Pflanze ist, wenn bekannt ist, dass sie Schäden zeigt.
     Um diese Wahrscheinlichkeit zu erhalten, müssen wir das Verhältnis aus $P(G \cap S)$ und $P(S)$ bilden:
     $$P(G|S) = \frac{P(G \cap S)}{P(S)} = \frac{0,1}{0,3} = 0,\dot{3}.$$
   - $P(S|G)$ Die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass die Pflanze Schäden zeigt, wenn bekannt ist, dass sie gentechnisch manipuliert ist. Um diese Wahrscheinlichkeit zu erhalten, müssen wir das Verhältnis aus $P(G \cap S)$ und $P(S)$ bilden:
     $$P(S|G) = \frac{P(G \cap S)}{P(G)} = \frac{0,1}{0,6} = 0,1\dot{6}.$$
   - Die Ereignisse sind nicht unabhängig, denn mit Vorkenntnis der gentechnischen Lage ändert sich die Wahrscheinlichkeit, dass die Pflanze durch den Schadstoff beeinträchtigt wird:
     $$P(S) = 0,3 \neq P(S|G) = 0,1\dot{6}.$$

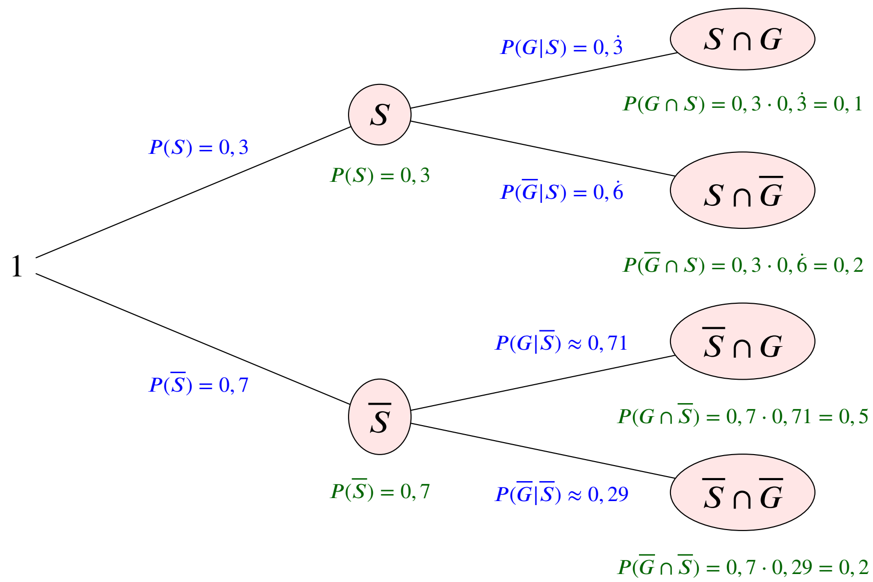
2. Wenn man die bedingen Wahrscheinlichkeiten bereits kennt, ist es manchmal einfacher/-übersichtlicher die Ereignisse in einem Ereignisbaum darzustellen. Hierfür trägt man die Ereignisse in zwei Spalten ein (natürlich kann man das auch als Zeilen machen), wobei man die Aufspaltung mit 1 beginnt (bzw. beginnen lassen kann).



Nun trägt man die Wahrscheinlichkeiten für S und $\overline{S}$ bei den Ereignissen (und auf den Verbindungsstrecken ein):



Beachten Sie, dass die Aufspaltung der Pfade in Summe **immer** 1 ergeben muss. Man kann das so lesen, die Beginnende 1 beschreibt den gesamten Ereignisraum (also das irgendwas passiert). Nun gibt es zwei Möglichkeiten, S kann eintreten oder eben nicht $\overline{S}$, daher muss die gesamte WSK 1 ergeben.
Nun betrachten wir die zweite Spalte. Wenn wir den Pfad betrachten, der von S beginnt, so betrachten wir nur noch Wahrscheinlichkeiten, bei denen **vorausgesetzt** ist, dass S eingetreten ist $\rightarrow$ wir haben also bedingte Wahrscheinlichkeiten. Somit ist er erste Pfad die WSK, dass G eintritt, vorausgesetzt, dass S gilt! Analog gilt das für die anderen Pfade.
SchlieSSlich erhält man in der letzten Spalte die „und“Wahrscheinlichkeiten der Pfade:



$\square$

Drogenhund Bello

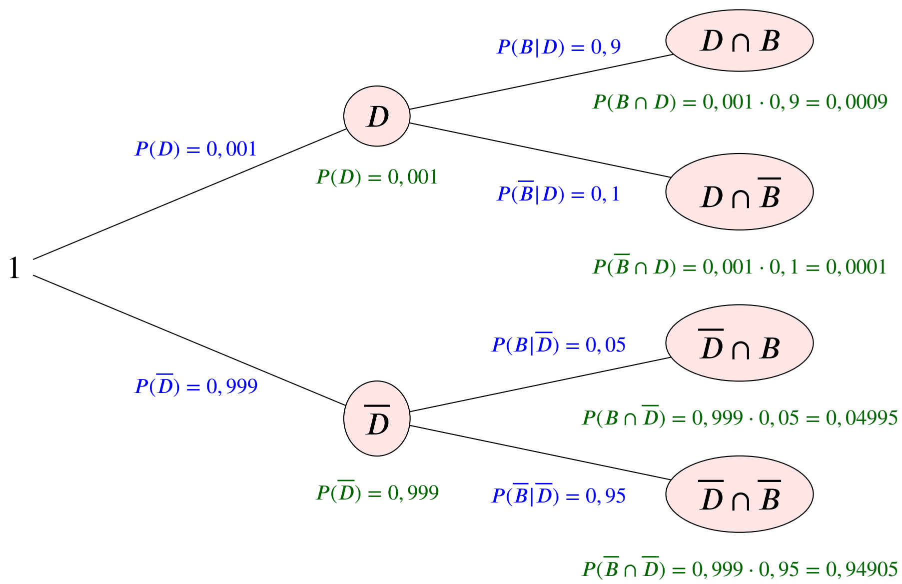
Beispiel 12.2. Wir betrachten die Fragestellung aus 11.16. Darin hatten wir folgende Angabe: *D*er brave Drogenhund Bello bellt 90% der DrogenschmugglerInnen aus, die einen bestimmten Grenzübergang zu passieren versuchen. Leider verbellt er auch 5% der anderen PassantInnen. An diesem Grenzübergang kommt ein/e DrogenschmugglerIn auf 999 harmlose PassantInnen. Wir haben am Ende die 4-Feldertafel:

	B	$\overline{B}$	
D	0,0009	0,0001	0,001
$\overline{D}$	0,04995	0,94905	0,999
	0,05085	0,94915	1

erstellt. Nun wollen wir daraus einen Ereignisbaum erstellen.

Lösung.

Die meisten Wahrscheinlichkeiten können wir ablesen, und die verbleibenden Wahrscheinlichkeiten können wir mit dem *Satz von Bayes* 11.13 bestimmen:



□

Covid-19

Anmerkung 12.3. **Vorbemerkung:** Vor einigen Jahren gab es ein Pandemie namens *Covid-19*[1]. Im Rahmen dieser Pandemie wurden PCR-Tests durchgeführt um erkrankte Personen zu identifizieren. Die Testgenauigkeit wurde überprüft und verglichen:

[1] Möglicherweise haben Sie schon mal was davon gehört ☺.

Tabelle 2

Index Test Klasse	Beschreibung	Anzahl der inkludierten Vergleiche	Sensitivität	Spezifität
Automatisierter RT-PCR	Integrierter, hochfrequenter vollautomatisiertes Arbeitsprozess-System	10	0.95 (0.94-0.99)	0.99 (0.99-1.00)
Kommerzielle RT-PCR Kits	Manuelle kommerzielle Reagenzien basierend auf RT-PCR Technologie	25	0.94 (0.89-0.97)	1.00 (0.72-1.00)
POCT Systeme	Automatisierte Schnelltests (point of care)	29	0.95 (0.91-0.98)	1.00 (0.99-1.00)
Verschiedene RT-PCR Methoden	Hauseigene, im Labor erstellte Tests mit Variationen in der Analysetechnik und –methode, basierend auf RT-PCR Technologie	23	0.97 (0.93-0.98)	1.00 (0.98-1.00)

Abbildung 12.1: Auswertung PCR-Testgenauigkeit [2]

Diese Liste zeigt die Testgenauigkeit welche durch Sensitivität und Spezifität angegeben wird und wurde erstellt um die Testmethoden zu selektieren nach der entschieden wird ob eine Person als infiziert bezeichnet wird (*positive Covid19 Case*).

Sensitivität: Beschreibt die Wahrscheinlichkeit eine erkrankte Person als *krank* zu identifizieren.

Spezifität: Beschreibt die Wahrscheinlichkeit, dass eine gesunde Person als nicht erkrankt erkannt wird.

Anmerkung zu dieser Tabelle: Zum Einen wird in dem Dokument [2] darauf hingewiesen, dass die Überprüfung der Testgenauigkeit an verhältnismäSSig wenigen Proben überprüft wurde. Zum Anderen muss man anmerken, dass eine Spezifität von 100% auf eine *optimale* Testumgebung hindeutet. Eine reale Messung hat **immer** einen Messfehler. Daher ist ein realistischer Kandidat der *Automatisierter RT-PCR* Test. Wir werden für unsere Überlegungen diesen heranziehen.
Weiters benötigen wir eine realistische Annahme für die Anzahl an Infizierten, wir nehmen an, dass 1% der Bevölkerung an Covid-19 erkrankt ist, was in etwa der Infektionslage im Jänner 2022 entspricht [2]

Beispiel 12.4. Erstellen sie einen Ereignisbaum welcher die Testgenauigkeit erkrankter und gesunder Personen der Covid-19 Pandemie abbildet.
Eine beliebige Person macht einen PCR-Test, das Testergebnis ist positiv! Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass diese Person wirklich an Covid-19 erkrankt ist?

Lösung. Zuerst definieren wir zwei Ereignisse welche das Problem beschreiben:

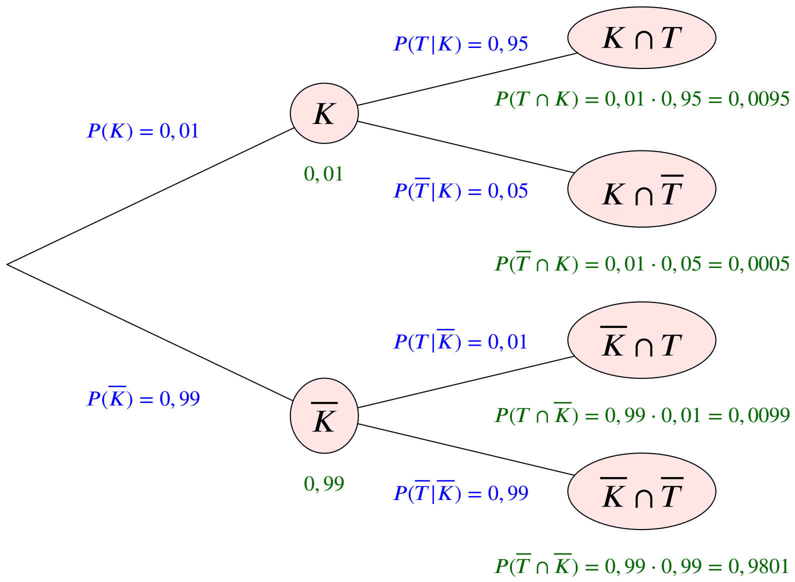
[2] Durch folgende Überlegung, wenn pro Tag 10000 neue Fälle hinzukommen und wir annehmen, dass eine Person 7 Tage erkrankt bleibt so erhält man $7 \cdot 10000 = 70000$ erkrankte Personen, was in etwa 1% der österreichischen Bevölkerung entspricht.

K**:** eine Person ist an Covid-19 erkrankt.

T**:** der PCR-Test ist positiv.

Mit diesen beiden Ereignissen können wir nun Wahrscheinlichkeiten aus der Infektionslage, der Sensitivität und der Spezifität ableiten:

$$\begin{aligned} P(K) &= 0,01 & \\ P(T|K) &= 0,95 & \text{Sensitivität} \\ P(\overline{T}|\overline{K}) &= 0,99 & \text{Spezifität} \end{aligned}$$



Nun können wir uns der zweiten Fragestellung widmen. Zuerst müssen wir erkennen, dass die Wahrscheinlichkeit $P(K|T)$ gefragt ist. Die Formel von BAYES benötigt hierfür $P(T)$, welche wir aus dem Ereignisbaum berechnen können:

$$P(T) = P(T \cap K) + P(T \cap \overline{K}) = 0,0095 + 0,0099 = 0,0194$$

Damit erhalten wir die gesuchte Wahrscheinlichkeit als

$$P(K|T) = \frac{P(K \cap T)}{P(T)} = \frac{0,0095}{0,0194} = 0,4897 \approx 49\%$$

$\square$

Anmerkung 12.5. Diese Rechnung ist natürlich lange bekannt, und ist ein *Standardbeispiel* der Wahrscheinlichkeitstheorie. Man kann die Testgenauigkeit einfach erhöhen, indem man ein zweites mal testet. Dies führt dann zu einer Wahrscheinlichkeit $P(K|T_1 \cap T_2) \approx 99\%$.

12.1 Beispiele zum Vorbereiten

Beispiel 12.6. Eine Stichprobe von 100 Personen bestand aus 40 Männern und 60 Frauen. 20% der Männer und 15% der Frauen waren übergewichtig. Eine Person wird zufällig ausgewählt. Wir betrachten die Ereignisse: M „Die Person ist männlich“und U „Die Person ist übergewichtig“.

1. Erstellen Sie ein Baumdiagramm.
2. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Person übergewichtig ist.
3. Aus den übergewichtigen Personen wird zufällig eine Person ausgewählt. Wie groSS ist die Wahrscheinlichkeit, dass es ein Mann ist?

Lösung:

12.2 Weitere Beispiele zum Üben

Beispiel 12.7. In einer bestimmten Pflanzenart hängt die Blütenfarbe von einem einzelnen Gen ab, das zwei Allele hat: ein dominantes Allel R für rote Blüten und ein rezessives Allel r für weiSSe Blüten. Eine Pflanze hat rote Blüten, wenn sie mindestens ein R-Allel besitzt (also RR oder Rr), und weiSSe Blüten, wenn sie rr ist.
Ein(e) Gärtner(in) kreuzt zwei Pflanzen, die beide heterozygot sind, also den Genotyp Rr haben. Wir möchten die Wahrscheinlichkeit für die verschiedenen Phänotypen (rote oder weiSSe Blüten) der Nachkommen berechnen, wenn wir wissen, dass die Wahrscheinlichkeit für das Allel r doppelt so hoch ist wie für R. Erstellen Sie hierfür einen Ereignisbaum, welcher die Kreuzung abbildet. Wie groSS ist die Wahrscheinlichkeit, dass die gekreuzte Pflanze rote Blüten hat?
Anmerkung: Da beide Eltern den Genotyp Rr haben, können sie zwei Arten von Gameten (Keimzellen) erzeugen: R und r.

Beispiel 12.8. Eine Schachtel enthält drei Münzen X, Y, Z. X ist eine faire Münze, zeigt beim Werfen also mit gleicher Wahrscheinlichkeit „Kopf“bzw. „Adler“, Y ist so manipuliert, dass beim Werfen die Wahrscheinlichkeit fur „Adler“gleich $\frac{2}{3}$ ist, und Z zeigt auf beiden Seiten den Adler. Es wird folgender Versuch durchgeführt: Eine Münze wird zufällig der Schachtel entnommen und geworfen.

- Skizzieren Sie das Baumdiagramm für den Versuch.
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit erscheint „Adler“?
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit handelt es sich um die faire Münze, wenn „Kopf“erscheint?

Beispiel 12.9. In einer Population von Schmetterlingen gibt es zwei Varianten: eine mit Flügeln, die ein Muster haben, das sie vor Fressfeinden tarnt (M), und eine ohne Tarnmuster (m). Das Allel M ist dominant über m. Eine Studie untersucht eine Population, in der 60% der Schmetterlinge das Genotyp MM haben, 20% Mm und 20% mm.

Ein(e) Forscher(in) fängt zufällig zwei Schmetterlinge aus dieser Population und möchte die Wahrscheinlichkeit berechnen, dass mindestens einer der gefangenen Schmetterlinge das Tarnmuster hat.
Bestimmen Sie aus dem Ereignisbaum die gesuchte Wahrscheinlichkeit.
Können Sie anhand Ihrer Rechnung eine *einfachere* Berechnung der WSK erkennen?

KAPITEL

13 STATISTIK

13.1 Merkmale

Anmerkung 13.1. Statistik handelt von Gesamtheiten und Merkmalen. Eine Gesamtheit ist eine Menge von Individuen oder Objekten, an denen bestimmte Merkmale beobachtet werden. Die Individuen der Gesamtheit werden daher auch als Merkmalsträger bezeichnet. Die statistische Untersuchung dient der Erkundung der Merkmale in einer Grundgesamtheit. Jedoch steht als Beobachtungsmaterial meist nicht die ganze Grundgesamtheit, sondern nur eine Stichprobe zur Verfügung. Jeder Merkmalsträger besitzt das Merkmal in einer bestimmten Ausprägung.

Definition 13.2. Ein Merkmal hat das Skalenniveau (den Skalentyp)

- *nominal:* wenn sich auf das Merkmal weder eine Rangordnung noch Berechnungen gründen lassen.
- *ordinal:* wenn das Merkmal eine Rangordnung begründet, aber keine Zahlenwerte für sinnvolle Rechnungen liefert.
- *metrisch:* wenn das Merkmal in Zahlen angegeben ist, mit denen Berechnungen sinnvoll sind. Insbesondere müssen Differenzen von Ausprägungen sinnvoll gebildet werden können.

Beispiel 13.3. Eine Konsumentenzeitschrift beurteilt Motorräder. Zu den publizierten Daten gehören folgende Merkmale mit ihren Ausprägungen. Teilen Sie die Merkmale in die drei Skalenniveaus ein.

Merkmal	mögliche Ausprägungen
Marke	BMW, Honda, Kawasaki, Laverda, ...
Typ	R100, Gold Wing, ...
Motorleistung	Zahlenwert in kW
Motorbauart	Reihe, V, Boxer
Hubraum	Zahlenwert in cm^3
Höchstgeschwindigkeit	Zahlenwert in km/h
Anzahl der Zylinder	ganze Zahl
Testurteil	sehr gut, gut, durchschnittlich, weniger gut, mangelhaft

Lösung.

- Merkmale sind nominal: Marke, Typ, Motorbauart.

- Ordinal ist: Testurteil.

- Metrisch sind: Motorleistung, Hubraum, Höchstgeschwindigkeit, Anzahl der Zylinder.

- Das Skalenniveau entscheidet, welche statistischen Methoden auf ein Merkmal anwendbar sind. Die schärfsten Methoden, die auf Zusammenrechnung von Merkmalen (z.B. Mittelwertbildung) beruhen, lassen sich nur für metrische Merkmale anwenden. Für ordinale Merkmale gibt es spezielle (sogenannte parameterfreie) Methoden, die auf Rangordnungen beruhen. Es gibt auch Verfahren, die sogar auf nominale Daten anwendbar sind.

- Jedes metrische Merkmal impliziert eine Rangordnung (der GröSSe nach). Daher kann man alle statistischen Methoden, die für ordinale Merkmale geeignet sind, auch für metrische Merkmale verwenden. Ebenso lässt sich jedes metrische Merkmal und jedes ordinale Merkmal auch wie ein nominales Merkmal behandeln.

- Wenn ein Merkmal durch eine Zahl angegeben wird, muss es noch lange nicht metrisch sein. Beispielsweise sind Bestellnummern in Versandkatalogen nominal, Schulnoten sind ordinal. (Allerdings werden gelegentlich ordinale Merkmale, etwas unexakt, wie metrische behandelt, zum Beispiel bei der Berechnung eines Notenmittelwertes.)

$\square$

Anmerkung 13.4. Ein wichtiges Ziel der Statistik ist die Bestimmung der typischen Ausprägung eines Merkmals (auch bekannt als Lokalisierung oder zentrale Tendenz) und der üblichen Abweichung von dieser Ausprägung (sogenannte Variabilität oder Streuung).

13.2 Häufigkeiten

Definition 13.5. Sei x ein Merkmal, das in einer Gesamtheit (kann auch eine Stichprobe sein) in verschiedenen Ausprägungen $x_1, \dots, x_m$ auftritt. Wir führen die folgenden Bezeichnungen ein:

- Der *Umfang n* der Gesamtheit (Stichprobenumfang, wenn die Gesamtheit eine Stichprobe ist) ist die Anzahl der Merkmalsträger in der Gesamtheit.

- Die *absolute Häufigkeit* a_i der Ausprägung x_i ist die Anzahl der Merkmalsträger in der Gesamtheit, die die Ausprägung x_i tragen.
- Die *relative Häufigkeit* r_i (manchmal auch p_i oder f_i) der Ausprägung x_i ist der Anteil der Merkmalsträger mit Ausprägung x_i, bezogen auf den Umfang der Gesamtheit:

$$r_i = \frac{a_i}{n}.$$

- Ist das Merkmal ordinal oder metrisch, so gibt es auch die textitkumulative absolute Häufigkeit K_i, das ist die Anzahl der Merkmalsträger, deren Ausprägung höchstens x_i ist.
- Ebenfalls für ordinale oder metrische Merkmale gibt es die textitkumulative relative Häufigkeit F_i. Diese ist der Anteil der Merkmalsträger mit Ausprägungen von höchstens x_i, bezogen auf den Umfang der Gesamtheit.

Beispiel 13.6. Ein Tierheim ist unter Verruf geraten. Von den 241 Katzen, die das Heim bewohnen, wird eine zufällige Stichprobe von 20 Katzen entnommen. Erhoben wird (unter anderem) der Bestand an Flöhen, die sich bei sorgfältiger Untersuchung auf jeder Katze finden. Die folgenden Tabelle zeigt das Ergebnis der Untersuchung:

Anzahl an Flöhe x_i	Anzahl der Katzen mit x Flöhen a_i
0	4
1	6
2	5
3	3
4	1
5	0
6	1
mehr	0

Was sind in dieser Studie: Die Grundgesamtheit, die Stichprobe, das Merkmal, die Ausprägungen, die absoluten, relativen, kumulativen absoluten und kumulativen relativen Häufigkeiten?

Lösung. Die Grundgesamtheit sind die 241 Katzen des Tierheims, die Stichprobe die 20 untersuchten Katzen, mit einem Stichprobenumfang von $n = 20$. Das Merkmal ist die Anzahl der Flöhe (mögliche Ausprägungen: $0, 1, 2, \dots$; metrisch). Jede Katze ist ein Merkmalsträger. Für die Häufigkeiten erstellen wir folgende Tabelle:

Merkmal	Häufigkeiten			
	absolut	relativ	abs. kumulativ	rel. kumulativ
x_i	a_i	r_i	K_i	F_i
0	4	$0,20$	4	$0,20$
1	6	$0,30$	10	$0,50$
2	5	$0,25$	15	$0,75$
3	3	$0,15$	18	$0,90$
4	1	$0,05$	19	$0,95$
5	0	$0,00$	19	$0,95$
6	1	$0,05$	20	$1,00$
gesamt	20	$1,00$		

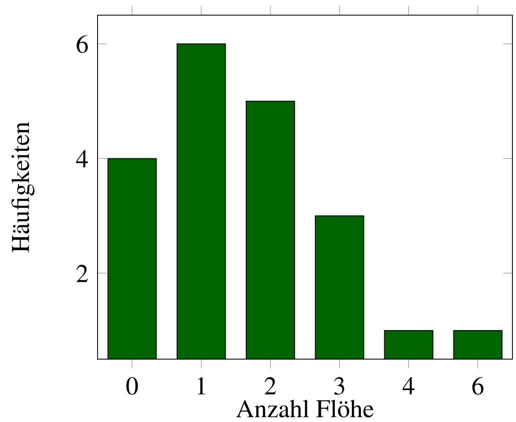
□

Definition 13.7. Ein Stabdiagramm stellt die Häufigkeitsverteilung eines Merkmals grafisch dar. Auf der waagrechten Achse werden die Ausprägungen errichtet. Auf der senkrechten Achse wird eine Skala für entweder die absoluten oder relativen (oder beide) Häufigkeiten eingeteilt. Über jeder Ausprägung wird senkrecht ein Balken mit der Höhe der absoluten oder relativen Häufigkeit erstellt.

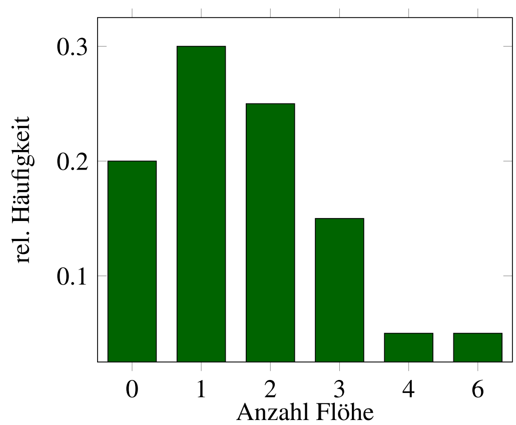
Anmerkung 13.8. Ob als Häufigkeiten die absoluten oder relativen Häufigkeiten verwendet werden, macht nur einen Unterschied für die Zahlenwerte auf der Skala, die Form des Stabdiagrammes bleibt dieselbe.

Beispiel 13.9. Erstellen Sie ein Stabdiagramm fur Beispiel 13.6.

Lösung. Waagrecht werden die Ausprägungen (0 bis 6) eingeteilt. Eine Skala für die absoluten Häufigkeiten muss mindestens Werte von 0 bis 6 umfassen. Dann wird über jeder Ausprägung ein Balken errichtet: Mit 0 Flöhen (Ausprägung $x = 0$) wurden 4 Katzen (absolute Häufigkeit $a = 4$) gefunden, also reicht der Balken bis zur Höhe 4, usw.

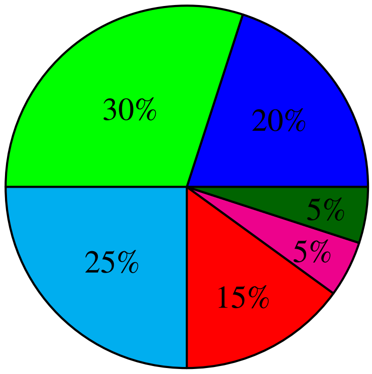


Diese Darstellung hat die Ausprägung 5 Flöhe (welcher die Häufigkeit 0 zukommt) nicht *mitgenommen*. Man kann bezweifeln, dass dadurch die Übersichtlichkeit des Diagrammes erhöht wird. Dies wird übrigens **auch** für alle Möglichkeiten, dass es mehr als 6 Flöhe sind gemacht. Wir könnten das Stabdiagramm natürlich auch mit relativen Häufigkeiten erstellen. Beachten Sie, dass sich nur die Skala ändert:



Als alternative, ebenfalls oft verwendete Darstellung, geben wir noch ein Kreisdiagramm an. Der Kreis wird in Sektoren aufgeteilt, deren Anteil an der Kreisfläche jeweils die relative Häufigkeit der Ausprägung entspricht:

Relative Häufigkeiten



□

Anmerkung 13.10. Manchmal nennt man das Stabdiagramm auch etwas ungenau Histogramm, obwohl ein Histogramm, streng genommen, etwas anders gebaut ist. (Siehe Definition 13.34)

- Im Stabdiagramm entspricht die Höhe des Balkens der Häufigkeit der Klasse.
- Im Histogramm entspricht die Höhe des Balkens der Häufigkeit, gebrochen durch die Klassenbreite. Die Fläche des Balkens entspricht damit der Häufigkeit der Klasse.
- Gelegentlich werden (etwas ungenau) auch Stabdiagramme als Histogramme bezeichnet, denn wenn alle Klassen gleich breit sind, sehen Stabdiagramm und Histogramm gleich aus.

13.3 Mittelwert und Standardabweichung

Definition 13.11. In einer Gesamtheit von n Merkmalsträgern (kann auch eine Stichprobe sein) ist ein metrisches Merkmal mit den Ausprägungen $x_1,\ x_2, \dots, x_n$ vertreten.

- Der *Mittelwert* des Merkmals innerhalb dieser Gesamtheit ist

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\left(x_1 + x_2 + \cdots + x_n\right)$$

- Die *Varianz* des Merkmals innerhalb dieser Gesamtheit ist

$$\begin{aligned}\sigma_x^2 &= \frac{1}{n}\left[(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + \dots (x_n - \overline{x})^2\right] \\ &= \frac{1}{n}\left[x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2\right] - \overline{x}^2\end{aligned}$$

- Die *Standardabweichung* des Merkmals innerhalb dieser Gesamtheit ist die Quadratwurzel der Varianz:

$$\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2}$$

Anmerkung 13.12. Achtung, viele Autoren definieren von Haus aus die Varianz mit dem Nenner $n-1$ statt n. Statistikpakete wie SPSS errechnen auch die Varianz mit dem Nenner $n-1$. Das ist dann angebracht, wenn die Varianz einer Stichprobe berechnet wird, aber damit die Varianz der Grundgesamtheit geschätzt werden soll.

Fakt 13.13. Mittelwert und Varianz kann man auf verschiedene Weise berechnen:

- Wenn eine Tabelle der n einzelnen Merkmalsträger und ihrer Ausprägungen $x_1, \dots, x_n$ gegeben ist:

$$\begin{aligned}\overline{x} &= \frac{1}{n}\left(x_1 + \cdots + x_n\right)\\ \sigma_x^2 &= \frac{1}{n}\left(x_1^2 + \cdots + x_n^2\right) - \overline{x}^2.\end{aligned}$$

- Wenn eine Tabelle der m möglichen Ausprägungen $x_1, \dots, x_m$ und ihrer absoluten Häufigkeiten $a_1, \dots, a_m$ gegeben ist:

$$\begin{aligned}n &= a_1 + \cdots + a_m\\ \overline{x} &= \frac{1}{n}\left(x_1 a_1 + \cdots + x_m a_m\right)\\ \sigma_x^2 &= \frac{1}{n}\left(x_1^2 a_1 + \cdots + x_m^2 a_m\right) - \overline{x}^2.\end{aligned}$$

- Wenn eine Tabelle der m möglichen Ausprägungen $x_1, \dots, x_m$ und ihrer relativen Häufigkeiten $r_1, \dots, r_m$ gegeben ist:

$$\begin{aligned}\overline{x} &= x_1 r_1 + \cdots + x_m r_m\\ \sigma_x^2 &= x_1^2 r_1 + \cdots + x_m^2 r_m - \overline{x}^2.\end{aligned}$$

In folgendem Beispiel wollen wir diese verschiedenen Möglichkeiten zur Berechnung zeigen.

Beispiel 13.14. Zwar sind Noten ein ordinales Merkmal, trotzdem werden oft Mittelwerte der Noten wie für ein metrisches Merkmal bestimmt. Bestimmen Sie Mittelwert und Varianz der Noten aus folgender Gesamtheit:

Andrea	1
Bernhard	2
Claudia	2
Dieter	3
Ewald	1

Lösung. Der Stichprobenumfang ist $n = 5$. Wir erstellen eine Tabelle der Zahlen, die zu summieren sind:

SchülerIn	Note x_i	$x_i - \overline{x}$	$(x_i - \overline{x})^2$
Andrea	1	$-0,8$	$0,64$
Bernhard	2	$0,2$	$0,04$
Claudia	2	$0,2$	$0,04$
Dieter	3	$1,2$	$1,44$
Ewald	1	$-0,8$	$0,64$
Summe	9		$2,80$
durch $n = 5$	$1,8$ $(= \overline{x})$		$0,56$ $(= \sigma_x^2)$

Damit ist der Mittelwert $1,8$, und die Varianz ist $0,56$. Die Standardabweichung ist $\sqrt{0,56} \approx 0,75$.

Wir zeigen **die zweite Variante** der Rechnung, die dasselbe Ergebnis liefert, aber etwas bequemer ist:

SchülerIn	Note x_i	x_i^2
Andrea	1	1
Bernhard	2	4
Claudia	2	4
Dieter	3	9
Ewald	1	1
Summe	9	19
durch $n = 5$	$1,8$ $(= \overline{x})$	$3,8$
$-\overline{x}^2$		$-3,24$
		$0,56$ $(= \sigma_x^2)$

Als **dritte Variante:** Man kann statt mit der Tabelle der einzelnen Merkmalsträger auch mit einer Tabelle der möglichen Ausprägungen mit ihren Häufigkeiten ausgehen. Man darf aber nicht vergessen, dass Ausprägungen, die mehrfach vorkommen, auch mehrfach gezählt werden müssen:

Note x_i	Häufigkeit a_i	$x_i \cdot a_i$	$x_i^2 \cdot a_i$
1	2	2	2
2	2	4	8
3	1	3	9
Summe	5 $(= n)$	9	19
durch n:	1	$1,8$ $(= \overline{x})$	$3,8$
$-\overline{x}^2$			$-3,24$
			$0,56$ $(= \sigma_x^2)$

Beginnt man mit einer Tabelle der relativen Häufigkeiten, erspart man sich am Ende die Division durch n:

Note	Häufigkeit		
x_i	r_i	$x_i \cdot a_i$	$x_i^2 \cdot a_i$
1	$0,4$	$0,4$	$0,4$
2	$0,4$	$0,8$	$1,6$
3	$0,2$	$0,6$	$1,8$
Summe	1	$1,8$ $(= \overline{x})$	$3,8$
$-\overline{x}^2$			$-3,24$
			$0,56$ $(= \sigma_x^2)$

□

Beispiel 13.15. Bestimmen Sie Mittelwert und Standardabweichung des Merkmals „Anzahl der Flöhe“ aus Beispiel 13.6

Anzahl an Flöhe	Anzahl der Katzen mit x Flöhen
x_i	a_i
0	4
1	6
2	5
3	3
4	1
5	0
6	1
mehr	0

Lösung. Wir gehen also diesmal von einer Tabelle mit absoluten Häufigkeiten aus:

Ausprägung	Häufigkeit		
x_i	a_i	$x_i \cdot a_i$	$x_i^2 \cdot a_i$
0	4	0	0
1	6	6	6
2	5	10	20
3	3	9	27
4	1	4	16
5	0	0	0
6	1	6	36
Summe	20 $(= n)$	35	105
durch n:	1	$1,75$ $(= \overline{x})$	$5,25$
$-\overline{x}^2$			$-3,0625$
			$2,1875$ $(= \sigma_x^2)$

Eine Katze hat im Durchschnitt $1,75$ Flöhe. Die Varianz beträgt $2,19$ Quadratflöhe, die Standardabweichung ist die Wurzel der Varianz und beträgt $1,48$ Flöhe. □

Beispiel 13.16. Mit einem fairen Würfel wird gewürfelt. Berechnen Sie Mittelwert und Varianz der Augenzahl.

Lösung. Wir erstellen eine Tabelle der möglichen Augenzahlen mit ihren relativen Häufigkeiten. Da der Würfel fair ist, sind alle Augenzahlen gleich häufig.

Augenzahl x_i	Häufigkeit r_i	$x_i \cdot r_i$	$x_i^2 \cdot r_i$
1	1/6	1/6	1/6
2	1/6	2/6	4/6
3	1/6	3/6	9/6
4	1/6	4/6	16/6
5	1/6	5/6	25/6
6	1/6	6/6	36/6
Summe	1	21/6 $= 3,5$ $(= \overline{x})$	91/6 $\approx 15,17$
$-\overline{x}^2$			$-12,25$
			$2,92$ $(= \sigma_x^2)$

Der Mittelwert beträgt $3,5$, die Varianz $2,92$, die Standardabweichung $\sqrt{2,92} \approx 1,71$. □

Fakt 13.17.

- Der Mittelwert ist eine KenngröSSe der Lage, er gibt den Durchschnittswert des Merkmals innerhalb der betrachteten Gesamtheit an.
- Varianz und Standardabweichung sind KenngröSSen der Streuung. Je weiter und öfter die Daten vom Mittelwert abweichen, desto gröSSer sind Varianz und Standardabweichung.
- Die Varianz ist immer positiv. Sie ist nur dann gleich 0, wenn alle Merkmalsträger exakt denselben Wert als Ausprägung haben.

Anmerkung 13.18. Die Bedeutung der Varianz kann man leicht aus der Formel ablesen:

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{n}\left[(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + \cdots + (x_n - \overline{x})^2\right].$$

Summiert werden die Quadrate der Abweichung der einzelnen Ausprägung vom Mittelwert. Diese Quadrate sind alle positiv. Die Summe Null kann nur entstehen, wenn alle Summanden gleich null sind, also alle Merkmalsträger als Ausprägung genau den Mittelwert haben. Je häufiger groSSe Abweichungen der einzelnen Ausprägungen vom Mittelwert sind, desto gröSSer fällt auch die Summe aus.

Während der Mittelwert leicht zu interpretieren ist, ist die Aussage: „Je mehr die Daten streuen, desto gröSSer ist die Standardabweichung“noch zu vage, um sich aus einer Zahl eine Vorstellung zu machen, wie stark die Daten streuen. Hier hilft die Faustregel aus folgendem Fakt:

Fakt 13.19. Zur Interpretation der Standardabweichung gilt die folgende Faustregel: Ist ein metrisches Merkmal annähernd normalverteilt (d.h., das Histogramm hat ungefähr die Form einer GauSSschen Glockenkurve) mit Mittelwert x und Standardabweichung σ, so finden sich

- Im Intervall $x \in [\overline{x} - \sigma, \overline{x} + \sigma]$ circa 68 Prozent der Merkmalsträger.
- Im Intervall $x \in [\overline{x} - 2\sigma, \overline{x} + 2\sigma]$ circa 95 Prozent der Merkmalsträger.
- Im Intervall $x \in [\overline{x} - 3\sigma, \overline{x} + 3\sigma]$ circa $99,7$ Prozent der Merkmalsträger.

Beispiel 13.20. Bei Messungen an vielen Wasserproben wurde ein mittlerer Schadstoffgehalt von 5 mg/l bei einer Standardabweichung von 2 mg/l festgestellt. Sind Proben mit einem Schadstoffgehalt von mehr als 9 mg/l selten?

Lösung. Wir überprüfen, um welches Vielfache der Standardabweichung der Wert 9 mg/l vom Mittelwert abweicht:

$$\frac{9-5}{2} = 2$$

Abweichungen um die doppelte Standardabweichung sind laut Faustregel in 5% aller Fälle zu erwarten. Davon wird die Hälfte der Abweichungen nach oben, die andere nach unten gehen. Also schätzen wir grob, dass in ungefähr $2,5\%$ aller Messungen ein Ergebnis gröSSer als 9 mg/l herauskommen wird. □

Beispiel 13.21. Die Tageshöchsttemperatur an sonnigen Tagen in einer Stadt wird mit Mittelwert 36 Grad bei einer Standardabweichung von 3 Grad angegeben. Interpretieren Sie dieses Ergebnis.

Lösung. An circa 68% aller sonnigen Augusttage hat in dieser Stadt die Tageshöchsttemperatur einen Wert zwischen 33 und 39 Grad. An circa 95% aller sonnigen Augusttage liegt die Tageshöchsttemperatur zwischen 30 und 42 Grad. □

13.4 Median, Quartile und Perzentile

Wir betrachten eine Stichprobe des metrischen Merkmals „Anzahl der Flöhe“bei 15 Katzen

$$6, 0, 2, 2, 4, 6, 5, 2, 1, 2, 6, 5, 5, 6, 0$$

Das Ziel ist nun einen Wert für die Anzahl der Flöhe zu finden, so dass die Anzahl der Katzen die mehr Flöhe als dieser Wert haben genauso groSS ist wie die Anzahl der Katzen die weniger Flöhe als dieser Wert haben. In anderen Worten der Wert soll die Stichprobe in zwei gleich groSSe Mengen teilen. Dieser Wert steht also *in der Mitte* der Stichprobe, daher auch der Name Median.

Um diesen Wert leicht zu finden wird die Stichprobe sortiert. Dies liefert:

$$0, 0, 1, 2, 2, 2, 2, \quad 4, \quad 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6$$

Dann ist klar dass dass die Ausprägung 4 der Median ist weil 7 Katzen weniger und auch 7 Katzen mehr Flöhe haben.

Was wäre aber bei einer Stichprobe passiert bei der nur die ersten 14 Katzen beobachtet worden wären, d.h. die letzte Katze mit 0 Flöhen wäre nicht in der Stichprobe. Das sortieren liefert

$$0, 0, 1, 2, 2, 2, 2, \quad 4, 5, 5, 5, 6, 6, 6$$

Kein Wert liegt genau in der Mitte. Was ist der Median in diesem Fall? Der Grundgedanke ist es einen Scheidewert zu finden der die (sortierte) Stichprobe in zwei groSSe Teile teilt. Grundsätzlich würde jeder Wert der gröSSer als 2 und kleiner als 4 ist diese Funktion erfüllen, zum Beispiel 3. Diese Überlegungen führen zu folgender Definition.

Definition 13.22. Sei x ein ordinales oder metrisches Merkmal und $x_1, x_2, \dots, x_n$ eine aufsteigend sortierte Version der Stichprobe dieses Merkmals. Der Median der Stichprobe ist dann

$$\text{Median} = \begin{cases} x_{(n+1)/(2)} & \text{für } n \text{ ungerade} \\ \frac{1}{2}\left(x_{n/2} + x_{n/2+1}\right) & \text{für } n \text{ gerade} \end{cases}.$$

Oft ist die Stichprobe aber nicht explizit gegeben sondern nur über eine Tabelle von Ausprägungen und zugehörigen absoluten Häufigkeiten:

Definition 13.23. Sei x ein ordinales oder metrisches Merkmal mit (aufsteigend sortierten) Ausprägungen $x_1, x_2, \dots$. Falls die kumulative relative Häufigkeit F_i den Wert $0,5$ nicht annimmt, so ist der Median der kleinste Wert bei dem F_i den Wert $0,5$ übersteigt. Falls F_i den Wert $0,5$ annimmt so wird der Mittelwert der kleinsten Ausprägung für die dies der Fall ist und der nächstgröSSeren in der Stichprobe vorhandenen Ausprägung als Median der Stichprobe definiert

Analog kann man die Idee übertragen indem man in die Stichprobe in zwei ungleich groSSe Mengen teilt. Diese Idee führt zu sogenannten Quantilen/Perzentilen.

Definition 13.24. Sei a eine Zahl zwischen 0 und 1 Das a-Quantil (100 a%-Perzentil). Falls die kumulative absolute Häufigkeit F_i bei keiner Ausprägung den Wert a erreicht wird der kleinste Wert bei dem F_i den Wert a übersteigt als a-Quantil definiert. Falls F_i den Wert a annimmt, so wird der Mittelwert der kleinsten Ausprägung für die dies der Fall ist und der nächstgröSSeren in der Stichprobe vorhandenen Ausprägung als a-Quantil der Stichprobe definiert. Für $a = 0$ das Minimum also die kleinste Ausprägung in der Stichprobe als a-Quantil definiert. Für $a = 1$ wird Maximum also die gröSSte Ausprägung in der Stichprobe als a-Quantil definiert.

Die Definition wird etwas klarer wenn eine Zahl für a gewählt wird, z.B. das 20%-Perzentil bzw. das $0,2$-Quantil soll die Stichprobe so teilen, dass etwa 20% der Stichprobe unter diesem Wert liegen und etwa 80% über diesem Wert liegen.

Anmerkung 13.25. Die Definition des Quantils ist in der Literatur nicht einheitlich, es gibt mindestens acht übliche Definitionen (vgl. „Quantile“in der englischen Wikipedia [1]).

Definition 13.26. Einige Perzentile haben spezielle Namen:

- 25% Erstes Quartil
- 50% Zweites Quartil oder Median

- 75% Drittes Quartil

Beispiel 13.27. Wir betrachten die Stichprobe von Katzen aus Beispiel 13.6. Zu Ihrer Bequemlichkeit wird hier die Häufigkeitstabelle des Merkmals „Anzahl der Flöhe auf der Katze“ wiederholt:

Merkmal	Häufigkeiten			
	absolut	relativ	abs. komulativ	rel. komulativ
x_i	a_i	r_i	K_i	F_i
0	4	$0,20$	4	$0,20$
1	6	$0,30$	10	$0,50$
2	5	$0,25$	15	$0,75$
3	3	$0,15$	18	$0,90$
4	1	$0,05$	19	$0,95$
5	0	$0,00$	19	$0,95$
6	1	$0,05$	20	$1,00$
gesamt	20	$1,00$		

Wo liegen das Minimum, Maximum, Median, die sonstigen Quartile, 30%-Perzentil und 1%-Perzentil, dieses Merkmals?

Lösung.

Perzentil	Ausprägung
Minimum (0%)	0 Flöhe
Maximum (100%)	6 Flöhe
Median (50%)	$1,5$ Flöhe
1. Quartil (25%)	1 Floh
3. Quartil (75%)	$2,5$ Flöhe
30%-Perzentil	1 Floh
1%-Perzentil	0 Flöhe

Wir erklären einige Ergebnisse: Minimum und Maximum sind der kleinste (0) und der gröSSte (6) Wert, der in der Stichprobe angenommen wird. Die kumulative relative Häufigkeit nimmt den Wert $0,5$ bei 1 Floh an. Da wir einen geraden Stichprobenumfang haben ist der Median der Mittelwert aus 1 und 2. Die nächstgröSSere in der Stichprobe vorhandene Ausprägung. Im 30%-Perzentil überschreitet die kumulative relative Häufigkeit erstmals den Wert $0,3$. □

Beispiel 13.28. Das 90%-Perzentil der KörpergröSSe von Kindern eines bestimmten Alters liegt bei 120 cm. Was heiSSt das?

Lösung. Das heiSSt, bei 120 cm liegt die Grenze zwischen den unteren 90% und den gröSSten 10% der Kinder. Ein Zehntel der Kinder ist gröSSer als 120 cm, 9/10 der Kinder sind kleiner. □

Definition 13.29. Für ein metrisches Merkmal definieren wir:

- Die *Spannweite* ist die Differenz zwischen Maximum und Minimum.
- Der *Quartilsabstand* ist die Differenz zwischen drittem und erstem Quartil.

Beispiel 13.30. Für das Gewicht von Äpfeln einer gewissen Sorte wird angegeben:

Median	80 g
Spannweite	50 g
Quartilsabstand	20 g

Was bedeutet das?

Lösung. Die Hälfte der Apfel dieser Sorte ist leichter als 80 g. Der Gewichtsunterschied zwischen dem schwersten und leichtesten Apfel beträgt 50 g. Lässt man von den Äpfeln das leichteste und schwerste Viertel weg, so unterscheiden sich die Gewichte der verbleibenden Apfel um höchstens 20 g. □

Fakt 13.31.

- Der Median ist eine KenngröSSe der Lage. Er gibt die Grenze zwischen der unteren und oberen Hälfte der Merkmalsträger an.
- Quartilsabstand und Spannweite sind KenngröSSen der Streuung, sie sagen aus, wie stark die einzelnen Daten voneinander abweichen.
- Maximum, Minimum und die Spannweite beziehen sich auf die extremen Fälle, und reagieren damit sehr empfindlich auf „AusreiSSer“. Dagegen sind Median, Quartile und Quartilsabstand sehr unempfindlich gegen AusreiSSer.

13.5 Klassifizierte Daten

Algorithmus 13.32. Sind sehr viele verschiedene Ausprägungen eines Merkmals möglich, so fasst man die Daten in Klassen zusammen. (Das ist vor allem häufig bei metrischen Merkmalen.)

Die Klassenbreite ist der Abstand von der kleinsten zur gröSSten Ausprägung innerhalb einer Klasse. Wenn kein triftiger Grund für anderes Vorgehen besteht, wählt man gerne alle Klassen gleich breit.

Ob man eine feine oder grobe Einteilung (viele schmale oder wenige breite Klassen) wählt, hängt von der Anwendung ab:

- Einteilung mit wenigen Klassen: Vorteil: Übersichtlich, Zufallseffekte werden unterdrückt. Nachteil: Information geht verloren.
- Einteilung in viele Klassen: Vorteil: Genaue Information bleibt erhalten. Nachteil: Unübersichtlich. Bei Aufteilung von wenigen Merkmalsträgern in sehr vielen Klassen kann es eher ein Zufallstreffer sein, welche Klassen stark besetzt sind und welche nicht.
- Tipp: Etwa 7 Klassen für eine übersichtliche Darstellung.

Beispiel 13.33. An 120 Libellen der Art *Megaloprepus coerulatus* wurden die Flügelspannweiten vermessen. In Klassen der Breite 0, 5 cm eingeteilt, ergaben sich folgende Häufigkeiten:

Spannweite cm	$16,0 - 16,5$	$16,5 - 17,0$	$17,0 - 17,5$	$17,5 - 18,0$	$18,0 - 18,5$
relative Häufigkeiten	$0,075$	$0,125$	$0,375$	$0,325$	$0,100$

- Wie viel Prozent der Libellen hatten eine Spannweite von höchstens 17 cm?
- Stellen Sie diese Daten in einem Stabdiagramm mit absoluten Häufigkeiten dar.

Lösung.

- Wir bilden die kumulative relative Häufigkeit bis 17 cm:

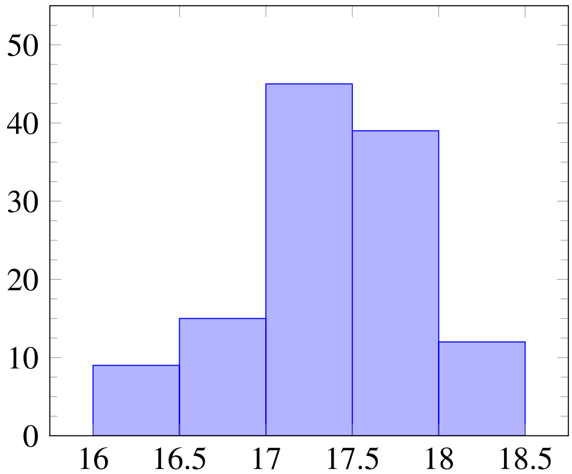
$$0,075 + 0,125 = 0,2 = 20\%$$

  Also haben 20% der Libellen eine Spannweite bis 17 cm.

- Zunächst geben wir die absoluten Häufigkeiten. Da der Stichprobenumfang 120 ist, ergeben sich die absoluten Häufigkeiten als 120× die relativen Häufigkeiten

Ausprägung	rel. H.	abs. H.
$16,0 - 16,5$	$0,075$	9
$16,5 - 17,0$	$0,125$	15
$17,0 - 17,5$	$0,375$	45
$17,5 - 18,0$	$0,325$	39
$18,0 - 18,5$	$0,100$	12
gesamt	$1,000$	120

Wir erstellen nun das Stabdiagramm. Waagrecht umfasst die Skala der Ausprägungen den Bereich von $16,0$ bis $18,5$. Die senkrechte Skala der absoluten Häufigkeiten geht von 0 bis 45. Die 5 Klassen sind Intervalle der Breite $0,5$, die direkt aneinander anschlieSSen. Wir zeichnen die Stäbe so, dass sie über der ganzen Breite der Klassen aufgebaut sind, sodass sie direkt aneinander anschlieSSen.



Tatsächlich lässt sich dieses Stabdiagramm auch im strengen Sinn (siehe unten) als Histogramm auffassen, weil die Klassen gleich breit sind. □

Definition 13.34. Ein *Histogramm* stellt die Häufigkeitsverteilung eines metrischen Merkmals, welches in Klassen geteilt ist, grafisch dar. Die waagrechte Skala umfasst sämtliche Klassen der Ausprägung. Über jeder Ausprägung wird über die volle Klassenbreite senkrecht ein Balken erstellt, sodass die Fläche des Balkens der relativen Häufigkeit der Klasse entspricht.

Anmerkung 13.35. Sind alle Klassen gleich breit, sieht das Histogramm genau wie das Stabdiagramm aus, wenn die Stäbe so breit gewählt sind, dass sie aneinander anstoSSen.

Beispiel 13.36. Bestimmen Sie Mittelwert, Varianz und Standardabweichung der Flügelspannweite von Libellen aus Beispiel 13.33:

Spannweite cm	$16,0-16,5$	$16,5-17,0$	$17,0-17,5$	$17,5-18,0$	$18,0-18,5$
relative Häufigkeiten	$0,075$	$0,125$	$0,375$	$0,325$	$0,100$

Lösung. Als repräsentativen Zahlenwert für jede Klasse nehmen wir den Mittelpunkt der Klasse, z.B. $16,25$ für das Intervall $16-16,5$. Damit erhalten wir folgende Tabelle:

Spannweite x_i	Häufigkeit r_i	$x_i \cdot r_i$	$x_i^2 \cdot r_i$
$16,25$	$0,075$	$1,21875$	$19,80469$
$16,75$	$0,125$	$2,09375$	$35,07031$
$17,25$	$0,375$	$6,46875$	$111,58594$
$17,75$	$0,325$	$5,76875$	$102,39531$
$18,25$	$0,100$	$1,82500$	$33,30625$
Summe	1	$17,37500$	$302,16250$
		$(=\overline{x})$	$301,89063$
			$0,27188$
			$(=\sigma_x^2)$

Die mittlere Flügelspannweite beträgt $17,375\,\mathrm{cm}$, bei einer Varianz von $0,27\,\mathrm{cm}^2$ und einer Standardabweichung von $0,52\,\mathrm{cm}^2$. □

Beispiel 13.37. Bestimmen Sie Maximum, Minimum, Median, Quartile, Quartilsabstand und Spannweite für die Spannweiten von Libellen aus Beispiel 13.33:

Spannweite cm	$16,0-16,5$	$16,5-17,0$	$17,0-17,5$	$17,5-18,0$	$18,0-18,5$
relative Häufigkeiten	$0,075$	$0,125$	$0,375$	$0,325$	$0,100$

Lösung. Wir benötigen zunächst die relativen kumulativen Häufigkeiten:

Ausprägung	rel. H.	rel. kom. H.
$16,0-16,5$	$0,075$	$0,075$
$16,5-17,0$	$0,125$	$0,200$
$17,0-17,5$	$0,375$	$0,575$
$17,5-18,0$	$0,325$	$0,900$
$18,0-18,5$	$0,100$	$1,000$

Wir erhalten folgende Ergebnisse

Minimum	$16,0$	
Maximum	$18,5$	
Spannweite	$2,5$	
Median	$17,25$	(stellvertretend für die Klasse $17,0-17,5$)
1. Quartil	$17,25$	(stellvertretend für die Klasse $17,0-17,5$)
3. Quartil	$17,75$	(stellvertretend für die Klasse $17,5-18,0$)
Quartilsabstand	$0,5$	

$\square$

Anmerkung 13.38. Statistikpakete verwenden eine modifizierte, feinere Variante der Berechnung von Perzentilen von metrischen Daten, welche in Klassen geteilt sind. Diese Methode wurde auch im obigen Beispiel verschiedene Werte für den Median und das erste Quartil errechnen. Wir begnügen uns hier mit der Anmerkung, dass es das gibt.

13.6 Beispiele zum Vorbereiten

Beispiel 13.39. Auf mehreren Almen wurde die Population der Rote Waldameise (Formica rufa) überprüft. Man konnte mithilfe der Messmethode aus 1.9 folgende Tabelle erstellen:

Population (in hunderttausend)	$0-2,5$	$2,5-5$	$5-7,5$	$7,5-10$	$10-12,5$
Anzahl an Kolonien	2	16	35	21	8

- Stellen Sie die Daten durch ein Histogramm mit relativen Häufigkeiten dar.
- Bestimmen Sie den Modal.
- Berechnen Sie das erste Quartil.
- Berechnen Sie den Mittelwert.
- Berechnen Sie die Standardabweichung.

Lösung:

13.7 Weitere Beispiele zum Üben

Beispiel 13.40. Bei einer Herde afrikanischer Elefanten (Loxodonta africana) wurde die Gesamtlänge jedes Tieres von der Rüssel- bis zur Schwanzspitze mit folgendem Ergebnis vermessen:

Länge (m)	$0 - 1,5$	$1,5 - 3$	$3 - 4,5$	$4,5 - 6$	$6 - 7,5$
Anzahl	8	14	19	12	3

- Stellen Sie die Daten durch ein Histogramm mit relativen Häufigkeiten dar.
- Bestimmen Sie den Modal.
- Berechnen Sie das erste Quartil.
- Berechnen Sie den Mittelwert.
- Berechnen Sie die Standardabweichung.

Beispiel 13.41. Bei einer Horde von 32 Schimpansen (Pan satyrus) wurde die Körperlänge jedes Tieres mit folgendem Ergebnis vermessen:

Länge (m)	$0 - 0,3$	$0,3 - 0,6$	$0,6 - 0,9$	$0,9 - 1,2$	$1,2 - 1,5$
relative HK	$0,25$	$0,375$	$0,1875$	$0,125$	$0,0625$

- Stellen Sie die Daten durch ein Histogramm mit absoluten Häufigkeiten dar.
- Bestimmen Sie den Modal.
- Berechnen Sie das dritte Quartil.
- Berechnen Sie den Mittelwert.
- Berechnen Sie die Standardabweichung.

Lösungen

Proof of Beispiel 1.9. Es befinden sich 2000 Arbeiterinnen im Bienenstock! □

Proof of Beispiel 1.10.

- Wenn wir eine konstante Aussterberate annehmen, so können wir den Schluss

  $$\begin{cases} 130 \text{ Arten} \ldots 1\text{d} \\ 15 \cdot 10^6 \text{ Arten} \ldots x \end{cases}$$

  aufstellen. Wir erhalten

  $$x = \frac{15 \cdot 10^6}{130} = 115\,385\,\mathrm{d} = 316\,\mathrm{a}.$$

  Es würde in etwa 316 Jahre dauern, bis alle Arten auf der Erde verschwunden sind.
  Anmerkung: ich rechne dies gerade zum ersten Mal nach, und bin wirklich schockiert über dieses Ergebnis.

- Die Rate müsste über den gesamten Zeitraum konstant bleiben. Dies kann jedoch nicht angenommen werden, da Tierarten voneinander abhängig sind (d.h.: Der Gepard hängt von der Antilope ab, sonst verhungert er.). Daher ist die Annahme, dass wenn ich einen Tag warte, genau 130 Arten verschwinden nicht korrekt. Was die Sache leider nicht besser, sondern noch schlechter macht.

□

Proof of Beispiel 1.11. Das Gemisch hat eine Konzentration von 11% Volumsprozent. □

Proof of Beispiel 1.12. Man benötigt 40 ml von A und 60 ml von $\boldsymbol{B}$. □

Proof of Beispiel 1.13. Zuerst rechnen wir ein Jahr in Sekunden um:

$$1\,\mathrm{a} = 365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60\,\mathrm{s} = 31,536 \cdot 10^6\mathrm{s}$$

Damit können wir die Einheit durch eine Schlussrechnung umrechnen:

$$\begin{aligned} 1\,\mathrm{s} \ldots \ldots 3 \cdot 10^5\,\mathrm{km} \\ 31,536 \cdot 10^6\mathrm{s} \ldots \ldots x\,\mathrm{km} \end{aligned}$$

Womit wir $x = \frac{3 \cdot 10^5 \mathrm{km}}{\mathrm{s}} \cdot 31,536 \cdot 10^6\mathrm{s} \approx 9,5 \cdot 10^{12}\mathrm{km}$ erhalten. □

Proof of Beispiel 1.14. Pro Tag werden 54 795 kJ produziert.
Das Feld könnte $\approx 5,5$ Menschen ernähren. □

Proof of Beispiel 1.15. $50\,\mathrm{m}^3$. □

Proof of Beispiel 1.16.

$$\begin{array}{lll} 1\,\text{Zelle} & \ldots & 0,1 \times 0,05 \times 0,05\mathrm{mm}^3 = 0,00025\mathrm{mm}^3 \text{ Verdünnung} \\ 80\,\text{Zellen} & \ldots & 80 \times 0,00025 = 0,02\mathrm{mm}^3 \text{ Verdünnung} \\ 80\,\text{Zellen} & \ldots & \dfrac{0,02}{200} = 0,0001\,\mathrm{mm}^3 \text{ unverdünntes Blut} \end{array}$$

Und damit

$$\begin{array}{lcr} 390\,\text{Erythrozyten} & \dots & 0{,}0001\,\text{mm}^3\ \text{Blut} \\ \dfrac{390}{0{,}0001} = 3{,}9\ \text{Millionen Erythrozyten} & \dots & 1\,\text{mm}^3\ \text{Blut} \end{array}$$

Es muss nur die ausgezählte Erythrozytenzahl der 80 Zellen mit 10000 multipliziert werden. Der Proband hat eine Anämie. Normal sind 4 – 5 Millionen Erythrozyten pro mm³. □

Proof of Beispiel 1.17. Er hatte ursprünglich 2 Kilogramm Cocain. □

Proof of Beispiel 1.18. Die selbe Menge Tracer, die wir injizieren, ist nach der Wartezeit auf das ganze Plasma verteilt. Wir berechnen zuerst die injizierte Stoffmenge (letzte Spalte), und dann das Plasmavolumen nach der Formel

$$\text{Volumen} = \frac{\text{Tracermenge}}{\text{Konzentration}}$$

	Volumen [ml]	Konzentration [mmol/ml]	Menge Tracer [ml]
Injektion	$0{,}5$	10	5
Plasma	$\frac{5}{0{,}0125} = 400$	$0{,}0125$	5

Nun folgt das Blutvolumen mittels Schlussrechung/Dreisatz (oder Prozentrechnung):

$$\begin{array}{c} 60\,\% \dots\dots 400\,\text{ml} \\ 100\,\% \dots\dots y\,\text{mg} \end{array}$$

Und damit entsprechen 100% Blut $400 \cdot \frac{100}{60} \approx 666\,\text{ml}$. □

Proof of Beispiel 1.19. 25 Volumsprozent. □

Proof of Beispiel 1.20. $1{,}5\,\text{l}$ von A und $0{,}5\,\text{l}$ von B. □

Proof of Beispiel 1.21. $0{,}008\,\text{kg/l}$. □

Proof of Beispiel 1.22. Machen Sie eine Probe um sich zu überprüfen! □

Proof of Beispiel 1.23. Machen Sie eine Probe um sich zu überprüfen! □

Proof of Beispiel 1.24. Folgende Tabelle beschreibt das *Problem*:

Name	Volumen [ml]	Konzentration [g/ml]	gelöste Menge [g]
Pfirsich	p	$\frac{1}{2}$	$\frac{p}{2}$
Orange	o	$\frac{1}{4}$	$\frac{o}{4}$
Wasser	w	0	0
Saft	1000	$\frac{1}{5}$	200

Mit der Angabe bekommt man folgende 3 Gleichungen:

$$5p = o$$
$$p + o + w = 1000$$
$$\frac{p}{2} + \frac{o}{4} = 200$$

Welche dann gelöst zu $p = 114,29$ ml, $o = 571,43$ ml und $w = 314,29$ ml führt. □

Proof of Beispiel 1.25. Es gibt mehr als eine mögliche korrekte Antwort! □

Proof of Beispiel 2.5.

1. $\frac{82}{15}$
2. $\frac{36}{7}$
3. 0

□

Proof of Beispiel 2.6.

1. $13x$
2. $a + b + c$
3. $\frac{ac-bd}{(a+d)(b+c)}$
4. $\left(\frac{x}{x-y}\right)^2$
5. 1. Man darf die Wurzel nicht auf die Summe aufteilen; 2. Man darf nicht aus der Summe kürzen; 3. Man darf die Summe im Nenner nicht als zwei Brüche schreiben.

□

Proof of Beispiel 2.17. 600 PatientInnen! □

Proof of Beispiel 2.18.

Jahr	Abteilung	Angestellte	Prozent Frauen	Anzahl Frauen
2010	A	200	20%	40
	B	300	60%	180
	gesamt	500	44%	220
2020	A	1000	25%	250
	B	500	70%	350
	gesamt	1500	40%	600

Obwohl der relative Frauenanteil in jeder Abteilung gestiegen ist, ist er im gesamten Betrieb gesunken. Dieses scheinbar paradoxe Ergebnis kommt daher, dass die Abteilung mit dem geringeren Frauenanteil viel stärker expandiert hat als die Abteilung mit dem hohen Frauenanteil. □

Proof of Beispiel 2.19. • Wir wissen, dass eine Stunde 3600 Sekunden hat (= $60 \cdot 60$), daher bekommen wir

$$1\,\mathrm{kVh} = 1 \cdot 10^3\,\mathrm{V} \cdot 3600\$, \mathrm{s} = 3,6 \cdot 10^6\,\mathrm{Vs}$$

- Wir wissen, dass Nano für $^10^{-9}$ steht, daher bekommen wir

$$1\,\mathrm{nm}^2 = 1\,(10^{-9}\,\mathrm{m})^2 = 10^{-18}\,\mathrm{m}^2$$

- Um diese Aufgabe zu lösen, müssen wir nur die beiden vorangegangenen Punkte vereinen:

$$1, \frac{\mathrm{kVh}}{\mathrm{nm}^2} = \frac{3,6 \cdot 10^6\,\mathrm{Vs}}{10^{-18}\,\mathrm{m}^2} = 10^{24}\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{m}^2}$$

$$\frac{\mathrm{kVh}}{\mathrm{nm}^2} = \frac{10^3\,\mathrm{V}\ \cdot 3600\,\mathrm{s}}{(10^{-9}\mathrm{m})^2} = 3,6 \cdot \frac{10^6\,\mathrm{Vs}}{10^{-18}\mathrm{m}^2} = 3,6 \cdot 10^{24}\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{m}^2}$$

□

Proof of Beispiel 2.20. Der Wirkstoffgehalt der Verdünnungen folgt einer Zehnerpotenzenreihe:

$$\begin{array}{cccccc} 1\,\mathrm{ml} & D1 & \ldots & 0,1\,\mathrm{ml} & \text{Wirkstoff} \\ 1\,\mathrm{ml} & D2 & \ldots & 0,01\,\mathrm{ml} & \text{Wirkstoff} \\ 1\,\mathrm{ml} & D3 & \ldots & 0,001\,\mathrm{ml} & \text{Wirkstoff} \\ & \vdots & & \vdots & \\ 1\,\mathrm{ml} & Dn & \ldots & 10^{-n}\,\mathrm{ml} & \text{Wirkstoff} \end{array}$$

Ein Molekül des Wirkstoffs hat ungefähr das Volumen $45 \cdot 10^{-23}$ml. Damit ergibt sich folgende Schlussrechnung für eine $D4$ Verdünnung:

$$\begin{aligned} 45 \cdot 10^{-23}\mathrm{ml} \ldots \ldots &\ 1\,\text{Molekül} \\ 10^{-4}\mathrm{ml} \ldots \ldots &\ y\,\text{Moleküle} \end{aligned}$$

und damit sind $\frac{10^{-4}}{45 \cdot 10^{-23}} \approx 2,2 \cdot 10^{17}$ Moleküle in der Verdünnung.
Analog können wir für $D23$ nachrechnen:

$$\begin{aligned} 45 \cdot 10^{-23}\mathrm{ml} \ldots \ldots &\ 1\,\text{Molekül} \\ 10^{-23}\mathrm{ml} \ldots \ldots &\ y\,\text{Moleküle} \end{aligned}$$

und damit sind $\frac{10^{-23}}{45 \cdot 10^{-23}} \approx 2,2 \cdot 10^{-2}$ Moleküle in der Verdünnung. Wenn Sie die Anzahl an Moleküle in einer $D23$ Verdünnung als Zahl angeben müssten, was würden Sie schreiben? □

Proof of Beispiel 2.21.

-
$$\begin{aligned} \text{wiss:} \quad & a = 2,3522515426 \cdot 10^{10} \\ \text{tech:} \quad & a = 23,522515426 \cdot 10^{9} \\ \text{wiss:} \quad & b = 1,25 \cdot 10^{-3} \\ \text{tech:} \quad & b = 1,25 \cdot 10^{-3} \\ \text{wiss:} \quad & c = 2 \\ \text{tech:} \quad & c = 2 \\ \text{wiss:} \quad & d = 2,000000000001 \cdot 10^{8} \\ \text{tech:} \quad & d = 200,0000000001 \cdot 10^{6} \end{aligned}$$

-
$$\begin{aligned} \text{tech:} \quad & a = 23,522515426\,\mathrm{GK} \\ \text{tech:} \quad & b = 1,25\,\mathrm{mK} \\ \text{tech:} \quad & c = 2\,\mathrm{K} \\ \text{tech:} \quad & d = 200,0000000001\,\mathrm{MK} \end{aligned}$$

□

Proof of Beispiel 2.22.

1. 18,75%.
2. 50%.
3. 60%.

□

Proof of Beispiel 2.23. Prozentsatz der Raucher unter allen Passagieren 40 %.
Prozentsatz der Passagiere erster Klasse unter allen Passagieren 20 %.
Prozentsatz der Passagiere erster Klasse unter den Rauchern 12, 5 %.
Prozentsatz der rauchenden Passagiere 1.Klasse unter allen Passagieren 5 %.

□

Proof of Beispiel 2.24.

1. 500 Fälle.
2. 280 Fälle.

□

Proof of Beispiel 2.25.

Wasseraufnahme	ml	%	Wasserabgabe	ml	%
Oxidationswasser	54,0 ml	90	Urin	13,5	22,5
Absorbiertes Wasser	6,0 ml	10	Kot	2,58	4,3
			Verdunstung	43,92	73,2
gesamt	60,0	100	gesamt	60,0	100

□

Proof of Beispiel 2.26.

$$\begin{aligned}
\frac{5\cdot 10^{2000}+(3\cdot 0,1^{-1000})^2}{2\cdot(10^{1,5})^{1334}}\cdot\sqrt[250]{9^{500}} &= \frac{5\cdot 10^{2000}+9\cdot\left(\frac{1}{0,1^{1000}}\right)^2}{2\cdot 10^{2001}}\cdot 9^{500/250}\\
&= \frac{5\cdot 10^{2000}+9\cdot\left(10^{1000}\right)^2}{2\cdot 10^{2001}}\cdot 9^2\\
&= \frac{5\cdot 10^{2000}+9\cdot 10^{2000}}{2\cdot 10^{2001}}\cdot 81\\
&= \frac{(5+9)\cdot 10^{2000}}{2\cdot 10\cdot 10^{2000}}\cdot 81\\
&= \frac{14}{20}\cdot 81 = 56,7
\end{aligned}$$

□

Proof of Beispiel 2.27.

- $\frac{p^2\sqrt[4]{r^3}}{\sqrt[5]{q^2}}$
- $a^{17/6}b^{-3/2}$

□

Proof of Beispiel 2.28.

1. $a^{n-m}b^{p-q}$
2. $-\frac{s(r+s)}{r}$
3. $(a-b)^m$

□

Proof of Beispiel 2.29. Wir berechnen zunächst die GröSSe eines Moleküls:

Eingetropftes Ölvolumen	$0,02\cdot 0,0005 = 2\cdot 10^{-2}\cdot 5\cdot 10^{-4}$	$= 10^{-5}\,\text{cm}^3$
Fläche der Ölschicht	$6,5^2\cdot\pi$	$\approx 132,7\,\text{cm}^2$
Dicke der Ölschicht	$10^{-5}/132,7$	$= 7,54\cdot 10^{-8}\,\text{cm}$
Länge eines Moleküls	(ist gleich der Dicke der Schicht)	$= 7,54\cdot 10^{-8}\,\text{cm}$
Volumen eines Moleküls	$(7,54\cdot 10^{-8})^3$	$= 428,7\cdot 10^{-24}\,\text{cm}^3$

Wir berechnen nun, welches Volumen ein Mol Ölsäure besitzt, und daraus, wie viele Moleküle darin sind. Die Dichte sagt aus, dass 1 cm^3 Ölsäure 0,89 g wiegt.

Volumen von 1 Gramm Ölsäure	$1/0,89$	$\approx 1,12\,\mathrm{cm}^3$
Volumen von 1 mol Ölsäure	$1,12 \cdot 282,47$	$\approx 316,4\,\mathrm{cm}^3$
Anzahl der Moleküle in 1 mol	$\frac{316,4}{428,7\cdot 10^{-24}}$	$\approx 7,38 \cdot 10^{23}$ Teilchen/mol

Genauere Verfahren fuhren zu einem tatsächlichen Wert der Loschmidtschen Zahl von $6,022 \cdot 10^{23}$ Teilchen/mol. □

Proof of Beispiel 2.30. Wir bringen alle Einheiten auf mm, da wir am Ende mit mm^3 Blut rechnen. Zuerst berechnen wir das Volumen eines Blutkörperchens, und dann multiplizieren wir mit der Anzahl aller Blutkörperchen in einem Kubikmillimeter Blut.

Radius der Grundfläche	$\frac{7}{2}\mu\mathrm{m}$	$= 3,5 \cdot 10^{-3}\mathrm{mm}$
Grundfläche	$(3,5 \cdot 10^{-3}\mathrm{mm})^2 \cdot \pi\mathrm{mm}^2$	$= 38,5 \cdot 10^{-6}\mathrm{mm}^2$
Dicke der Scheibe	$2 \cdot \mu\mathrm{m}$	$= 2 \cdot 10^{-3}\mathrm{mm}$
Volumen eines Erythrozyten	$2 \cdot 10^{-3}\mathrm{mm} \cdot 38,5 \cdot 10^{-6}\mathrm{mm}^2$	$= 77 \cdot 10^{-9}\mathrm{mm}^3$
Volumen von 5 Millionen Erythrozyten	$5 \cdot 10^6 \cdot 77 \cdot 10^{-9}\mathrm{mm}^3$	$= 385 \cdot 10^{-3}\mathrm{mm}^3$

Der Anteil der Erythrozyten im Blut beträgt etwa 40 Volumsprozent. □

Proof of Beispiel 2.31.

- $\approx 1094\,\mathrm{km}^3$
- Die gesamte SüSSwassermenge ist $1,332\ ,\cdot 10^6\,\mathrm{km}^3$, und damit $\frac{1094}{1,332\ ,\cdot 10^6} \cdot 100 = 0,08\,\%$

□

Proof of Beispiel 2.32.

durchschnittlich wiss:	$384\,400\,\mathrm{km} = 384\,400\,000\,\mathrm{m} = 3,844 \cdot 10^8\,\mathrm{m}$
durchschnittlich tech:	$384\,400\,\mathrm{km} = 384\,400\,000\,\mathrm{m} = 384,4 \cdot 10^6\,\mathrm{m}$
minimal wiss:	$363\,300\,\mathrm{km} = 363\,300\,000\,\mathrm{m} = 3,633 \cdot 10^8\,\mathrm{m}$
minimal tech:	$363\,300\,\mathrm{km} = 363\,300\,000\,\mathrm{m} = 363,3 \cdot 10^6\,\mathrm{m}$
maximal wiss:	$405\,500\,\mathrm{km} = 405\,500\,000\,\mathrm{m} = 4,055 \cdot 10^8\,\mathrm{m}$
maximal tech:	$405\,500\,\mathrm{km} = 405\,500\,000\,\mathrm{m} = 405,5 \cdot 10^6\,\mathrm{m}$

□

Proof of Beispiel 2.33. In einem Gramm: $\approx 3,3444 \cdot 10^{22}$ Moleküle
In einem Liter: $\approx 3,3444 \cdot 10^{25}$ Moleküle

□

Proof of Beispiel 2.34.

- 41%
- Man muss die Höhe vervierfachen.

□

Proof of Beispiel 3.14. $x = \frac{8}{5}$ □

Proof of Beispiel 3.15.

$$x = -\frac{1}{10}$$
$$x = \frac{1}{5}$$

□

Proof of Beispiel 3.16. Weil $p = -6$ und $q = 9$ gilt, ist

$$u = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3}}{2 \cdot 2} = \frac{6 \pm \sqrt{12}}{4}$$

Damit erhalten wir die Lösungen $u_1 = 2,37$ und $u_2 = 0,63$. □

Proof of Beispiel 3.17. Weil $p = -6$ und $q = 10$ gilt, ist

$$u = -\frac{-6}{2} \pm \sqrt{\frac{(-6)^2}{4} - 10} = 3 \pm \sqrt{-1}$$

Diese Gleichung besitzt keine Lösung, da die Wurzel einer negativen Zahl nicht definiert ist. □

Proof of Beispiel 3.18. $x = -3$ □

Proof of Beispiel 3.19.

1. $4x = \pm 3$
2. $x = \frac{b}{a}$ falls $a \neq 0$ und alle $x \in \mathbb{R}$ lösen die Gleichung falls $a = 0$ gilt.

□

Proof of Beispiel 3.20. $x = 9$ □

Proof of Beispiel 3.21.

$$x_1 = \frac{1}{5}; \qquad x_2 = 1; \qquad x_3 = 5$$

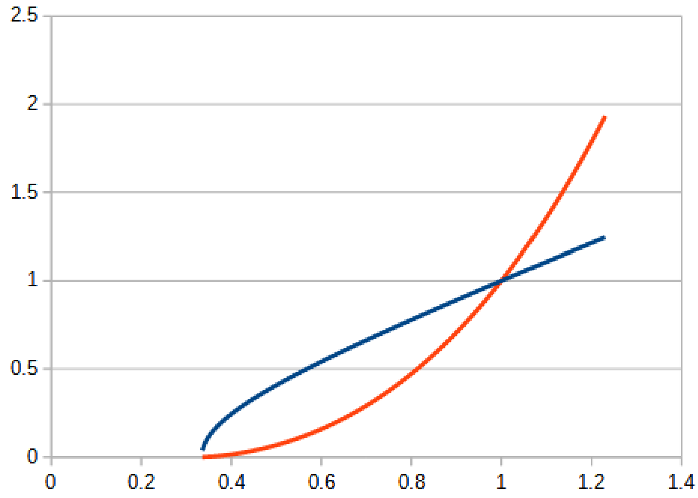
□

Proof of Beispiel 3.22.

$$x = 0,8077\,\mathrm{m}$$
$$h(0,4038) = 0,7067\,\mathrm{m}$$

□

Proof of Beispiel 3.23. Lösungshinweise: Wenn man die Funktion links und rechts zeichnet, erhält man folgendes Bild:



Blau ist die linke Seite der Gleichung und Orange dir Rechte. Durch Ablesen können wir sehen, dass wir eine bis zwei Lösungen mindestens erwarten würden, eine könnte bei circa 0,3 sein und eine sicherlich bei circa 1.

- Die Potenzen rechts auszupotenzieren wird das Problem nicht einfacher machen, Sie sollten folgende Rechnung (ausführlicher) nachrechnen können:

$$\sqrt{x^2+\frac{1}{6}x-\frac{1}{6}} = \left(\sqrt{x-\frac{1}{3}}\right)^3 \sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^3}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\sqrt{x^2+\frac{1}{6}x-\frac{1}{6}} = \left(\sqrt{\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)}\right)^3$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\sqrt[3]{x^2+\frac{x}{6}-\frac{1}{6}} = x^2+\frac{x}{6}-\frac{1}{6}$$

- Eine Gleichung der Form $\sqrt[3]{a} = a$ hat genau 3 mögliche Lösungen, das sind Kandidaten für die Lösung.
  Falls $a \neq 0$ ist, gilt

$$\begin{aligned} & \sqrt[3]{a} = a \\ \Rightarrow \quad & a = a^3 \\ \Rightarrow \quad & 1 = a^2 \\ \Rightarrow \quad & a = \pm 1 \end{aligned}$$

  Also erhalten wir die 3 möglichen Lösungen $\{-1, 0, 1\}$ da wir 0 durch Probe überprüfen konnten.

- Also müssen wir 3 Quadratische Gleichungen lösen:

$$x^2+\frac{x}{6}-\frac{1}{6} = -1, 0, 1$$

denn wir haben im letzten Schritt gesehen, dass der Ausdruck unter der Wurzel diese 3 Bedingungen erfüllen muss.

- Also erhalten wir 6 Kandidaten für mögliche Lösungen. SchlieSSen Sie mit der Probe falsche Lösungen aus.

Die Gleichung besitzt genau zwei Lösungen in $\mathbb{R}$: $x = \frac{1}{3}$ und $x = 1$. Es gibt noch 4 weitere Lösungen: $x = -\frac{1}{2}$, $x = -\frac{7}{6}$, dabei scheitert die Probe über $\mathbb{R}$ und $x = -\frac{1}{12} + \frac{199}{12} i$, $x = -\frac{1}{12} - \frac{199}{12} i$ welche komplexe Lösungen sind und wir nicht besprechen. □

Proof of Beispiel 3.24. Keine (reelle) Zahl löst diese Gleichung. □

Proof of Beispiel 4.7. $c = \sqrt{\frac{\alpha^2\beta^2}{1-\beta^2}}$ □

Proof of Beispiel 4.8.

$$f = \frac{1}{\frac{1}{g} + \frac{1}{b}} = \frac{bg}{b+g}$$
$$g = \frac{1}{\frac{1}{f} - \frac{1}{b}} = \frac{bf}{b-f}$$
$$b = \frac{1}{\frac{1}{f} - \frac{1}{g}} = \frac{gf}{g-f}$$

□

Proof of Beispiel 4.9.

$$d = \pm\sqrt{\frac{18\, v_s\, \eta_g}{(\rho_p - \rho_G) g}}$$
$$\rho_G = \rho_p - \frac{18 v_s\, \eta_g}{d^2\, g}$$

□

Proof of Beispiel 4.10.

$$\rho = \frac{2W_k}{\Delta V\, (1-\alpha^2)\, v^2}$$

□

Proof of Beispiel 4.11.

$$r = \frac{\sigma}{\sqrt[6]{\frac{\epsilon + \sqrt{\epsilon^2 + \epsilon V}}{2\,\epsilon}}}$$

Falls Sie mehrere Lösungen haben sollten, die *negativen* Lösungen lassen sich ausschlieSSen, da r eine positive reelle Zahl sein muss. □

Proof of Beispiel 4.12.

$$a = \frac{1 - b^2}{1 + b^2}$$

Um die Probe zu machen, setzten Sie dieses a in die ursprüngliche Gleichung ein und formen diese solange um, bis offensichtlich links und rechts das Selbe steht. □

Proof of Beispiel 4.13.

$$K = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b + L^2(1 + j)^m}$$
$$a = \frac{L^2(j + 1)^m - b - K^2}{K}$$
$$b = L^2(1 + j)^m - K^2 - aK$$
$$L = \pm\sqrt{\frac{K^2 + aK + b}{(1 + j)^m}}$$
$$j = \sqrt[m]{\frac{K^2 + aK + b}{L^2}} - 1$$

□

Proof of Beispiel 4.14. K ist schon gegeben, $L = \frac{K}{(1+i)^n}$ und $i = \sqrt[n]{\frac{K}{L}} - 1$. □

Proof of Beispiel 4.15.

$$i = 100\left(\sqrt[n]{\frac{F_n}{F_0}} - 1\right)$$

□

Proof of Beispiel 4.16. $V_{1,2} = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 + 4\,R}}{2\,R}$ □

Proof of Beispiel 4.17.

- $N = \frac{1}{\overline{x}} \sum_{i=1}^{N} x_i$
- $x_{N-1} = N\,\overline{x} - \sum_{i=1}^{N-2} x_i - x_N$

□

Proof of Beispiel 4.18.

$$p_2 = p_1 - \frac{v^2}{2\,\alpha^2\varepsilon^2}\rho_2\left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_1} \cdot \frac{A_2^2}{A_1^2}\alpha^2\varepsilon^2\right)$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{\rho_2 v^2}{2\varepsilon^2(p_1 - p_2) + v^2\frac{\rho_2}{\rho_1} \cdot \frac{A_2^2}{A_1^2}\varepsilon^2}}$$

□

Proof of Beispiel 5.24. $e^{70\,x-0{,}3\,y\,\ln(5)-2\,z}$ □

Proof of Beispiel 5.25. $\ln(y)$ □

Proof of Beispiel 5.26. $t = \dfrac{2-\ln(25)}{5} \approx -0{,}2438$ □

Proof of Beispiel 5.27. $x = 80\,000$ □

Proof of Beispiel 5.28. $\log_{10}\left(\frac{1}{2}\right) \approx -0{,}301;\qquad \log_{10}(5) \approx 0{,}699;\qquad \log_{10}(20) \approx 1{,}301;$ $\log_{10}\left(\frac{5}{8}\right) \approx -0{,}204$ □

Proof of Beispiel 5.29. $\log_4\left(\dfrac{\sqrt[3]{ac}}{\sqrt[6]{a-b}\sqrt[9]{a+b}}\right)$ □

Proof of Beispiel 5.30. 0 □

Proof of Beispiel 5.31. Eine geeignete Rechnung ist natürlich dehnbar, z.B.:

$$\begin{aligned} 2015^{2016} > 2016^{2015} \quad &\Leftrightarrow \quad 2016 \cdot \log_{10}(2015) > 2015 \cdot \log_{10}(2016) \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{2016}{2015} > \frac{\log_{10}(2016)}{\log_{10}(2015)} \end{aligned}$$

Wenn man die letzte Aussage nachrechnen erhält man ein korrektes Ergebnis. □

Proof of Beispiel 5.32. pH steigt um ca. $0{,}3$. □

Proof of Beispiel 5.33.

- $K = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b + \ln(c)}$
- $a = \dfrac{\ln(c) - b + K^2}{K}$
- $b = \ln(c) - K^2 - aK$
- Mit $d = e^{K^2+ak+b}$ ist $L = e^{\frac{d}{2}}$
- $p = \sqrt[5]{\dfrac{\ln\left(L^2\right)}{e^{K^2+aK+b}}} - 1$

□

Proof of Beispiel 5.34.

(a) $2{,}5$

(b) 2

(c) $\approx -0{,}30423$

(d) $\approx 3{,}321928$

(e) $\approx -0{,}24839$

□

Proof of Beispiel 5.35. (a) 3

(b) $1,2$

(c) 22

(d) 3

□

Proof of Beispiel 5.36. $x = 1$; □

Proof of Beispiel 5.37. $x = \pm 1,31696$; □

Proof of Beispiel 5.38.

$$x_1 = 10^{-7} \qquad x_2 = 10^{-18}$$

□

Proof of Beispiel 6.19.

- Das Sparbuch ist $3,1082224 \cdot 10^{32}$ Euro wert. Dies entspricht $310,82224$ Quinquillionen Euro. Oder anders formuliert $310,82224$ Billiarden Billiarden.
- Sie würden mehr als $599,55$ Erden aus **massivem Gold** bekommen! Irgendetwas sagt mir, dass die Bank die Echtheit des Sparbuchs *anzweifeln* wird.

□

Proof of Beispiel 6.20. ca. $3,5\,\mathrm{dB}$ □

Proof of Beispiel 6.21.

- $k \approx -0,1155$.
- $C = 10$.

□

Proof of Beispiel 6.22. ca. $15,54$ Stunden. □

Proof of Beispiel 6.23.

- Die Energie vertausendfacht sich.
- $M_s = \frac{\log_{10}(E) - 4,8}{1,5}$

□

Proof of Beispiel 6.24.

a) $f(t) = 100\% \cdot e^{\ln(0,999992)\,t}$

b) ≈ 86643 Tage ≈ 237 Jahre

c) ≈ 150496 Tage ≈ 412 Jahre

□

Proof of Beispiel 6.25.

1. $M(t) = Ce^{kt}$
2. $C = 200,\ k = -0,000001824$
3. $199,987\text{kg}$

□

Proof of Beispiel 6.26.

1. $P(t) = Ce^{kt}$
2. $C = 100\,000,\ k = 0,0063$
3. 1563

□

Proof of Beispiel 6.27. ca. 22 700 Jahre. □

Proof of Beispiel 6.28. Es waren 4071 Bakterien. □

Proof of Beispiel 6.29.

1. $k = \frac{\ln(0,9)}{10}$
2. $t = 218,5\,\text{s}$
3. $t_H = 65,79\,\text{s}$

□

Proof of Beispiel 6.30.

1. $k = \frac{\ln(1,1)}{2}$
2. $t = 218,5\,\text{s}$
3. Um $10 : 00$ Uhr.

□

Proof of Beispiel 6.31.

$$M(t) = 108 \cdot e^{\frac{3}{40,4} \cdot t}$$

Es dauert $361,36\,\text{h} \approx 15,06\,\text{d}$ □

Proof of Beispiel 7.17. $\overline{x} = 3,02;\ \overline{y} = -1,54;\ S_{xx} = 16,458;\ S_{xy} = 4,41$
Womit die Regressionsgerade: $y = 1,23\,x - 5,27$ folgt. □

Proof of Beispiel 7.18. Das Potenzgesetz lautet: $v = 0,85588 \cdot m^{0,6811}$
Und ja, der Zusammenhang ist gerechtfertigt mit einem BestimmtheitsmaSS von $0,9913$. □

Proof of Beispiel 7.19. Es handelt sich um eine logarithmische Skala. Da die Abbildung *optisch* auf ein Gerade hindeutet, kann man ablesen, dass die Biodiversität **exponentiell** abnimmt. Das Vertrauensintervall wird gröSSer, da im Logarithmischen dieses Intervall scheinbar breiter wird, die *Echt-Werte* weisen jedoch eine kleinere Abweichung auf. □

Proof of Beispiel 7.20. $y = 0,92\dot{3}\,x + 1,14\dot{6}$ □

Proof of Beispiel 7.21. $u = 8,70\,e^{-0,64\,t}$ □

Proof of Beispiel 7.22. Gerade: $y = 0,1135 \cdot x + 0,502$
Erwarteter Bedarf: $31,73\,\mathrm{kg}$ □

Proof of Beispiel 7.23. $y = 1,80854 \cdot e^{0,538653\,x}$ □

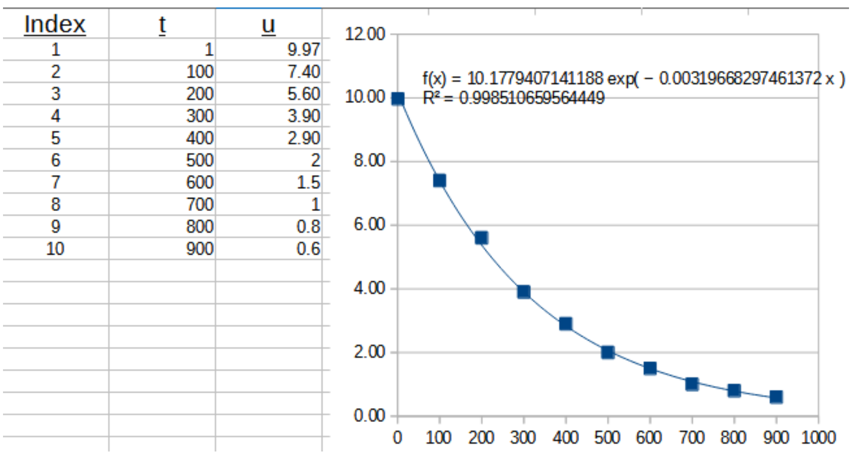
Proof of Beispiel 8.7. Lösungshinweis: Sie können *einfach* das Mischungskreuz anwenden! Dieses wird im Kapitel Gleichungen Lösen 4.4

1. $$A = 0,0536\,l$$ $$B = 0,0964\,l$$
2. $$A = 0,418\,l$$ $$B = 1,168\,l$$
3. $$A = 152946\,l$$ $$B = 929\,l$$
4. $$A = -1,3125\,l$$ $$B = 4,8125\,l$$

Das *Sonderbare* ist natürlich, dass man ein negatives Volumen hat. Man kann durch Vermischen keine höhere Konzentration erhalten, als jene in den einzelnen Volumina.

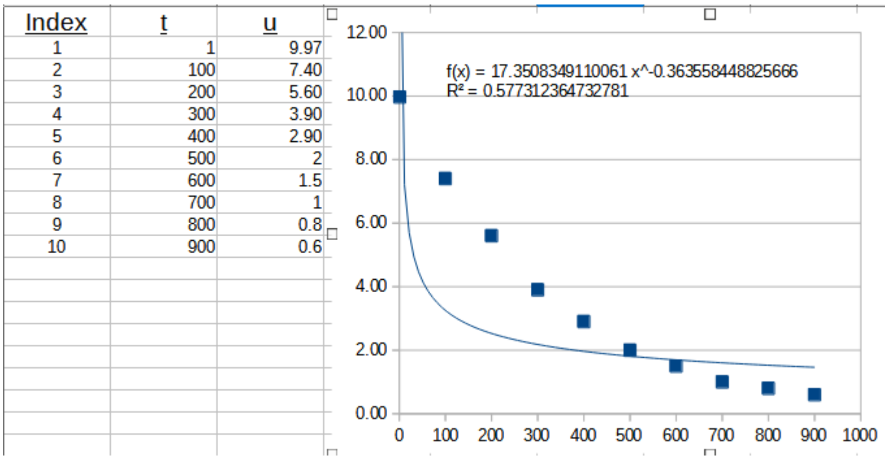
□

Proof of Beispiel 8.9. Lösung Regression:



Index	t	u
1	1	9.97
2	100	7.40
3	200	5.60
4	300	3.90
5	400	2.90
6	500	2
7	600	1.5
8	700	1
9	800	0.8
10	900	0.6

Abbildung 13.1: Lösung Exponentialfunktion



Index	t	u
1	1	9.97
2	100	7.40
3	200	5.60
4	300	3.90
5	400	2.90
6	500	2
7	600	1.5
8	700	1
9	800	0.8
10	900	0.6

Abbildung 13.2: Lösung Potenzfunktion

Proof of Beispiel 9.18. c_P ist dimensionslos.

Proof of Beispiel 9.19. Beide GröSSen müssen die Einheit $[\Omega]$ haben.

Proof of Beispiel 9.20. $[\omega] = \mathrm{s}^{-1}$

Proof of Beispiel 9.21. λ ist Dimensionslos (Dimension 1), $[E] = \frac{kg}{m\,s^2}$.

Proof of Beispiel 9.22. $[H] = \frac{kg\,m^2}{s^2}$, $[c] = \frac{m^2}{s^2 K}$.

Proof of Beispiel 9.23. H ist dimensionslos.
Bitte beachten Sie hierbei die Formulierung *sei definiert*. Das bedeutet in diesem Zusammenhang wurde die Entropie so gewählt (nur falls jemand das Ergebnis mit der Definition der Physik vergleicht).

Proof of Beispiel 10.3. $[R] = \frac{V}{A} \qquad [L] = \frac{V\,s}{A}$

Proof of Beispiel 10.4. $[k] = \frac{l^2}{mol^2\,s}$

Proof of Beispiel 10.5. Mit der Regel für Dimensionen der Integralrechnung gilt

$$\left[\int_{s_1}^{s_2} F\,\mathrm{d}s\right] = [F]\,[s] = \mathrm{N}\cdot\mathrm{m}$$

Proof of Beispiel 10.6.

$$[k] = \frac{\mathrm{l}^2}{\mathrm{s}\cdot\mathrm{mol}^2}$$

Proof of Beispiel 10.7.

- $[a] = \mathrm{kg\,m^2\,s^{-2}\,mol^{-1}\,K^{-1}}$

- $[b] = \mathrm{m}^3 \cdot \mathrm{mol}^{-1}$
- $[c] = \mathrm{kg\,m^5\,s^{-2}\,mol^{-2}}$

□

Proof of Beispiel 10.8.

- $[\alpha] = \mathrm{s}^{-1}$
- $[\beta] = \mathrm{m}^6 \cdot \mathrm{mol}^{-2}\,\mathrm{s}^{-1}$

□

Proof of Beispiel 11.17. In der Angabe stehen folgende Daten: $P(E \cap Z) = 0,36$; $P(Z|E) = 0,9$ und $P(Z|\overline{E}) = 0,5$.

	E	$\overline{E}$	
Z	0,36	0,30	0,66
$\overline{Z}$	0,04	0,30	0,34
	0,40	0,60	1

Daraus kann man leicht ablesen: $P(E) = 0,4$; $P(Z) = 0,66$; $P(E|Z) \approx 0,545$. □

Proof of Beispiel 11.18.

	A	$\overline{A}$	
E	0,083	0,067	0,15
$\overline{E}$	0,471	0,379	0,85
	0,554	0,449	1

$P(\overline{E}|\overline{A}) = \frac{0{,}471}{0{,}544} = 0,85018 \approx 0,85$
Die Ereignisse sind unabhängig, da $P(\overline{E}|\overline{A}) = 0,85 = P(\overline{E})$ gilt. □

Proof of Beispiel 11.19.

1. $P(A|B) = 0,6$.
2.

	A	$\overline{A}$	
B	0,18	0,12	0,3
$\overline{B}$	0,3	0,4	0,7
	0,48	0,52	1

3. $P(B|\overline{A}) \approx 0,231$.

□

Proof of Beispiel 11.20.

1.

	E	$\overline{E}$	
G	0,237	0,241	0,478
$\overline{G}$	0,216	0,306	0,522
	0,453	0,547	1

2. $P(E|G) \approx 0,496$.
3. $P(\overline{E}|\overline{G}) \approx 0,589$.
4. $P(E|G) \approx 0,496 \neq 0,453 = P(E)$ und daher sind die Ereignisse abhängig.

□

Proof of Beispiel 11.21.

-

	A	$\overline{A}$	
R	0,128	0,08	0,208
$\overline{R}$	0,347	0,445	0,792
	0,475	0,525	1

- $P(R|\overline{A}) = 0,152$
- $P(R|\overline{A}) = 0,152 \neq 0,208 = P(R)$ und daher sind die Ereignisse abhängig.

□

Proof of Beispiel 12.6.

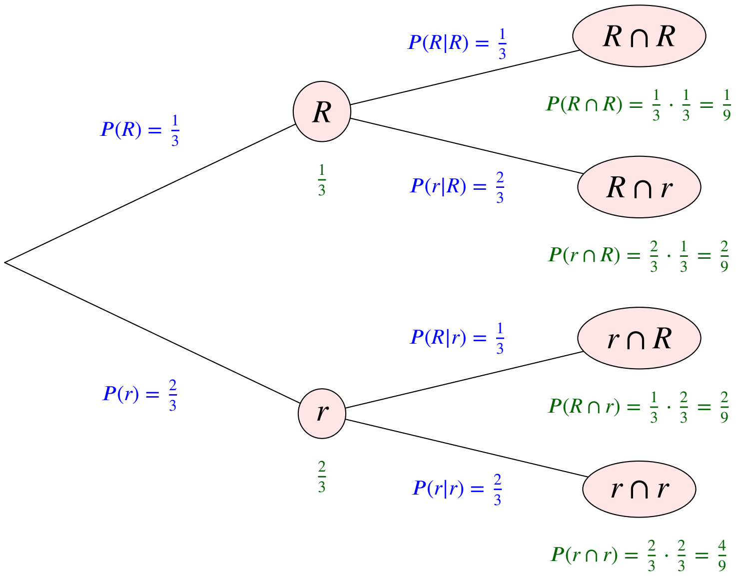
1. Das Baumdiagramm beginnt mit der Aufspaltung in M und M. $P(M) = 0,4$, $P(M) = 0,6$. Jeder der beiden Fälle teilt sich in die Fälle übergewichtig oder nicht, mit den bedingten Wahrscheinlichkeiten $P(U|M) = 0,2$; $P(U|M) = 0,8$; $P(U|M) = 0,15$; $P(U|M) = 0,85$. Durch Multiplikation ergeben sich am Ende die Wahrscheinlichkeiten $P(U \cap M) = 0,08$; $P(U \cap M) = 0,32$; $P(U \cap M) = 0,09$; $P(U \cap M) = 0,51$.

2. $P(U) = 0,17$.

3. $P(M|U) = 8/17$.

$\square$

Proof of Beispiel 12.7. Die Ereignisse R-Allele und r-Allele stehen nicht im Zusammenhang, sind also unabhängig. Das ist (natürlich) für die Erstellung des Baums zentral:



Die Wahrscheinlichkeit für eine rote Blütenfarbe ist dann

$$P(R|R) + P(r|R) + P(R|r) = \frac{5}{9} \approx 56\%$$

$\square$

Proof of Beispiel 12.8.

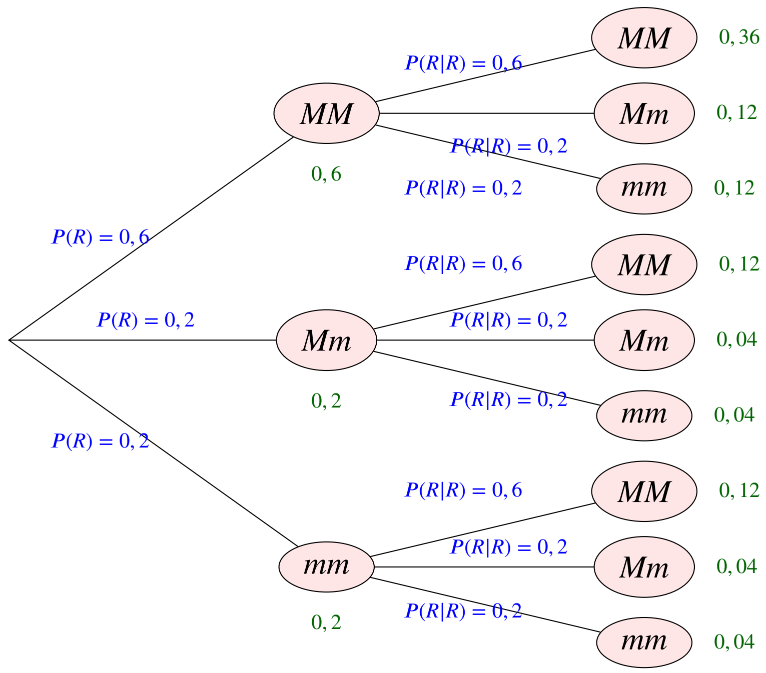
ad a) $P(X) = P(Y) = P(Z) = 1/3$, $P(X \cap A) = 1/6$, $P(X \cap A) = 1/6$, $P(Y \cap A) = 1/9$, $P(Y \cap A) = 2/9$, $P(Z \cap A) = 1/3$, $P(Z \cap A) = 0$.

ad b) $P(A) = 13/18$.

ad c) $P(X|A) = 3/5$.

$\square$

Proof of Beispiel 12.9. Die Ereignisse MM, Mm und mm stehen nicht im Zusammenhang, sind also unabhängig. Das ist (natürlich) für die Erstellung des Baums zentral:



Nun können wir die Wahrscheinlichkeit bestimmen:

$$P(M) = 0,36 + 0,12 + 0,12 + 0,12 + 0,04 + 0,04 + 0,12 + 0,04 = 0,96.$$

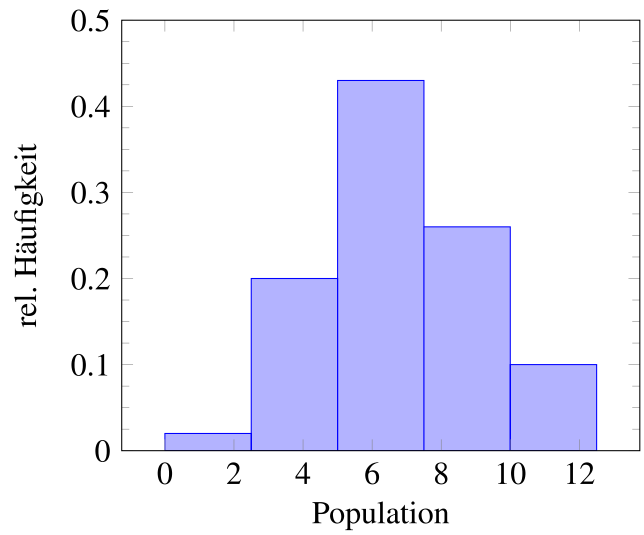
Offensichtlich klappt's einfacher wenn man die Gegenwahrscheinlichkeit bestimmt:

$$P(M) = 1 - P(\overline{M}) = 1 - 0,2^2 = 0,96.$$

$\square$

Proof of Beispiel 13.39. •

Population (in hunderttausend)	$0 - 2,5$	$2,5 - 5$	$5 - 7,5$	$7,5 - 10$	$10 - 12,5$
rel. Häufigkeiten	0,02	0,2	0,43	0,26	0,1



- Der Modal ist der am Häufigsten auftretende Messwert, was in unserem Fall die Population $5 - 7,5$ hunderttausend ist.
- Das erste Quartil: In Summe wurden 82 Kolonien untersucht, ein Viertel ist dann bei $20,5$. Damit ist das erste Quartil der Mittelwert aus dem 20 und 21-ten Messwert. Beide sind im Merkmal $5 - 7,5$ hunderttausend. Damit ist das auch das erste Quartil.
- $\overline{x} = 6,77 \cdot 10^5$.
- $\Sigma_x^2 = 0,779$

$\square$

Proof of Beispiel 13.40. Lösung offen! $\square$

Proof of Beispiel 13.41. Lösung offen! $\square$

LITERATURVERZEICHNIS

[1] Wikipedia contributors, — Quantile — Wikipedia, The Free Encyclopedia, https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Quantile&oldid=1118413775

[2] Dachverband der österreichischen Sozialversicherungen, Testgenauigkeit (diagnostic accuracy) molekularer Testmethoden zur Entdeckung des SARS-CoV-2 Virus bei Personen mit Verdacht auf COVID-19, *Dachverband der österreichischen Sozialversicherungen*, https://www.sozialversicherung.at/cdscontent/load?contentid=10008.741438&version=1608548534

[3] YouTube, Hans Werner Sinn ÖAW-Lecture, Die neue Inflation, https://www.youtube.com/watch?v=C6cd9WXk_hU&t

[4] Greenpeace, — Artensterben — , https://www.greenpeace.de/biodiversitaet/artenkrise/artensterben

[5] Wikipedia contributors, Gaskonstante — Wikipedia, die freie Enzyklopädie, https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Gaskonstante&oldid=253708420

[6] WWF, https://www.wwf.de/living-planet-report