

Flugmechanik: Archer's Paradox

Tagebuch, Modellierungswoche 2023

Die Kunst des
Bogenschießens



Das Ziel bist
Du selber

von Susanne Sada Rothacker

Marcel Dam, Jakob Erlacher, Niklas Hörtnner, Benedikt Mautner,
Georg Perz, Pia Sametz, Steve Keeling

Literatur: Skripten in [Analysis](#), [Numerik](#)

Projektbeschreibung

Durch das im Jahr 1948 erschienene Buch *Zen in der Kunst des Bogenschießens* hat der Autor Eugen Herrigel das Konzept im Westen eingeführt, dass das Bogenschießen (als **Metapher der Aktivitäten des Lebens**) einem mühelos und akkurat gelingt, wenn eine Bilanz zwischen bewusster und unbewusster Steuerung erreicht wird. Durch diese Erkenntnis ist der Ausdruck entstanden: *Das Ziel bist Du selber*. Jedoch stellt sich die Frage, was ist das Heikle an der Aufgabe, das für den Geist so herausfordernd ist, sich mit dem physikalischen System in Einklang zu bringen? Dazu gehört ein Phänomen, das für den Neuling paradox erscheinen mag.

Dieses Paradox hat damit zu tun, dass (für einen einfachen Apparat) der Pfeil auf der Seite des Bogens vorbei laufen muss. Dieser **Kontakt führt zu einer anfänglichen Biegung** des Pfeils, die die **Flugrichtung stört**. Es **entstehen dann Schwankungen** im Pfeil, die zu einer **ausgleichend gebogenen Flugbahn** führen. Die Ausrichtung des Pfeils im Vollauszug kann doch mit dem Weg zum Ziel zusammenfallen, und das Ziel genau erreicht werden, aber nur wenn Bogen, Pfeil und Mensch im Einklang sind. Für eine filmische Darstellung des Phänomens siehe dieses **Video**. Im diesem Projekt wird der Ablauf des Bogenschießens **simuliert**, um diese Gegenwirkungen zu verdeutlichen.

Inhaltsverzeichnis I

Schwerkraft

Anstoß

Masse-Feder System

Feder-Beladener Anstoß

Numerik

Längliche Auslenkungen

Quere Auslenkungen

Potenzialenergien

Saiten und Balken

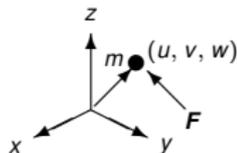
Kette als Diskretisierung

Simulation eines Pfeilfluges

Kopplung zwischen Komponenten

Empirisches Modell eines Pfeilfluges

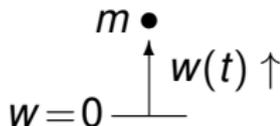
Bewegung einer Masse in Schwerkraft



- ▶ Laut dem **Newton** ist das bekannte Grundmodell:

(Masse \times Beschleunigung) $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$ (angewendete Kraft)

- ▶ Sei $w(t)$ die senkrechte **Auslenkung** einer Masse m zur Zeit t von einer Null-Position:
- ▶ Die **Geschwindigkeit** der Masse ist



(durchschnittlich in $[t, t + \tau]$) $\frac{w(t + \tau) - w(t)}{\tau} \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} w'(t)$

wobei $w'(t)$ die **Ableitung** von $w(t)$ bezeichnet.

- ▶ Die Umkehroperation von Ableiten ist **Integrieren**:

$$w(t) - w(0) = \int_0^t w'(\tau) d\tau$$

- ▶ Siehe das **Skriptum** für weitere Details.

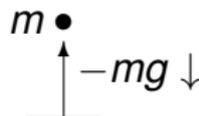
Bewegung einer Masse in Schwerkraft

- Die **Beschleunigung** der Masse ist

$$\text{(durchschnittlich in } [t, t + \tau]) \quad \frac{w'(t + \tau) - w'(t)}{\tau} \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} w''(t)$$

wobei $w''(t)$ die **zweite Ableitung** von $w(t)$ bezeichnet.

- Sei $mg > 0$ die konstante senkrechte Schwerkraft, der die Masse $m > 0$ ausgesetzt ist:



- Das **Modell der Bewegung** der Masse laut **Newton** ist

$$mw''(t) = -mg, \quad w(0) = p, \quad w'(0) = q$$

wobei p und q die anfänglichen Position bzw. Geschwindigkeit bezeichnen.

Bewegung einer Masse in Schwerkraft

- ▶ Mit den Anfangsbedingungen, $w(0) = p$ und $w'(0) = q$, wird die **Geschwindigkeit** und dann die **Position** der Masse zur Zeit t durch Integration bestimmt:

$$\begin{aligned}w'(t) - w'(0) &= \int_0^t w''(\tau) d\tau \\ &= - \int_0^t g d\tau = -g(t - 0) = -gt\end{aligned}$$

oder $w'(t) = q - gt$ mit $w'(0) = q$. Mit $w(0) = p$,

$$\begin{aligned}w(t) - p &= w(t) - w(0) = \int_0^t w'(\tau) d\tau \\ &= \int_0^t (q - g\tau) d\tau = qt - gt^2/2\end{aligned}$$

oder die Trajektorie ist parabolisch, (hängt von m nicht ab!)

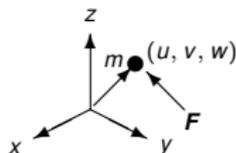
$$w(t) = p + qt - gt^2/2.$$

- ▶ Siehe das **Skriptum** für weitere Details.

Bewegung einer Masse mit Anstoß

- ▶ Nun sei die **Schwerkraft vernachlässigt**, z.B. waagerechte Bewegung im All: $u = u(t)$, $v = w = 0$.
- ▶ Sei $f > 0$ der **gesamte Impuls**, dem die Masse im Zeitintervall $[0, h]$ ausgesetzt wird, d.h. die angewendete Kraft ist

$$F(t) = \begin{cases} f/h, & t \in [0, h] \\ 0, & t > h. \end{cases}$$



- ▶ Für $t \in [0, h]$ wird die Position der Masse nach wie vor (mit $-mg$ ersetzt durch f/h) folgendermassen gegeben:

$$u'(t) = q + ft/(mh), \quad u(t) = p + qt + ft^2/(2mh).$$

- ▶ Für $t > h$ und mit der Auswertung $u'(h) = q + f/m$,

$$\begin{aligned} u'(t) - (q + f/m) &= u'(t) - u'(h) = \int_h^t u''(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{m} \int_h^t F(\tau) d\tau \stackrel{!}{=} 0 \end{aligned}$$

Bewegung einer Masse mit Anstoß

oder für $t > h$

$$u'(t) = q + f/m.$$

- ▶ Mit der Auswertung $u(h) = p + qh + fh/(2m)$,

$$\begin{aligned}u(t) - (p + qh + fh/(2m)) &= u(t) - u(h) = \int_h^t u'(\tau) d\tau \\ &= \int_h^t (q + f/m) d\tau = (q + f/m)(t - h)\end{aligned}$$

oder für $t > h$,

$$u(t) = (p + qh + fh/(2m)) + (q + f/m)(t - h).$$

- ▶ Wenn der Anstoß sehr **impulsiv** ist, ergeben sich mit $h \rightarrow 0$

$$u'(t) = q + f/m, \quad u(t) = p + (q + f/m)t, \quad t > 0.$$

d.h. die Geschwindigkeit ist **sofort konstant** und die Position hängt **linear** von der Zeit ab. **Äquivalentes** System:

$$u''(t) = 0, \quad u(0) = p, \quad u'(0) = q + f/m.$$

Masse-Feder System

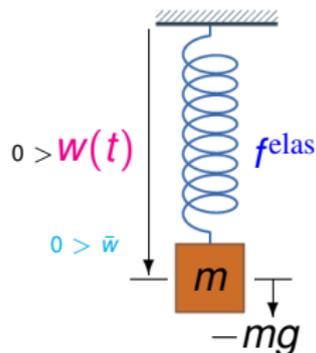
- ▶ Sei $\bar{w} < 0$ die Position der Masse m im **Ruhezustand** ohne Schwerkraft.
- ▶ Die Masse wird der Schwerkraft $-mg < 0$ und einer elastischen Kraft f^{elas} einer Feder ausgesetzt.
- ▶ Wenn die Masse vom Ruhezustand auslenkt, wird ihre senkrechte Position mit $w(t)$ bezeichnet.
- ▶ Das einfachste (und wohl bekannteste) Modell für die elastische Kraft hängt linear von der Auslenkung ab,

$$f^{\text{elas}}(t) = -\kappa(w(t) - \bar{w}) \quad \begin{cases} > 0, & |w(t)| > |\bar{w}| \\ < 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

wobei $\kappa > 0$ die sogenannte **Federkonstante** ist.

- ▶ Laut Newton kann die Bewegung der Masse bezüglich Auslenkungen so modelliert werden,

$$mw''(t) = m(w(t) - \bar{w})'' = f^{\text{elas}}(t) - mg = -\kappa(w(t) - \bar{w}) - mg$$



Masse-Feder System

oder

$$(*) \quad mw''(t) = -\kappa w(t) + \kappa \bar{w} - mg, \quad w(0) = p, w'(0) = q$$

- ▶ Ein Lösungsansatz besteht darin, die Form

$$w(t) = a \sin(\omega t) + b \cos(\omega t) + c$$

einzusetzen und die Konstanten a, b, c, ω zu bestimmen.

- ▶ **Aufgabe:** Für den vereinfachten Fall, $\kappa \bar{w} - mg = -2$, $m, \kappa = 1$, $p = -3$, $q = -1$, zeige, die Lösung ist gegeben durch

$$w(t) = -\sin(t) - \cos(t) - 2$$

- ▶ Herausforderung: Bestimme die allgemeine Lösung!
- ▶ Diese **harmonischen Schwingungen** sind nicht realistisch, da es innere Reibung in der Feder gibt, die zu einer Dämpfung führt.

Masse-Feder System

- ▶ Das einfachste (und wohl bekannteste) Modell für die Reibungskraft hängt linear von der Geschwindigkeit ab,

$$f^{\text{reib}}(t) = -\mu(w(t) - \bar{w})' = -\mu w'(t)$$

wobei $\mu > 0$ die **Dämpfungskonstante** ist.

- ▶ Das realistischere Modell ist

$$(\dagger) \quad mw''(t) = -\mu w'(t) - \kappa w(t) + \kappa \bar{w} - mg, \quad w(0) = p, w'(0) = q$$

- ▶ **Aufgabe:** Für den vereinfachten Fall, $\kappa \bar{w} - mg = -2$, $m, \kappa = 1$, $\mu = 1$, $p = -3$, $q = -1$, zeige, die Lösung ist gegeben durch

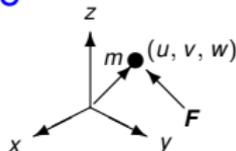
$$w(t) = -e^{-t/2}[\cos(\sqrt{3}t/2) + \sqrt{3}\sin(\sqrt{3}t/2)] - 2$$

d.h. **gedämpfte Schwingungen**.

- ▶ Herausforderung: Bestimme die allgemeine Lösung!

Bewegung einer Masse mit Feder-Beladenem Anstoß

- ▶ Nun betrachte die Bewegung einer Masse **ohne Schwerkraft** und mit $u = u(t)$, $v = w = 0$, wie auf Seite 7.



- ▶ Der Ruhezustand der Masse liegt bei $\bar{u} = 0$.
- ▶ Gegen die Wirkung einer Feder wird die Masse anfänglich zu einer Position $u(0) = p < 0$ gezogen.
- ▶ Sei die angewendete Kraft gegeben durch das **elastische Modell**

$$F(t) = \begin{cases} -\kappa u(t), & t \in [0, h] \\ 0, & t > h \end{cases}$$

wobei die Zeit h die **erste positive Nullstelle** von $u(t)$ ist.

- ▶ Für $t \in [0, h]$ wird die Bewegung durch das Newtonsche Modell bestimmt,

$$m u''(t) = F(t) = -\kappa u(t), \quad u(0) = p, \quad u'(0) = 0.$$

- ▶ Die Lösung für $t \in [0, h]$, $h = (\pi/2)\sqrt{m/\kappa}$, ist

$$u(t) = p \cos(t\sqrt{\kappa/m}) \quad \text{mit} \quad u'(t) = -p \sin(t\sqrt{\kappa/m})\sqrt{\kappa/m}$$

Bewegung einer Masse mit Feder-Beladenem Anstoß

- ▶ Mit den Auswertungen der Lösung in $t = h$ wird die Bewegung für $t > h$ durch das Newtonsche Modell bestimmt:

$$mu''(t) = F(t) = 0, \quad u(h) = 0, \quad u'(h) = -p\sqrt{\kappa/m}$$

oder

$$u'(t) = -p\sqrt{\kappa/m}, \quad u(t) = -p\sqrt{\kappa/m}(t - h), \quad t \geq h.$$

- ▶ Wie auf Seite 8 sei der Anstoß sehr **impulsiv** mit

$$\kappa \rightarrow \infty, \quad p \rightarrow 0, \quad h = (\pi/2)\sqrt{m/\kappa} \rightarrow 0, \quad -p\sqrt{\kappa/m} \rightarrow f/m$$

wobei $f > 0$ der **gesamte Impuls** ist, dem die Masse ausgesetzt wird. Es ergibt sich

$$u(t) = ft/m, \quad u'(t) = f/m$$

d.h. die Geschwindigkeit ist **sofort konstant** und die Position hängt **linear** von der Zeit ab. **Äquivalentes** System:

$$u''(t) = 0, \quad u(0) = 0, \quad u'(0) = f/m.$$

Numerische Lösung

- ▶ Unsere Differentialgleichungen können auch näherungsweise numerisch gelöst werden.
- ▶ Einfaches Beispiel: $t \in [0, T]$ (Aufgabe: Lösungsweg)

$$(\star) \quad y'(t) = -y(t) =: f(t, y(t)), \quad y(0) = 1, \quad \text{Lösung: } y(t) = e^{-t}.$$

Approximation: Für $h > 0$, $t^k = kh$, $k = 0, 1, \dots, K$, $T = Kh$,

$$\text{im } [t^{k-1}, t^k]: \quad \frac{y(t^{k-1} + h) - y(t^{k-1})}{h} \approx y'(t^{k-1}) = -f(t^{k-1}, y(t^{k-1}))$$

oder mit $y^k \approx y(t^k) = e^{-kh}$ die numerische Lösung ist

$$y^k = (1-h)y^{k-1} = (1-h)^2 y^{k-2} = \dots = (1-h)^k y^0 = (1-h)^k$$

Es gilt $e^{-kh} \approx (1-h)^k$ umso besser, je kleiner h ist.

- ▶ Mit der rechten Seite am Anfang des Intervalls $[t^{k-1}, t^k]$ ausgewertet, heißt diese Methode **vorwärts Euler**.

Numerische Lösung

- ▶ Mit der rechten Seite am Ende des Intervalls $[t^{k-1}, t^k]$ ausgewertet, heißt die nächste Methode **rückwärts Euler**,

$$(y^k - y^{k-1})/h = -f(t^k, y^k), \quad k = 0, 1, \dots, K$$

und mit $f(t, y) = -y$ ist die entsprechende numerische Lösung

$$y^k = y^{k-1}/(1+h) = y^{k-2}/(1+h)^2 = \dots = y^0/(1+h)^k = 1/(1+h)^k$$

Es gilt $e^{-kh} \approx 1/(1+h)^k$ umso besser, je kleiner h ist.

- ▶ Diese ist die θ -Methode, $\theta \in (0, 1)$,

$$(y^k - y^{k-1})/h = (1 - \theta)f(t^{k-1}, y^{k-1}) + \theta f(t^k, y^k), \quad k = 0, 1, \dots, K$$

und mit $f(t, y) = -y$ ist die entsprechende numerische Lösung

$$y^k = \frac{1 - (1 - \theta)h}{1 + \theta h} y^{k-1} = \dots = \left(\frac{1 - (1 - \theta)h}{1 + \theta h} \right)^k y^0$$

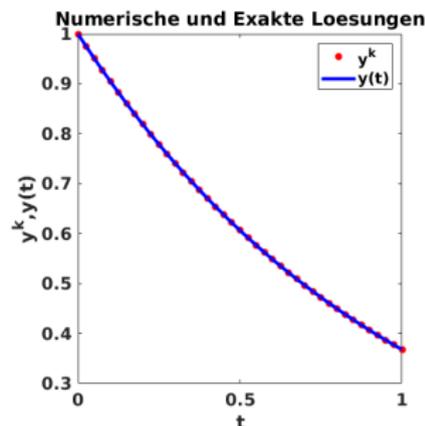
- ▶ Es gibt Funktionen in Matlab, die viel genauer sind, z.B.:

Numerische Lösung

- ▶ Beispiel: Löse (*) numerisch.

```
function ExpZerfall
    y0      = 1;           % Anfangsbedingung
    tspan   = [0,1];     % Zeitintervall
    [t,y]   = ode45(@RechteSeite,tspan,y0); % numerisch
    yexakt  = exp(-t);   % exakt
    plot(t,y,'r*','t,yexakt,'b')
end
function f = RechteSeite(t,y)
    f = -y;              % Lösung von  $y'(t) = f(t,y)$ 
end
```

- ▶ `ode45` löst die Differentialgleichung $y'(t) = f(t,y)$ numerisch über das Zeitintervall `tspan` mit Anfangsbedingung $y(0) = y_0$.
- ▶ `plot` macht die Grafik, deren Eigenschaften mit Sonderbefehlen bestimmt werden.



Numerische Lösung

- ▶ Die Matlab-Funktion `ode45` ist nur für Differentialgleichungen $y'(t) = f(t, y(t))$ **erster Ordnung**, d.h. nur die Ableitung y' erster Ordnung erscheint.
- ▶ Differentialgleichungen **zweiter Ordnung** wie (*) oder (†) müssen in erste Ordnung **umgeschrieben** werden, um `ode45` anwenden zu können.
- ▶ Dies erfolgt durch ein System $x(t) = w(t)$, $y(t) = w'(t)$, z.B. für (*) mit $m, \kappa = 1$, $p = -3$, $q = -1$, $\kappa \bar{w} - mg = -2$,

$$\begin{cases} x'(t) = w'(t) & = y(t) \\ y'(t) = w''(t) = -w(t) - 2 & = -x(t) - 2 \end{cases}$$

oder mit **Vektoren und Matrizen**

$$X'(t) = AX(t) + b, \quad X(0) = X_0$$

$$X(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}, \quad X_0 = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

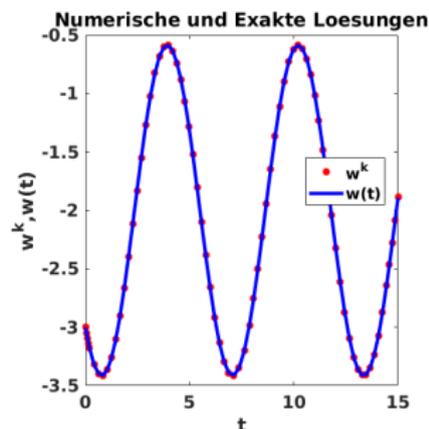
- ▶ Siehe das **Skriptum** für weitere Details.

Numerische Lösung

- ▶ Beispiel: Löse (*) numerisch für den Fall auf Seite 10.

```
function Harmonisch
    X0      = [-3;-1]; tspan = [0,15];
    [t,X] = ode45(@RechteSeite,tspan,X0);
    w      = X(:,1);
    wexakt = -sin(t)-cos(t)-2;
    plot(t,w,'r*',t,wexakt,'b')
end
function dX = RechteSeite(t,X)
    A = [0,1;-1,0]; b = [0;-2];
    dX = A*X+b;
end
```

- ▶ X_0 und b sind **Spaltenvektoren**.
- ▶ $w = X(:,1)$ nimmt die erste **Spalte** von X .
- ▶ w_{exakt} ist auf Seite 10.
- ▶ A ist eine **Matrix**.
- ▶ $dX = A*X$ ist ein **Spaltenvektor**.



Numerische Lösung

- ▶ Beispiel: Löse (†) numerisch für den Fall auf Seite 11.

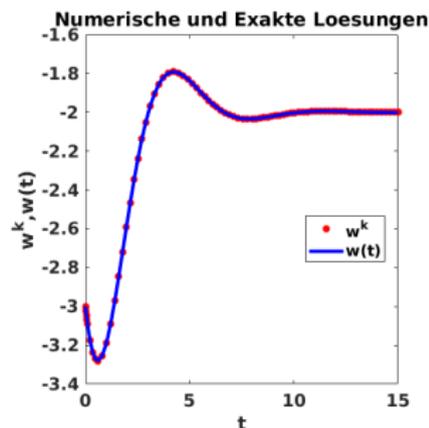
```
function Gedaempft
    X0      = [-3;-1]; tspan = [0,15];
    [t,X] = ode45(@RechteSeite,tspan,X0);
    w      = X(:,1);
    wexakt = -exp(-t/2).* ...
        (cos(sqrt(3)*t/2)+sqrt(3)*sin(sqrt(3)*t/2))-2;
    plot(t,w,'r*',t,wexakt,'b')
```

end

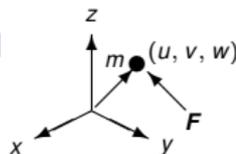
```
function dX = RechteSeite(t,X)
    A = [0,1;-1,-1]; b = [0;-2];
    dX = A*X+b;
```

end

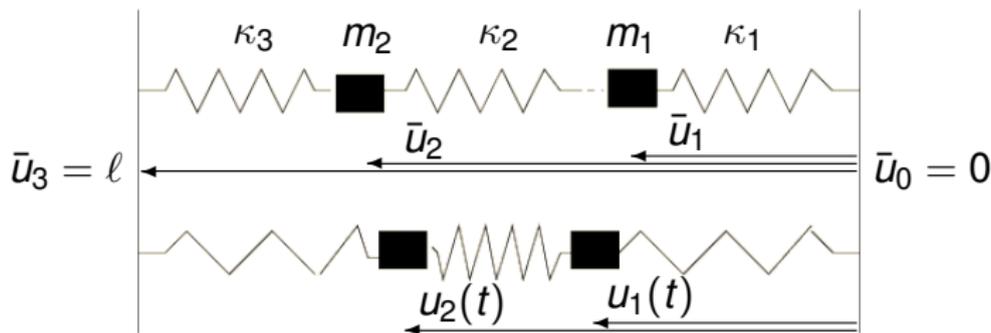
- ▶ X_0 und b sind **Spaltenvektoren**.
- ▶ $w = X(:, 1)$ nimmt die erste **Spalte** von X .
- ▶ w_{exakt} ist auf Seite 11.
- ▶ A ist eine **Matrix**.
- ▶ $dX = A * X$ ist ein **Spaltenvektor**.



Masse-Feder-Kette, Längliche Auslenkungen



- ▶ **Längliche** Auslenkungen einer Kette mit 2 Massen und 3 Federn **ohne Schwerkraft**:



- ▶ Die **elastischen** Kräfte (positiv von rechts nach links), denen Massen m_1 bzw. m_2 ausgesetzt sind, werden mit **Federkonstanten** so modelliert: $\Delta u_i(t) = u_i(t) - \bar{u}_i$,

$$m_1 u_1''(t) = \kappa_2 [\Delta u_2(t) - \Delta u_1(t)] - \kappa_1 \Delta u_1(t)$$

$$m_2 u_2''(t) = \kappa_2 [\Delta u_1(t) - \Delta u_2(t)] - \kappa_3 \Delta u_2(t)$$

- ▶ Zur Vereinfachung: $m_i = m$, $\kappa_i = \kappa$, $\bar{u}_i = i\ell/3$,

$$m u_1''(t) = \kappa [u_2(t) - u_1(t)] - \kappa [u_1(t) - \bar{u}_0]$$

$$m u_2''(t) = \kappa [\bar{u}_3 - u_2(t)] - \kappa [u_2(t) - u_1(t)]$$

Längliche Auslenkungen einer Masse-Feder-Kette

- ▶ Mit **Vektoren und Matrizen** und **Dämpfung** $\mu \geq 0$,

$$mU''(t) + \mu U'(t) = AU(t) + b, \quad U(0) = U_0, \quad U'(0) = U_1$$

mit $U_0 = [u_1(0); u_2(0)]$, $U_1 = [u_1'(0); u_2'(0)]$ gegeben und

$$U(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}, \quad A = \kappa \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad b = \kappa \begin{bmatrix} 0 \\ \ell \end{bmatrix}$$

- ▶ In **erster Ordnung**,

$$(\ddagger) \quad \mathcal{U}'(t) = \mathcal{A}\mathcal{U}(t) + \beta, \quad \mathcal{U}(0) = \mathcal{U}_0$$

mit den **Block-Vektoren und -Matrizen**,

$$\mathcal{U}(t) = \begin{bmatrix} U(t) \\ U'(t) \end{bmatrix}, \quad \mathcal{A} = \begin{bmatrix} Z & I \\ \frac{1}{m}A & -\frac{\mu}{m}I \end{bmatrix}, \quad \beta = \begin{bmatrix} z \\ \frac{1}{m}b \end{bmatrix}, \quad \mathcal{U}_0 = \begin{bmatrix} U_0 \\ U_1 \end{bmatrix}$$

wobei $Z = [0, 0; 0, 0]$, $I = [1, 0; 0, 1]$ und $z = [0; 0]$.

Längliche Auslenkungen einer Masse-Feder-Kette

- ▶ Beispiel: Löse (‡) numerisch ohne Dämpfung.

```
function KetteLaeng
    global AA bb
    ka = 1; m = 1; mu = 0; l = 3;
    A = ka*[-2,1;1,-2]; b = ka*[0;1];
    Z = [0,0;0,0]; I=[1,0;0,1]; z = [0;0];
    AA = [Z,I;A/m,-mu*I/m]; bb = [z;b/m];
    U0 = [0.75;2.25]; U1 = [0;0];
    UU0 = [U0;U1]; tspan = [0,10];
    [t,UU] = ode45(@RechteSeite,tspan,UU0);
    u1 = UU(:,1); u2 = UU(:,2);
    plot(t,u1,'r',t,u2,'b')
```

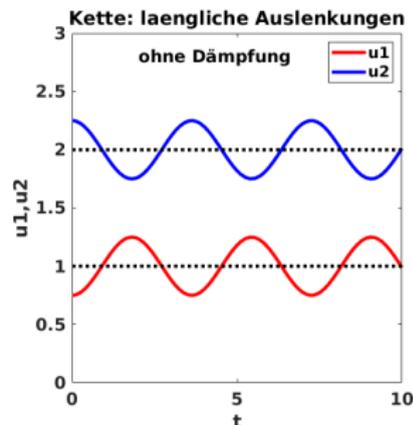
end

```
function dU = RechteSeite(t,UU)
```

```
    global AA bb
    dU = AA*UU + bb;
```

end

- ▶ $u_1(0) = \frac{3}{4} < 1$, $u_1'(0) = 0$.
- ▶ $u_2(0) = \frac{9}{4} > 2$, $u_2'(0) = 0$.

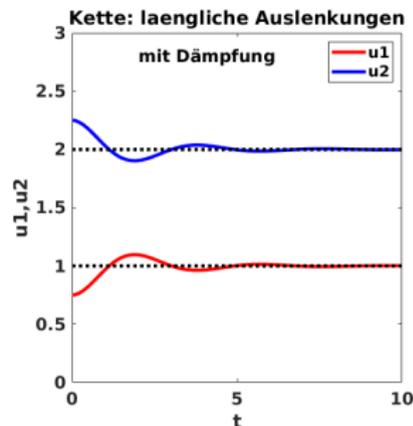


Längliche Auslenkungen einer Masse-Feder-Kette

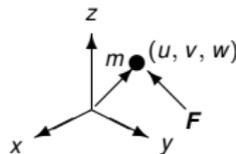
- ▶ Beispiel: Löse (‡) numerisch mit **Dämpfung**.

```
function KetteLaeng
    global AA bb
    ka = 1; m = 1; mu = 1; l = 3;
    A = ka*[-2,1;1,-2]; b = ka*[0;1];
    Z = [0,0;0,0]; I=[1,0;0,1]; z = [0;0];
    AA = [Z,I;A/m,-mu*I/m]; bb = [z;b/m];
    U0 = [0.75;2.25]; U1 = [0;0];
    UU0 = [U0;U1]; tspan = [0,10];
    [t,UU] = ode45(@RechteSeite,tspan,UU0);
    u1 = UU(:,1); u2 = UU(:,2);
    plot(t,u1,'r',t,u2,'b')
end
function dU = RechteSeite(t,UU)
    global AA bb
    dU = AA*UU + bb;
end
```

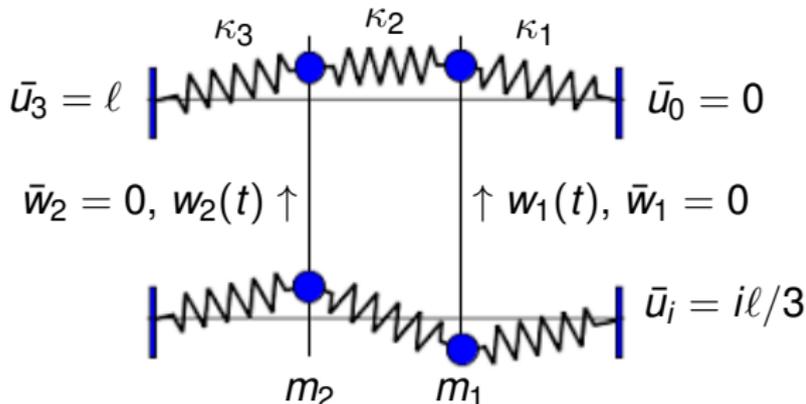
- ▶ Anfangsbedingungen gleich wie vor.
- ▶ **Fließgleichgewicht ist Ruhestand.**



Masse-Feder-Kette, Quere Auslenkungen



- ▶ **Quere** Auslenkungen einer Kette mit 2 Massen und 3 Federn ohne Schwerkraft:



- ▶ Seien die Feder so **stark ausgedehnt**, dass ihre Ruhelängen **praktisch Null** sind. Seien $F_i, i = 1, 2, 3$, die Federkräfte.
- ▶ Dann gilt z.B., $F_1 \approx -\kappa_1 \sqrt{u_1^2 + w_1^2}$. Die senkrechte Komponente dieser Kraft ist $F_1 \sin(\phi_1)$, wobei $\tan(\phi_1) = w_1/u_1$.
- ▶ Die senkrecht wirkende Kraft auf m_1 ist $F_1 \sin(\phi_1) = -\kappa_1 w_1$.
- ▶ Analog sind $-\kappa_2(w_2 - w_1)$ und $-\kappa_3 w_2$ senkrecht wirkende Kräfte für die Massen, wie im folgenden System gesehen:

Quere Auslenkungen einer Masse-Feder-Kette

- ▶ Also mit $\kappa_j = \kappa$ und $m_j = m$ werden die **elastischen** Kräfte (positiv von unten nach oben), denen die Massen ausgesetzt sind, so modelliert:

$$\begin{aligned}mw_1''(t) &= \kappa[w_2(t) - w_1(t)] - \kappa w_1(t) \\mw_2''(t) &= \kappa[w_1(t) - w_2(t)] - \kappa w_2(t)\end{aligned}$$

- ▶ Mit **Vektoren und Matrizen** und **Dämpfung** $\mu \geq 0$,

$$mW''(t) + \mu W'(t) = AW(t), \quad W(0) = W_0, \quad W'(0) = W_1$$

mit $W_0 = [w_1(0); w_2(0)]$, $W_1 = [w_1'(0); w_2'(0)]$ gegeben und

$$W(t) = \begin{bmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \end{bmatrix}, \quad A = \kappa \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

- ▶ In **erster Ordnung**

$$(\ddagger) \quad \mathcal{W}'(t) = \mathcal{A}\mathcal{W}(t), \quad \mathcal{W}(0) = \mathcal{W}_0$$

mit den **Block-Vektoren und -Matrizen**,

$$\mathcal{W}(t) = \begin{bmatrix} W(t) \\ W'(t) \end{bmatrix}, \quad \mathcal{A} = \begin{bmatrix} Z & I \\ \frac{1}{m}A & -\frac{\mu}{m}I \end{bmatrix}, \quad \mathcal{W}_0 = \begin{bmatrix} W_0 \\ W_1 \end{bmatrix}$$

Quere Auslenkungen einer Masse-Feder-Kette

- ▶ Beispiel: Löse (#) numerisch ohne Dämpfung.

```
function KetteQuer
    global AA
    ka = 1; m = 1; mu = 0; A = ka*[-2,1;1,-2];
    Z = [0,0;0,0]; I=[1,0;0,1]; AA = [Z,I;A/m,-mu*I/m];
    W0 = [0.1;-0.1]; W1 = [0;0];
    WW0 = [W0;W1]; tspan = [0,10];
    [t,WW] = ode45(@RechteSeite,tspan,WW0);
    w1 = WW(:,1); w2 = WW(:,2);
    plot(t,w1,'r',t,w2,'b')
```

end

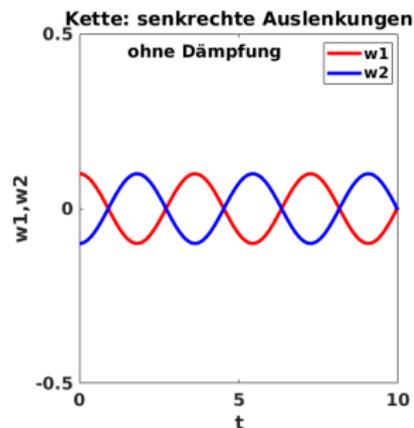
```
function dW = RechteSeite(t,WW)
```

```
    global AA
```

```
    dW = AA*WW;
```

end

- ▶ $w_1(0) = \frac{1}{10} > 0$, $w_1'(0) = 0$.
- ▶ $w_2(0) = -\frac{1}{10} < 0$, $w_2'(0) = 0$.
- ▶ $\mu = 0$.



Quere Auslenkungen einer Masse-Feder-Kette

- ▶ Beispiel: Löse (#) numerisch mit **Dämpfung**.

```
function KetteQuer
    global AA
    ka = 1; m = 1; mu = 1; A = ka*[-2,1;1,-2];
    Z = [0,0;0,0]; I=[1,0;0,1]; AA = [Z,I;A/m,-mu*I/m];
    W0 = [0.1;-0.1]; W1 = [0;0];
    WW0 = [W0;W1]; tspan = [0,10];
    [t,WW] = ode45(@RechteSeite,tspan,WW0);
    w1 = WW(:,1); w2 = WW(:,2);
    plot(t,w1,'r',t,w2,'b')
```

end

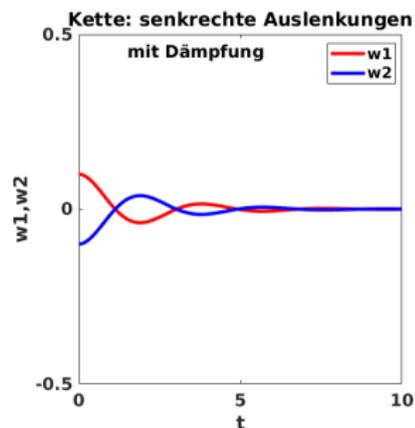
```
function dW = RechteSeite(t,WW)
```

```
    global AA
```

```
    dW = AA*WW;
```

end

- ▶ $\mu = 1$, $AA = [Z, I; A/m, -\mu \cdot I/m]$
- ▶ Anfangsbedingungen gleich wie vor.
- ▶ **Fließgleichgewicht** ist Ruhestand.



Potenzialenergie für Masse-Feder System

- ▶ Betrachte das Masse-Feder System (*),

$$w''(t) = -\frac{\kappa}{m}[w(t) - \bar{w}] - g =: f(w)$$

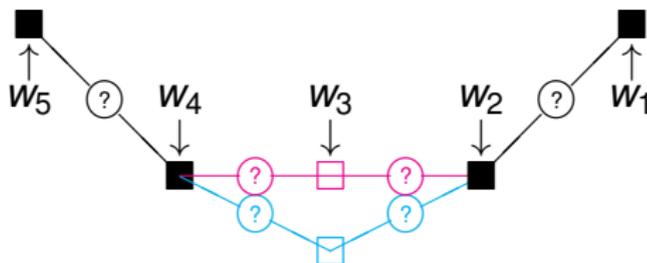
$$w(0) = p, w'(0) = q$$

- ▶ Der **Ruhestand in Schwerkraft** $w = \bar{w} - \frac{m}{\kappa}g$ entspricht dem Minimum der **Potenzialenergie**,

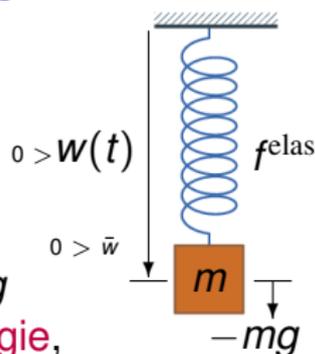
$$\phi(w) = \frac{\kappa}{2m}[w - \bar{w}]^2 + gw$$

und die Kraft im Newtonschen Modell ist $f(w) = -\phi'(w)$.

- ▶ Nun betrachte das System der fünf Massen,



- ▶ Die Auslenkungen w_1, w_2, w_4, w_5 , seien fixiert. $w_3 = ?$



Potzialenergie für Masse-Feder Kette

- ▶ Der Mechanismus in $\textcircled{?}$ ist noch zu überlegen:
- ▶ Angesichts dessen, wie soll der erwünschte Ruhestand für w_3 gegeben werden, durch \square oder \square ?
- ▶ Was ist die entsprechende zu minimierende **Potzialenergie**, um w_3 zu bestimmen?
- ▶ Falls jedes $\textcircled{?}$ einer **Feder** entspricht, ist die Kraft, der die 3. Masse ausgesetzt ist, nach wie vor gegeben durch

$$mw_3''(t) = \kappa[w_4(t) - w_3(t)] - \kappa[w_3(t) - w_2(t)] \quad =: f_3(w_3(t))$$

und die **Potzialenergie** $\phi_3(w)$ mit $f_3(w) = -\phi_3'(w)$ ist gegeben durch

$$\phi_3(w) = \frac{\kappa}{2}(w_4 - w)^2 + \frac{\kappa}{2}(w - w_2)^2$$

Das Minimum ist $w = (w_2 + w_4)/2$. Dieses Ergebnis entspricht dem Zustand \square .

- ▶ Wenn alle Massen und **Federn** frei zu bewegen sind, was sind ihre entsprechenden **Potzialenergien** ϕ_i , $i = 1, 2, 4, 5$, die das gesamte Newtonsche Modell bestimmen?

Potenzialenergie für Masse-Feder Kette

- ▶ Analog

$$\phi_1(w) = \frac{\kappa}{2}(w_2 - w)^2, \quad \phi_5(w) = \frac{\kappa}{2}(w - w_4)^2$$

$$\phi_2(w) = \frac{\kappa}{2}(w_3 - w)^2 + \frac{\kappa}{2}(w - w_1)^2$$

$$\phi_4(w) = \frac{\kappa}{2}(w_5 - w)^2 + \frac{\kappa}{2}(w - w_3)^2$$

- ▶ Das gesamte entsprechende Newtonsche Modell ist

$$\begin{aligned} mw_1''(t) &= \kappa [&& w_2(t) - w_1(t)] \\ mw_2''(t) &= \kappa [&& w_3(t) - 2w_2(t) + w_1(t)] \\ mw_3''(t) &= \kappa [&& w_4(t) - 2w_3(t) + w_2(t)] \\ mw_4''(t) &= \kappa [w_5(t) - 2w_4(t) + w_3(t)] \\ mw_5''(t) &= \kappa [-w_5(t) + w_4(t)] \end{aligned}$$

- ▶ Mit **Vektoren und Matrizen** und **Dämpfung** $\mu \geq 0$,

$$mW''(t) + \mu W'(t) = AW(t), \quad W(0) = W_0, \quad W'(0) = W_1$$

Potenzialenergie für Masse-Feder Kette

mit $W_0 = \{w_i(0)\}$ und $W_1 = \{w'_i(0)\}$ gegeben und

$$W(t) = \begin{bmatrix} w_1(t) \\ \vdots \\ w_5(t) \end{bmatrix}, \quad L = \kappa \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

- In erster Ordnung

$$(b) \quad \mathcal{W}'(t) = \mathcal{L}\mathcal{W}(t), \quad \mathcal{W}(0) = \mathcal{W}_0$$

mit den Block-Vektoren und -Matrizen

$$\mathcal{W}(t) = \begin{bmatrix} W(t) \\ W'(t) \end{bmatrix}, \quad \mathcal{L} = \begin{bmatrix} Z & I \\ \frac{1}{m}L & -\frac{\mu}{m}I \end{bmatrix}, \quad \mathcal{W}_0 = \begin{bmatrix} W_0 \\ W_1 \end{bmatrix}$$

- Welche möglichst einfache Potenzialenergie wäre für den Zustand geeignet?

Potzialenergie für Masse-Feder Kette

- ▶ Eine Antwort ist gegeben durch ($\sigma =$ Steifigkeitsparameter)

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}_3(w) &= \frac{\sigma}{2}[(w_5 - w_4) - (w_4 - w)]^2 \\ &+ \frac{\sigma}{2}[(w_4 - w) - (w - w_2)]^2 \\ &+ \frac{\sigma}{2}[(w - w_2) - (w_2 - w_1)]^2\end{aligned}$$

wenn der Mechanismus in $\textcircled{?}$ ein Drehgelenk ist. Das Minimum ist $w = \frac{2}{6}(w_2 + w_4) - \frac{1}{6}(w_1 + w_5)$, eine Nullstelle von

$$-\tilde{f}_3(w) = \tilde{\phi}'_3(w) =$$

$$\sigma[w_5 - 2w_4 + w] - 2\sigma[w_4 - 2w + w_2] + \sigma[w - 2w_2 + w_1]$$

- ▶ Das entsprechende Newtonsche Modell für die 3. Masse ist

$$mw_3''(t) = -\sigma[w_5(t) - 4w_4(t) + 6w_3(t) - 4w_2(t) + w_1(t)]$$

- ▶ Wenn alle Massen und Drehgelenke frei zu bewegen sind, was sind ihre entsprechenden Potzialenergien $\tilde{\phi}_i$, $i = 1, 2, 4, 5$, die das gesamte Newtonsche Modell bestimmen?

Potzialenergie für Masse-Feder Kette

► Analog

$$\tilde{\phi}_1(w) = \frac{\sigma}{2}[(w_3 - w_2) - (w_2 - w)]^2, \quad \tilde{\phi}_5(w) = \frac{\sigma}{2}[(w - w_4) - (w_4 - w_3)]^2$$

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}_2(w) &= \frac{\sigma}{2}[(w_3 - w) - (w - w_1)]^2 \\ &+ \frac{\sigma}{2}[(w_4 - w_3) - (w_3 - w)]^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}_4(w) &= \frac{\sigma}{2}[(w_5 - w) - (w - w_3)]^2 \\ &+ \frac{\sigma}{2}[(w - w_3) - (w_3 - w_2)]^2\end{aligned}$$

► Das gesamte entsprechende Newtonsche Modell ist

$$\begin{aligned}mw_1''(t) &= -\sigma \begin{bmatrix} w_3(t) - 2w_2(t) + w_1(t) \end{bmatrix} \\ mw_2''(t) &= -\sigma \begin{bmatrix} w_4(t) - 4w_3(t) + 5w_2(t) - 2w_1(t) \end{bmatrix} \\ mw_3''(t) &= -\sigma \begin{bmatrix} w_5(t) - 4w_4(t) + 6w_3(t) - 4w_2(t) + w_1(t) \end{bmatrix} \\ mw_4''(t) &= -\sigma \begin{bmatrix} -2w_5(t) - 5w_4(t) - 4w_3(t) + w_2(t) \end{bmatrix} \\ mw_5''(t) &= -\sigma \begin{bmatrix} w_5(t) - 2w_4(t) + w_3(t) \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Potenzialenergie für Masse-Feder Kette

- Mit **Vektoren und Matrizen** und **Dämpfung** $\mu \geq 0$,

$$mW''(t) + \mu W'(t) = BW(t), \quad W(0) = W_0, \quad W'(0) = W_1$$

mit $W_0 = \{w_i(0)\}$ und $W_1 = \{w'_i(0)\}$ gegeben und

$$W(t) = \begin{bmatrix} w_1(t) \\ \vdots \\ w_5(t) \end{bmatrix}, \quad B = \sigma \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -6 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

- In **erster Ordnung**

$$(b) \quad \mathcal{W}'(t) = \mathcal{B}\mathcal{W}(t), \quad \mathcal{W}(0) = \mathcal{W}_0$$

mit den **Block-Vektoren und -Matrizen**

$$\mathcal{W}(t) = \begin{bmatrix} W(t) \\ W'(t) \end{bmatrix}, \quad \mathcal{B} = \begin{bmatrix} Z & I \\ \frac{1}{m}B & -\frac{\mu}{m}I \end{bmatrix}, \quad \mathcal{W}_0 = \begin{bmatrix} W_0 \\ W_1 \end{bmatrix}$$

Quere Auslenkungen einer Saite

- ▶ Beispiel: Löse (b) numerisch ohne Dämpfung.

```
function SaiteQuer
    global LL
    ka = 1; m = 1; mu = 0; Z = 0*eye(5); I = eye(5);
    L = ka*(-diag([1,2,2,2,1])+diag([1,1,1,1],+1) ...
        +diag([1,1,1,1],-1)); LL = [Z,I;L/m,-mu*I/m];
    W0 = [0.015;0.085;-0.2;0.1;0]; W1 = zeros(5,1);
    WW0 = [W0;W1]; tspan = [0,10];
    [t,WW] = ode45(@RechteSeite,tspan,WW0);
    plot(t,WW(:,1:5))
```

end

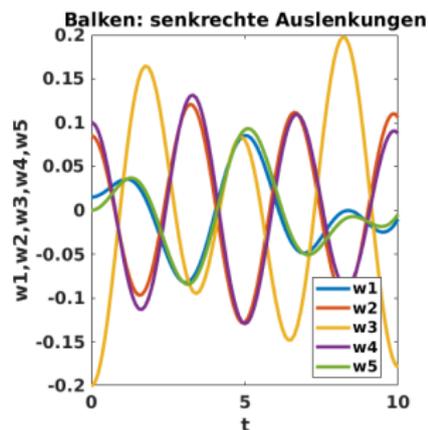
```
function dW = RechteSeite(t,WW)
```

```
    global LL
```

```
    dW = LL*WW;
```

end

- ▶ $Z = 0 \cdot \text{eye}(5)$, $I = \text{eye}(5)$
- ▶ $W_0 = [\approx 0; \approx \frac{1}{10}, -\frac{1}{5}; \frac{1}{10}; 0]$
- ▶ $W_1 = \text{zeros}(5,1) = [0; 0; 0; 0; 0]$
- ▶ Für L : "... " ist eine Fortsetzung

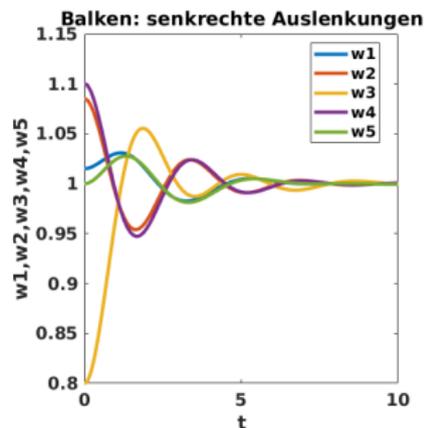


Quere Auslenkungen einer Saite

- ▶ Beispiel: Löse (b) numerisch mit **Dämpfung**.

```
function SaiteQuer
    global LL
    ka = 1; m = 1; mu = 1; Z = 0*eye(5); I = eye(5);
    L = ka*(-diag([1,2,2,2,1])+diag([1,1,1,1],+1) ...
        +diag([1,1,1,1],-1)); LL = [Z,I;L/m,-mu*I/m];
    W0 = [0.015;0.085;-0.2;0.1;0]+1; W1 = zeros(5,1);
    WW0 = [W0;W1]; tspan = [0,10];
    [t,WW] = ode45(@RechteSeite,tspan,WW0);
    plot(t,WW(:,1:5))
end
function dW = RechteSeite(t,WW)
    global LL
    dW = LL*WW;
end
```

- ▶ $\mu = 1$
- ▶ $W_0 = [\approx 0; \approx \frac{1}{10}, -\frac{1}{5}; \frac{1}{10}; 0] + 1$
- ▶ $W_1 = \text{zeros}(5,1) = [0; 0; 0; 0; 0]$
- ▶ Die Auslenkungen konvergieren zum **ursprünglichen Mittelwert** ≈ 1 .

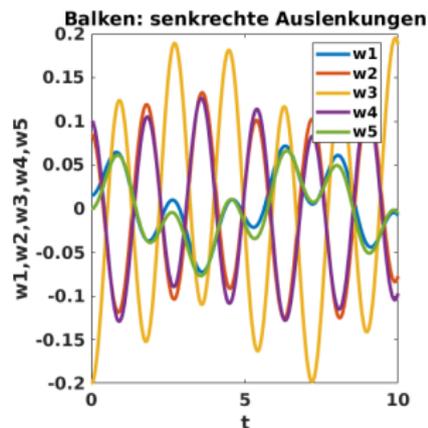


Quere Auslenkungen eines Balkens

- ▶ Beispiel: Löse (b) numerisch ohne Dämpfung.

```
function BalkenQuer
    global BB
    sg = 1; m = 1; mu = 0; Z = 0*eye(5); I = eye(5);
    B = sg*[-1,2,-1,0,0;2,-5,4,-1,0;-1,4,-6,4,-1; ...
           0,-1,4,-5,2;0,0,-1,2,-1]; BB = [Z,I;B/m,-mu*I/m];
    W0 = [0.015;0.085;-0.2;0.1;0]; W1 = zeros(5,1);
    WW0 = [W0;W1]; tspan = [0,10];
    [t,WW] = ode45(@RechteSeite,tspan,WW0);
    plot(t,WW(:,1:5))
end
function dW = RechteSeite(t,WW)
    global BB
    dW = BB*WW;
end
```

- ▶ $\mu = 0$
- ▶ $W_0 = [\approx 0; \approx \frac{1}{10}, -\frac{1}{5}; \frac{1}{10}; 0]$
- ▶ $W_1 = \text{zeros}(5,1) = [0; 0; 0; 0; 0]$
- ▶ Schwingungen sind stärker als auf Seite 35 für (b).



Quere Auslenkungen eines Balkens

- ▶ Beispiel: Löse (b) numerisch mit **Dämpfung**.

```
function BalkenQuer
    global BB
    sg = 1; m = 1; mu = 1; Z = 0*eye(5); I = eye(5);
    B = sg*[-1,2,-1,0,0;2,-5,4,-1,0;-1,4,-6,4,-1; ...
           0,-1,4,-5,2;0,0,-1,2,-1]; BB = [Z,I;B/m,-mu*I/m];
    W0 = [0.015;0.085;-0.2;0.1;0]+1; W1 = zeros(5,1);
    WW0 = [W0;W1]; tspan = [0,10];
    [t,WW] = ode45(@RechteSeite,tspan,WW0);
    plot(t,WW(:,1:5))
```

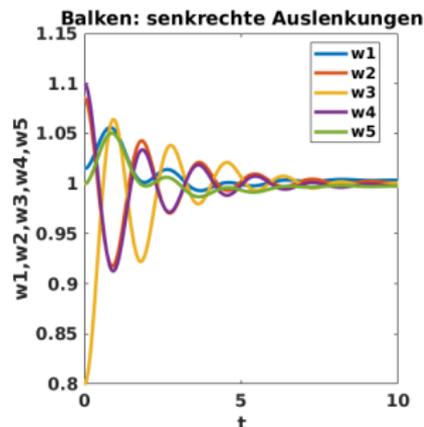
end

```
function dW = RechteSeite(t,WW)
```

```
    global BB
    dW = BB*WW;
```

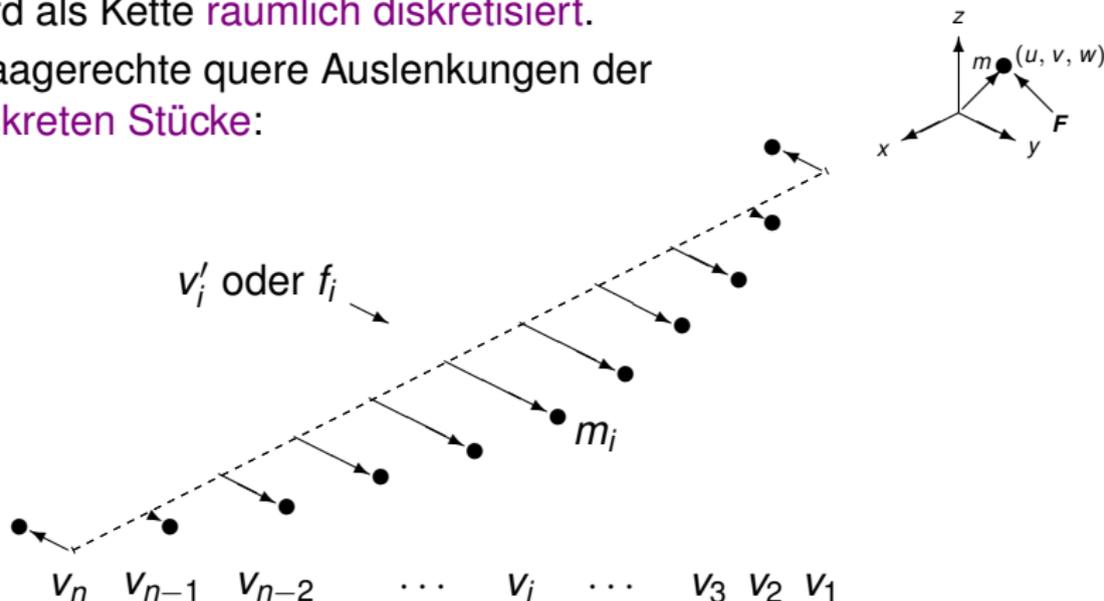
end

- ▶ $\mu = 1$
- ▶ $W_0 = [\approx 0; \approx \frac{1}{10}, -\frac{1}{5}; \frac{1}{10}; 0] + 1$
- ▶ $W_1 = \text{zeros}(5,1) = [0; 0; 0; 0; 0]$
- ▶ Die Auslenkungen **konvergieren nicht** zum ursprünglichen Mittelwert!
- ▶ Sondern **gleichmäßig verteilt** im **Fließgleichgewicht**!



Schwankungen Diskreter Stücke

- ▶ Ein kontinuierlicher **Kord** mit **Elastizität** und **Steifigkeit** wird als Kette **räumlich diskretisiert**.
- ▶ Waagerechte quere Auslenkungen der **diskreten Stücke**:



- ▶ Mit **Vektoren und Matrizen**,

$$MV''(t) + \mu V'(t) = (L + B)V(t) + F, \quad V(0) = V_0, \quad V'(0) = V_1$$

mit Kraft F , $V_0 = \{v_i(0)\}$ und $V_1 = \{v_i'(0)\}$,

Schwankungen Diskreter Stücke

$$V(t) = \begin{bmatrix} v_1(t) \\ \vdots \\ v_n(t) \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & m_2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & m_{n-1} & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & m_n \end{bmatrix}$$

$$L = \kappa \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \sigma \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 2 & -5 & 4 & -1 & \ddots & & \vdots \\ -1 & 4 & -6 & 4 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & 4 & -6 & 4 & -1 \\ \vdots & & \ddots & -1 & 4 & -5 & 2 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

und Parameter der **Dämpfung** $\mu \geq 0$, **Elastizität** κ , **Steifigkeit** σ .

► In **erster Ordnung**

$$(\S) \quad \mathcal{V}'(t) = \mathcal{A}\mathcal{V}(t) + \mathcal{F}, \quad \mathcal{V}(0) = \mathcal{V}_0 = \begin{bmatrix} V_0 \\ V_1 \end{bmatrix}$$

mit den **Block-Vektoren und -Matrizen**

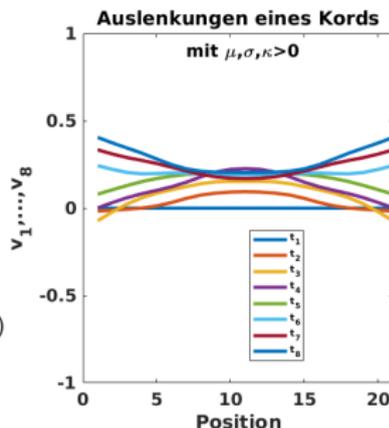
$$\mathcal{V}(t) = \begin{bmatrix} V(t) \\ V'(t) \end{bmatrix}, \quad \mathcal{A} = \begin{bmatrix} Z & I \\ M^{-1}(L+B) & -\mu M^{-1} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{F} = \begin{bmatrix} Z \\ M^{-1}F \end{bmatrix}$$

Schwankungen Diskreter Stücke

- ▶ Beispiel: Löse (§) numerisch mit $\mu, \kappa, \sigma > 0$.

```
function Kord % ode15s ist für Systeme mit simultanen
    global AA F % Effekten sehr unterschiedlicher Zeitskalen
    n = 21; sg = 1.0e3; ka = 1.0e1; mu = 1.0e-1; tspan = [0,100];
    m = ones(n,1); M1 = spdiags(1./m,0,n,n); e = ones(n,1);
    B = spdiags([-e 4*e -6*e 4*e -e],-2:2,n,n);
    B(1,1) =-1; B(1,2) = 2; B(2,1) = 2; B(2,2) =-5;
    B(n-1,n)= 2; B(n-1,n-1)=-5; B(n,n) =-1; B(n,n-1)= 2; B=sg*B;
    L = spdiags([e -2*e e],-1:1,n,n); L(1,1)=-1; L(n,n)=-1; L=ka*L;
    Z = 0*speye(n); I = speye(n); AA = [Z,I;M1*(B+L),-mu*M1];
    V0 = zeros(n,1); V1 = zeros(n,1); z = zeros(n,1); F = [z;z];
    V1(9:13)=[1;4;6;4;1]/6; VV0 = [V0;V1];
    [t,VV] = ode15s(@RechteSeite,tspan,VV0);
    plot(VV(1:100:800,1:n)')
end
function dV = RechteSeite(t,VV)
    global AA F
    dV = AA*VV + F;
end
```

- ▶ `spdiags` macht eine **sparse** Matrix
- ▶ V_1 approximiert anfänglichen **Anstoß!**
(Seiten 8 & 13)
- ▶ Was sind die Wirkungen von **Dämpfung, Elastizität und Steifigkeit?**



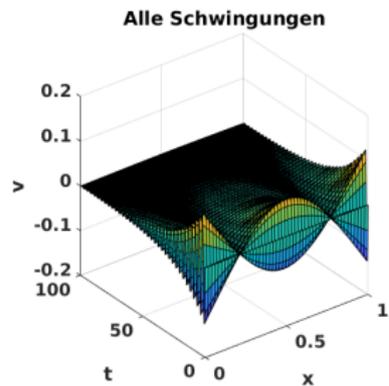
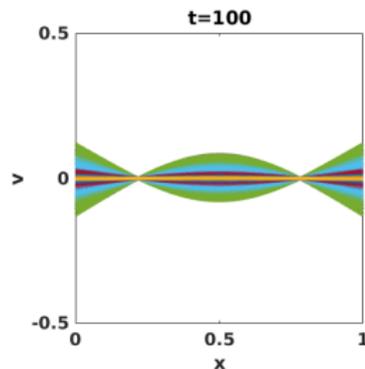
Schwankungen eines Pfeils - Geschwindigkeitsprofil

- ▶ Beispiel: Löse (§) numerisch mit $\mu, \kappa, \sigma > 0$.

```
function Cord
N = 50; M = 500; T = 100; dt = T/(M-1); dx = 1/(N-1);
x = linspace(0,1,N)'; t = linspace(0,T,M);
sg = 1.0e-2; ka = 1.0e-2; mu = 1.0e-1; th = 0.5;
m = ones(N,1); M1 = spdiags(1./m,0,N,N); e = ones(N,1);
B = spdiags([-e 4*e -6*e 4*e -e],[-2:2,N,N);
B(1,1) = -1; B(1,2) = 2; B(2,1) = 2; B(2,2) = -5;
B(N-1,N) = 2; B(N-1,N-1) = -5; B(N,N) = -1; B(N,N-1) = 2; B=sg*B/dx^4;
L = spdiags([e -2*e e],[-1:1,N,N); L(1,1)=-1; L(N,N)=-1; L=ka*L/dx^2;
Z = 0*speye(N); I = speye(N); AA = [Z,I;M1*(B+L),-mu*M1];
V0 = zeros(N,1); V1 = 0.5*sin(pi*x(:)); V1 = V1 - mean(V1);
z = zeros(N,1); F = [z;z];
VV0 = [V0;V1]; VV = VV0; v = VV(1:N); vsav = v;
AL = speye(2*N) - th*dt*AA; AR = speye(2*N) + (1-th)*dt*AA;
subplot(1,2,1)
plot(x,v); drawnow;
for k=2:M
    VV = AL \ (AR*VV + dt*F);
    v = VV(1:N); vsav=[vsav,v];
    plot(x,v); drawnow;
end
subplot(1,2,2)
surf(x,t,vsav')
```

end

- ▶ Die θ -Methode wird verwendet.
- ▶ $V_1(0)$ ist sinusförmig mit $\int V_1 = 0$ und $m_i = 1$.



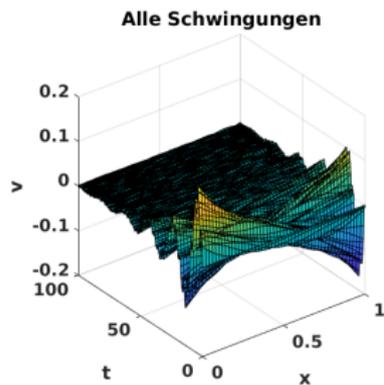
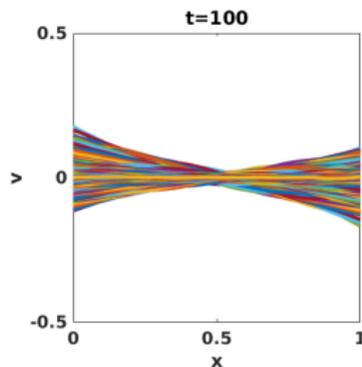
Schwankungen eines Pfeils – Massenverteilung

- ▶ Beispiel: Löse (§) numerisch mit $\mu, \kappa, \sigma > 0$.

```
function Cord
N = 50; M = 500; T = 100; dt = T/(M-1); dx = 1/(N-1);
x = linspace(0,1,N)'; t = linspace(0,T,M);
sg = 1.0e-2; ka = 1.0e-2; mu = 1.0e-1; th = 0.5;
m = ones(N,1); m(N)=2; M1 = spdiags(1./m,0,N,N); e = ones(N,1);
B = spdiags([-e 4*e -6*e 4*e -e],-2:2,N,N);
B(1,1) = -1; B(1,2) = 2; B(2,1) = 2; B(2,2) = -5;
B(N-1,N) = 2; B(N-1,N-1) = -5; B(N,N) = -1; B(N,N-1) = 2; B=sg*B/dx^4;
L = spdiags([e -2*e e],-1:1,N,N); L(1,1)=-1; L(N,N)=-1; L=ka*L/dx^2;
Z = 0*speye(N); I = speye(N); AA = [Z,I;M1*(B+L),-mu*M1];
V0 = zeros(N,1); V1 = zeros(N,1); V1(1)=1; V1 = V1 - mean(m.*V1)/mean(m);
z = zeros(N,1); F = [z;z];
VV0 = [V0;V1]; VV = VV0; v = VV(1:N); vsav = v;
AL = speye(2*N) - th*dt*AA; AR = speye(2*N) + (1-th)*dt*AA;
subplot(1,2,1)
plot(x,v); drawnow;
for k=2:M
    VV = AL \ (AR*VV + dt*F);
    v = VV(1:N); vsav=[vsav,v];
    plot(x,v); drawnow;
end
subplot(1,2,2)
surf(x,t,vsav')
```

end

- ▶ Massenverteilung ist nicht gleichmäßig
- ▶ $V_1(0)$ ist impulsiv mit $\int mV_1 = 0$.



$$\int m v_{tt} = \int \kappa v_{xx} - \int \sigma v_{xxxx} = \kappa v_x \Big|_0^1 - \sigma v_{xxx} \Big|_0^1 = 0$$

$$\Rightarrow \partial_t \int m v_t = 0 \Rightarrow \int m v_t(t) = \int m v_t(0) = 0 !$$

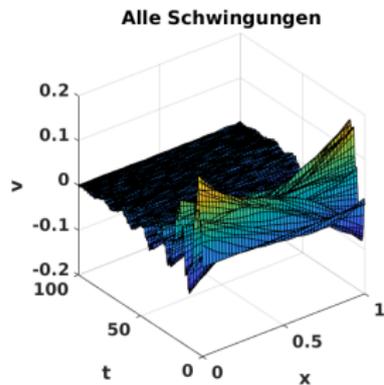
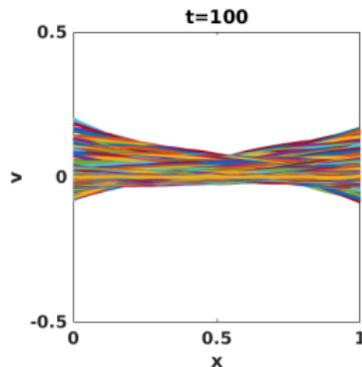
Schwankungen eines Pfeils – Federkraft

- ▶ Beispiel: Löse (§) numerisch mit $\mu, \kappa, \sigma > 0$.

```
function Cord
N = 50; M = 500; T = 100; dt = T/(M-1); dx = 1/(N-1);
x = linspace(0,1,N)'; t = linspace(0,T,M);
sg = 1.0e-2; ka = 1.0e-2; mu = 1.0e-1; th = 0.5; r = 1.0e0;
m = ones(N,1); m(N)=2; M1 = spdiags(1./m,0,N,N); e = ones(N,1);
B = spdiags([-e 4*e -6*e 4*e -e],-2:2,N,N);
B(1,1) = -1; B(1,2) = 2; B(2,1) = 2; B(2,2) = -5;
B(N-1,N) = 2; B(N-1,N-1) = -5; B(N,N) = -1; B(N,N-1) = 2; B=sg*B/dx^4;
L = spdiags([e -2*e e],-1:1,N,N); L(1,1) = -1; L(N,N) = -1; L=ka*L/dx^2;
Z = 0*speye(N); I = speye(N); AA = [Z,I;M1*(B+L),-mu*M1];
V0 = zeros(N,1); V1 = zeros(N,1); V1(1)=1; % V1 = V1 - mean(m.*V1)/mean(m);
z = zeros(N,1); f = z; F = [z;M1*f];
VV0 = [V0;V1]; VV = VV0; v = VV(1:N); vsav = v;
AL = speye(2*N) - th*dt*AA; AR = speye(2*N) + (1-th)*dt*AA;
subplot(1,2,1)
plot(x,v); drawnow;
for k=2:M
    f(1)=-r*v(1); F = [z;M1*f];
    VV = AL \ (AR*VV + dt*F);
    v = VV(1:N); vsav=[vsav,v];
    plot(x,v); drawnow;
end
subplot(1,2,2)
surf(x,t,vsav')
```

end

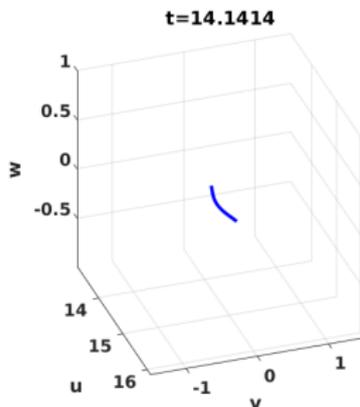
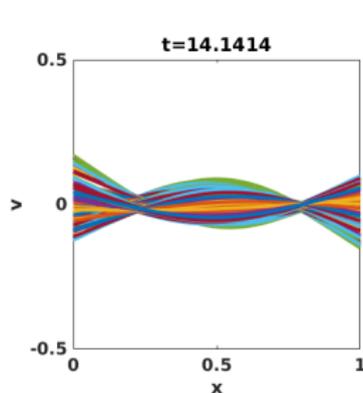
- ▶ $V_1(0)$ ist impulsiv mit $\int mV_1 \neq 0$.
- ▶ Modellierte Federkraft ist $f(1) = -rv(1)$.



Simulation eines Pfeilfluges

- ▶ Löse (§) für $v(x, t)$, kombiniere mit $u(x, t) = x + qt$ und $w(x, t) = p - gt^2/2$, um den Flug eines Pfeils zu simulieren.

```
p = 10; q = 1; g = 0.1; u = @(x,t) x(:)' + q*t(:); w = @(t) p - g*t(:).^2/2;
N = 50; M = 100; T = 20; dt = T/(M-1); dx = 1/(N-1);
x = linspace(0,1,N)'; t = linspace(0,T,M);
sg = 1.0e-2; ka = 1.0e-2; mu = 1.0e-1; th = 0.5; r = 1.0e0;
m = ones(N,1); m(N)=2; M1 = spdiags(1./m,0,N,N); e = ones(N,1);
B = spdiags([-e 4*e -6*e 4*e -e],[-2:2,N,N]);
B(1,1) = -1; B(1,2) = 2; B(2,1) = 2; B(2,2) = -5;
B(N-1,N) = 2; B(N-1,N-1) = -5; B(N,N) = -1; B(N,N-1) = 2; B=sg*B/dx^4;
L = spdiags([e -2*e e],[-1:1,N,N]); L(1,1) = -1; L(N,N) = -1; L=ka*L/dx^2;
Z = 0*speye(N); I = speye(N); AA = [Z,I;M1*(B+L),-mu*M1];
V0 = zeros(N,1); V1 = sin(pi*x(:));
V1 = V1 - mean(m.*V1)/mean(m);
z = zeros(N,1); f=z; F = [z;z];
VV0 = [V0;V1]; VV = VV0;
AL = speye(2*N) - th*dt*AA;
AR = speye(2*N) + (1-th)*dt*AA;
v = VV(1:N); vsav = v;
subplot(1,2,1)
plot(x,v); drawnow;
for k=2:M
    f(1)=-r*v(1); F = [z;M1*f];
    VV = AL \ (AR*VV + dt*F);
    v = VV(1:N); vsav = [vsav,v];
    subplot(1,2,1)
    hold on; plot(x,v);
    drawnow; hold off;
    subplot(1,2,2)
    plot3(u(x,t(k)),v,w(t(k))*ones(1,N));
    grid on; view([k 30]); drawnow;
end
```



Kopplung zwischen Komponenten der Position

- ▶ Rechnungen weisen darauf hin, dass das Elastizitätsmodell in L **keine erwünschte Wirkung** für einen Pfeil hat.
- ▶ Insbesondere sieht man auf Seiten 24-25 die **nicht passenden Annahmen**, die für die erste Formulierung der queren Auslenkungen notwendig sind.
- ▶ Ein realistisches Modell – für quere sowohl als auch längliche Auslenkungen – ergibt sich durch das Kriterium, dass die **Länge des Pfeils** sich nicht viel ändern soll.
- ▶ Der einfachste Weg zu diesem Kriterium basiert auf **Potenzialenergie** wie auf Seite 29, aber hier werden **alle Komponenten** der Auslenkung $\mathbf{u} = (u, v, w)$ miteinbezogen.
- ▶ Analog zur Grafik auf Seite 39 seien $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ die **3D Positionen** der diskreten Stücke im Pfeil. In einer anfanglichen waagerechten Restlage gilt $\mathbf{u}_i = (x_i, 0, 0)$ mit $x_i = (i - 1)/(n - 1)$. Weiters sind die Restlängen der Stücke gegeben durch $\ell_i = 1/(n - 1) = \Delta x = x_{i+1} - x_i$. Angenommen ist die Gesamtlänge des Pfeils $\ell = 1$.

Länge Erhaltende Kraft

- Die zu minimierende Potenzialenergie ist

$$\begin{aligned}\phi(\{\mathbf{u}_j\}) &= \frac{1}{2} \tilde{\kappa} \left[(\|\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1\| - \ell_1)^2 + \cdots + (\|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_{n-1}\| - \ell_{n-1})^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} \tilde{\kappa} \Delta x^2 \left[\left(\frac{\|\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1\|}{\Delta x} - 1 \right)^2 + \cdots + \left(\frac{\|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_{n-1}\|}{\Delta x} - 1 \right)^2 \right]\end{aligned}$$

wobei ausführliche Details auf Seiten 200-205 in diesem Skriptum zu finden sind.

- Die (partiellen) Ableitungen von ϕ nach $\mathbf{u}_j = (u_j, v_j, w_j)$ sind

$$\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{u}_j} = \kappa \left[(\|\Delta_x \mathbf{u}_{j-1}\| - 1) \frac{\Delta_x \mathbf{u}_{j-1}}{\|\Delta_x \mathbf{u}_{j-1}\|} - (\|\Delta_x \mathbf{u}_j\| - 1) \frac{\Delta_x \mathbf{u}_j}{\|\Delta_x \mathbf{u}_j\|} \right]$$

wobei $\kappa = \tilde{\kappa} \Delta x$ und $\Delta_x \mathbf{u}_j = (\mathbf{u}_{j+1} - \mathbf{u}_j) / \Delta x$.

- Mit der bidiagonalen $(n-1) \times n$ Matrix $D = \frac{1}{\Delta x} \begin{bmatrix} -1 & +1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & -1 & +1 \end{bmatrix}$ und der diagonalen $(n-1) \times (n-1)$ Matrix $C = \text{diag}\{1 - 1/\|\Delta_x \mathbf{u}_i\|\}$ ist die Länge erhaltende Kraft auf dem Pfeil gegeben durch $\mathbf{f} = -\left\{ \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{u}_i} \right\}_{\mathbf{u} \text{ Komp}} = -D^T C D \mathbf{U}$ für $\mathbf{U} = \{u_i\}$, $-D^T C D \mathbf{V}$ für $\mathbf{V} = \{v_i\}$ und $-D^T C D \mathbf{W}$ für $\mathbf{W} = \{w_i\}$.

Gekoppeltes System

- ▶ Wenn der Pfeil **waagerecht fliegt**, sind zeitabhängige Aspekte von u und w leicht gegeben durch qt für **vorwärts Bewegung** bzw. $p - gt^2/2$ für **Bewegung in Schwerkraft**.
- ▶ Diese Komponenten werden **explizit zum Schluss** in der grafischen Darstellung angefügt, und sonst wird die Bewegung des Pfeils in seinem **eigenen Koordinatensystem** folgendermaßen modelliert: $(C = C(\mathbf{U}(t), \mathbf{V}(t), \mathbf{W}(t)))$

$$(\diamond) \begin{cases} M\mathbf{U}''(t) = -\mu\mathbf{U}'(t) & +L\mathbf{U}(t) \\ M\mathbf{V}''(t) = -\mu\mathbf{V}'(t) & +(B+L)\mathbf{V}(t) -rv_1\mathbf{e}_1 -\omega\mathbf{W}'(t) \\ M\mathbf{W}''(t) = -\mu\mathbf{W}'(t) & +(B+L)\mathbf{W}(t) -rw_1\mathbf{e}_1 +\omega\mathbf{V}'(t) \end{cases}$$

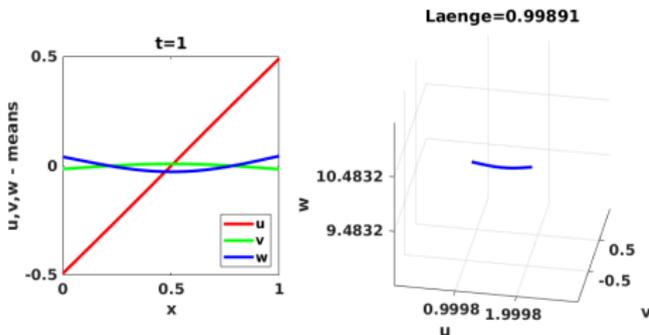
wobei $L = -D^T CD$ nun die **verallgemeinerte Form** hat.

- ▶ Die Terme $-rv_1\mathbf{e}_1$ und $-rw_1\mathbf{e}_1$ mit $\mathbf{e}_1 = \{1, 0, \dots, 0\}$ modellieren die **Federkraft** wie auf Seite 44.
- ▶ Die Terme $-\omega\mathbf{W}'$ und $\omega\mathbf{V}'$ erzeugen eine **Drehung**, analog zu den harmonischen Schwingungen auf Seite 18.
- ▶ **Aufgabe**: Ergänze die genannten zeitabhängigen Aspekte so, dass der Pfeil **nicht immer waagerecht** fliegen muss!

Simulation eines Pfeilfluges

► Löse (\diamond) und füge die Effekte $u + qt$ und $w + p - gt^2/2$ an.

```
p = 10; q = 1; g = 0.05; r = 1; om = 10; N = 50; M = 200000; T = 2;
x = linspace(0,1,N)'; t = linspace(0,T,M); dx = x(2)-x(1); dt = t(2)-t(1);
sg = 1.0e-2; ka = 1.0e2; mu = 1.0e-1; th = 0.5;
e = ones(N,1); e0 = e; e0(1) = 0; e0(N) = 0; e1 = e(1:N-1); z = zeros(N,1);
m = e; m(N) = 2; M1 = spdiags(1./m,0,N,N); I = speye(N); II = speye(2*N); Z = 0*I;
D = spdiags([-e1 e1],0:1,N-1,N)/dx; K = D'*D; B = K'*spdiags(e0,0,N,N)*K; B = -sg*B;
u = x; ut = z;
v = z; vt = sin(pi*x)/2; vt = mean(m.*vt)/mean(m) - vt;
w = z; wt = z;
U = [u;ut]; V = [v;vt]; W = [w;wt];
for k=2:M
    Fu = [z;z];
    Fv = [-om*w;z]; Fv(N+1) = -r*v(1)/m(1);
    Fw = [ om*v;z]; Fw(N+1) = -r*w(1)/m(1);
    du = D*u; dv = D*v; dw = D*w;
    dX = sqrt(du.^2 + dv.^2 + dw.^2);
    % Laenge = sum(dX*dx)
    C = ...
    spdiags(ka*(1-1./dX(:)),0,N-1,N-1);
    L = -D'*C*D;
    Au = [Z,I;M1*L , -mu*M1];
    Av = [Z,I;M1*(L+B), -mu*M1];
    Aw = [Z,I;M1*(L+B), -mu*M1];
    U = ((II - th*dt*Au)\ ...
        ((II + (1-th)*dt*Au)*U + dt*Fu);
    V = ((II - th*dt*Av)\ ...
        ((II + (1-th)*dt*Av)*V + dt*Fv);
    W = ((II - th*dt*Aw)\ ...
        ((II + (1-th)*dt*Aw)*W + dt*Fw);
    u = U(1:N); v = V(1:N); w = W(1:N);
    subplot(1,2,1); plot(x,u-mean(u),'r',x,v-mean(v),'g',x,w-mean(w),'b'); drawnow;
    subplot(1,2,2); plot3(u+q*t(k),v,w+p-g*t(k)^2/2,'b'); grid on; view([10 30]); drawnow;
end
```



Empirisches Modell der Pfeil-Schwankungen

- ▶ Für die Schwankungen $v(x, t) = \theta(t)\nu(x)$ sucht man eine schwingende aber auch dämpfende Funktion $\theta(t)$ der Zeit $t \geq 0$ und eine Funktion $\nu(x)$ des Orts $x \in [0, 1]$, wobei die gewünschten Eigenschaften für $\nu(x)$ sind:

$$\nu''(x) = 0, \quad x = 0, 1, \quad \nu(x) = 0, \quad x = x_0, 1 - x_0$$

für fixiertes $x_0 \in (0, \frac{1}{2})$, und das **Zentroid** der Kurve $\nu(x)$ liegt an der Stelle $(x, y) = (\frac{1}{2}, 0)$, alternativ $\int_0^1 \nu(x) dx = 0$.

- ▶ **Nur** wenn $\nu(x)$ (stückweise) **linear** ist, sind **all** dieser Eigenschaften für ein beliebiges Vielfaches $\vartheta\nu(x)$ auch erfüllt.
- ▶ Eine passende Form für $\theta(t)$ ist

$$\theta(t) = \exp(-t/10) \sin(t), \quad t \geq 0$$

und dann gelten $v(x, 0) = 0$ und $v_t(x, 0) = \nu(x)$ anfänglich.

- ▶ Eine passende Form für $\nu(x)$ mit Zentroid $(\frac{1}{2}, 0)$ ist

$$\nu(x) = \frac{1}{10} \sin(\pi x) - \alpha, \quad \alpha = 0.063162931, \quad x \in [0, 1].$$

Empirisches Modell der Pfeil-Schwankungen

- ▶ Es gelten $\nu(0) = \nu(1) = -\alpha$, $\nu(\frac{1}{2}) = \frac{1}{10} - \alpha$,

$$\begin{aligned}\nu'(x) &= \frac{\pi}{10} \cos(\pi x), & \nu'(0) = -\nu'(1) &= \frac{\pi}{10} \\ \nu''(x) &= -\frac{\pi^2}{10} \sin(\pi x), & \nu''(0) = \nu''(1) &= 0.\end{aligned}$$

- ▶ Das Zentroid (\bar{x}, \bar{v}) ist gegeben durch

$$\bar{x} = \frac{1}{\ell} \int_0^1 x \sqrt{1 + [\nu'(x)]^2} dx = \frac{1}{2}, \quad \bar{v} = \frac{1}{\ell} \int_0^1 \nu(x) \sqrt{1 + [\nu'(x)]^2} dx = 0$$

wobei $\ell = \int_0^1 \sqrt{1 + [\nu'(x)]^2} dx$ die Länge der Kurve ist.

- ▶ Das Zentroid der Kurve $v(x, t) = \theta(t)\nu(x)$ bezüglich x **ändert** sich im Lauf der Zeit.
- ▶ **Alternativ** mit $\alpha = \frac{1}{5\pi}$ gilt $\int_0^1 \nu(x) dx = 0$ und so $\int_0^1 \vartheta \nu(x) dx \stackrel{\forall \vartheta}{=} 0$.
- ▶ Ein einfaches Modell für den Flug ist gegeben durch

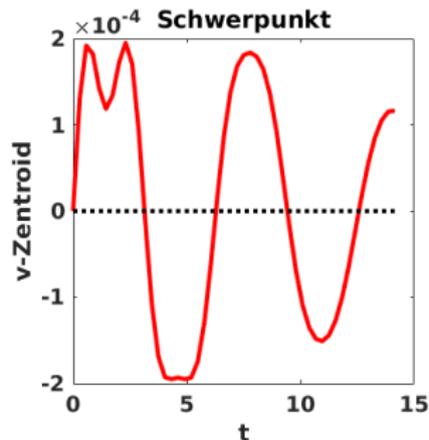
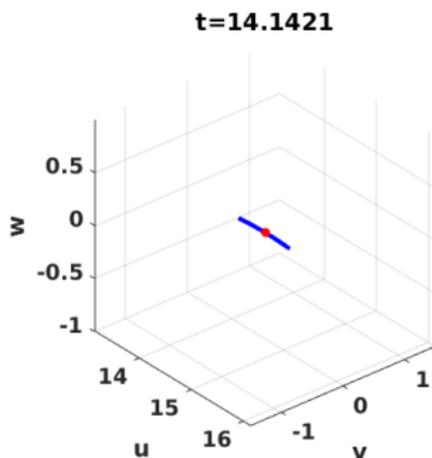
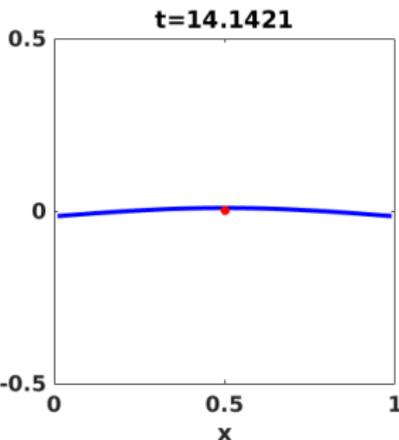
$$u(x, t) = x + qt, \quad v(x, t) = \nu(x)\theta(t), \quad w(x, t) = p + st - gt^2/2$$

wobei $u_t(x, t) = q$, $mw_{tt}(x, t) = -mg$, $w(x, 0) = p$, $w_t(x, 0) = s$.

Empirisches Modell eines Pfeilfluges

► Implementierung des empirischen Modells:

```
N = 50; M = 50; a = 0.063162931; p = 10; q = 1; g = 0.1; s = 0; T = (sqrt(2*g*p+s^2)+s)/g;
n0 = @(x) sin(pi*x)/10 - a; n1 = @(x) pi*cos(pi*x)/10; th = @(t) exp(-t/10).*sin(t);
u=@(x,t) x + q*t; v=@(x,t) th(t)*n0(x); vx=@(x,t) th(t)*n1(x); w=@(x,t) x*0 + p+s*t-g*t^2/2;
x = linspace(0,1,N); h = x(2)-x(1); xc = x(1:N-1)+h/2; t = linspace(0,T,M)'; yc = [];
for k=1:M
    u0 = u(xc,t(k)); w0 = w(xc,t(k));
    v0 = v(xc,t(k)); v1 = vx(xc,t(k)); L = h*sum(sqrt(1+v1.^2));
    X = h*sum(xc.*sqrt(1+v1.^2))/L; Y = h*sum(v0.*sqrt(1+v1.^2))/L; yc = [yc,Y];
    subplot(1,3,1); plot(xc,v0,'b',X,Y,'r*'); drawnow;
    subplot(1,3,2); plot3(u0,v0,w0,'b',u(0.5,t(k)),Y,w(0.5,t(k)),'r*');
    grid on; view([k 30]); drawnow;
end
subplot(1,3,3); plot(t,yc,'r',t,0*t,'k:')
```



Empirisches Modell eines Pfeilfluges

- ▶ Nun wird der Parameter α in $\nu(x)$ von der **alternativen Bedingung** bestimmt, (Erinnerung: $v_t(x, 0) = \nu(x)$!)
$$\nu(x) = \frac{1}{10} \sin(\pi x) - \alpha, \quad \alpha = \int_0^1 \frac{1}{10} \sin(\pi x) dx, \quad \int_0^1 \nu(x) dx = 0.$$
- ▶ Laut Beobachtungen, **dreht** sich der Pfeil um die eigene Achse.
- ▶ Weiters zeigen Beobachtungen, dass der Pfeil zu jeder Zeit **tangent** auf der Flugbahn liegt. Jedoch ist der Pfeil in den bisherigen Simulationen immer waagrecht geflogen.
- ▶ Um diese vernachlässigten Effekte zu berücksichtigen, werden die Funktionen u , v , w folgendermaßen ergänzt,

$$u(x, t) = x + qt, \quad v(x, t) = \cos(\omega t)\theta(t)\nu(x),$$

$$w(x, t) = \sin(\omega t)\theta(t)\nu(x) + (p + st - gt^2/2) + (s - gt)x/q$$

- ▶ Das Paar $(\sin(\omega t), \cos(\omega t))$ erzeugt die Drehung.
- ▶ Die Bahn des Fußes ist $(x(t), y(t)) = (qt, p + st - \frac{1}{2}gt^2)$ mit $dy/dx = \dot{y}/\dot{x} = (s - gt)/q$.
- ▶ Die Orientierung des Pfeils ist durch $(s - gt)x/q$ bestimmt. Anfänglich ist der Pfeil p hoch im Fuß, $p + s/q$ hoch im Kopf.

Empirisches Modell eines Pfeilfluges

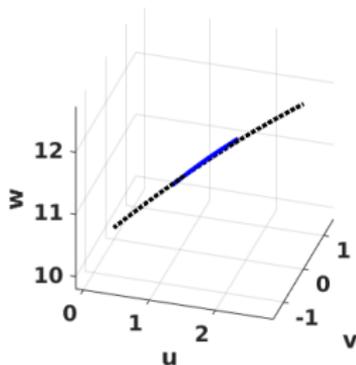
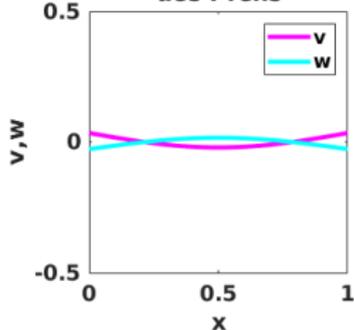
► Implementierung des empirischen Modells:

```
N = 50; M = 500; a = linspace(0,1,N); a = mean(sin(pi*a)/10);  
p = 10; q = 1; s = 1; g = 0.1; om = 10*q; T = (sqrt(2*g*p+s^2)+s)/g;  
n0 = @(x) sin(pi*x)/10 - a; th = @(t) exp(-t/10).*sin(t);  
u = @(x,t) x + q*t; v = @(x,t) cos(om*t)*th(t)*n0(x);  
w = @(x,t) sin(om*t)*th(t)*n0(x) + p + s*t - g*t^2/2 + (s - g*t)*x/q;  
x = linspace(0,1,N); t = linspace(0,T,M)';  
for k=1:M  
    u0 = u(x,t(k)); ur = x;  
    v0 = v(x,t(k)); vr = cos(om*t(k))*n0(x)*th(t(k));  
    w0 = w(x,t(k)); wr = sin(om*t(k))*th(t(k))*n0(x);  
    subplot(1,3,1); plot(x,v0,'m',x,wr,'c'); drawnow;  
    subplot(1,3,2); plot3(u0,v0,w0,'b',q*t,0*t,p+s*t-g*t.^2/2,'k:'); drawnow;  
    subplot(1,3,3); plot3(ur,vr,wr,'b'); drawnow;  
end
```

Zeit = 0.88

**Flug des Pfeils
in 3D**

**y,z-Perspektiven
des Pfeils**



**Drehung des Pfeils
von vorn gesehen**

