DISKRETE MATHEMATIK

Kapitel 3: Einführung in die Graphentheorie

MAT.106UB Vorlesung im WS 2018/19

Günter LETTL

Institut für Mathematik und wissenschaftliches Rechnen
an der Karl-Franzens-Universität Graz

3.1 Einfache Graphen

[A] 6.1, [I-L] 7.1, [L-P-V] 7.1, [M-N] 4.1, [St] 2.1, [T] III.9

Definition (1)

a) Ein *(einfacher) Graph G* ist ein Paar $G = (V, E)$, bestehend aus einer Menge V, deren Elemente *Knoten* (oder: *Ecken, Punkte*; engl.: *vertex, vertices*) des Graphen heißen,
und einer Menge E von 2-elementigen Teilmengen von V (d.h.: $e \in E \Rightarrow e \in \mathcal{P}(V) \wedge \#e = 2$), deren Elemente *Kanten* (engl.: *edges*) des Graphen heißen.

Ist die Menge V endlich, so heißt G ein *endlicher Graph*.

Ist $e = \{v_1, v_2\} \in E$, so sagt man: „Die Kante e verbindet die Knoten v_1 und v_2 des Graphen", und man nennt die Ecken v_1 und v_2 *benachbart* (oder: *adjazent*).

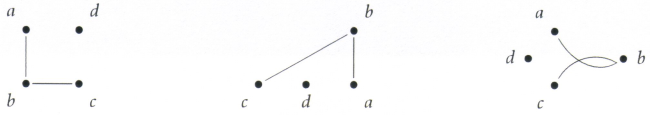


Abb. 9.1: Drei Darstellungen des Graphen G = (V, E) mit V = {a, b, c, d} und E = {{a, b}, {b, c}}

[T-42]

Definition (1) (Fortsetzung)

b) Es sei $G = (V, E)$ ein endlicher Graph.
Für eine Ecke $v \in V$ bezeichnet

$$N(v) = \{x \in V \mid \{v, x\} \in E\}$$

die *Menge aller Nachbarn* des Knotens v,

und $\mathrm{gr}(v) = \#N(v)$ heißt der *Grad* (oder: die *Valenz*) der Ecke v; dies ist auch die Anzahl der von v ausgehenden Kanten.

Ist $\mathrm{gr}(v) = 0$, so heißt v ein *isolierter Knoten*.
Ist $\mathrm{gr}(v) = 1$, so heißt v ein *Endknoten* (oder: *Blatt*).

Für $k \in \mathbb{N}_0$ heißt G ein *k-regulärer Graph*, wenn für alle $v \in V$ gilt: $\mathrm{gr}(v) = k$.

$\delta(G) = \min\{\mathrm{gr}(v) \mid v \in V\}$ bzw. $\Delta(G) = \max\{\mathrm{gr}(v) \mid v \in V\}$ heißen der *Minimalgrad* bzw. der *Maximalgrad* des Graphen G.

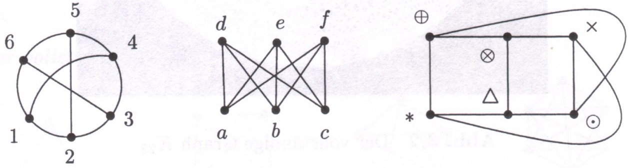
Definition (1) (Fortsetzung)

c) Es seien $G = (V, E)$ und $G' = (V', E')$ Graphen.
G' heißt *isomorph zu* G (Schreibweise: $G \simeq G'$), wenn es eine bijektive Abbildung $f : V \to V'$ gibt, sodass

$$\forall\ v_1, v_2 \in V\colon\ \{v_1, v_2\} \in E \iff \{f(v_1), f(v_2)\} \in E' .$$

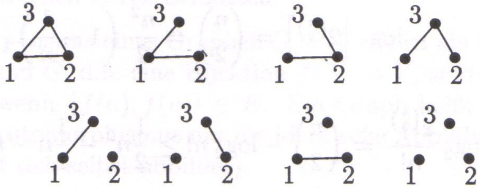
f heißt dann ein (*Graphen*-)*Isomorphismus* von G nach G'.

Problem. Die folgenden drei Bilder zeigen isomorphe Graphen. Finden Sie Isomorphismen!



[M-N-112]

Für $V = \{1,2,3\}$ haben wir z.B. die folgenden $8 = 2^{\binom{3}{2}}$ verschiedenen Graphen:



Unter diesen 8 Graphen finden wir jedoch nur 4 nicht isomorphe:

[M-N-113]

Definition (1) (Fortsetzung)

G' heißt ein *Teilgraph* (oder: *Subgraph*) von G, wenn $V' \subset V$ und $E' \subset E$ gilt.

Ein Teilgraph G' von G heißt *induzierter* (oder: *gesättigter*) *Teilgraph* von G, (auch: von V' *aufgespannter* Teilgraph von G), wenn $E' = E \cap \mathcal{P}(V')$ gilt (Schreibweise: $G' = G[V']$);
d.h.: G' enthält alle Kanten von G, welche Ecken aus V' verbinden.

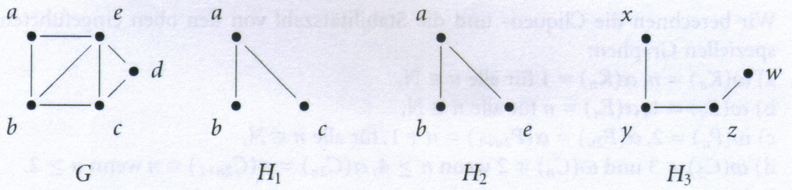


Abb. 9.2: H_1 ist nicht Subgraph von G, weil die Kante {a, c} in G nicht existiert. H_2 ist Subgraph von G, aber nicht induziert. H_3 ist isomorph zu dem durch {a, b, c, d} induzierten Subgraphen von G.

[T-43a]

Beispiel 1: Es seien $n, m \in \mathbb{N}$ und $V \subset \mathbb{N}_0$.

a.) Der vollständige Graph K_n :

$$V = \{1, 2, \ldots, n\} \qquad E = \big\{\{i, j\} \mid 1 \le i < j \le n\big\}$$

hat n Knoten und $\binom{n}{2}$ Kanten, ist $(n-1)$-regulär.

b.) Der stabile Graph E_n :

$$V = \{1, 2, \ldots, n\} \qquad E = \emptyset$$

hat n Knoten und 0 Kanten, ist 0-regulär.

c.) Der Weg (engl.: path) der Länge n, P_n :

$$V = \{0, 1, 2, \ldots, n\} \qquad E = \big\{\{i-1, i\} \mid 1 \le i \le n\big\}$$

hat $n+1$ Knoten und n Kanten.

Beispiel 1: (Fortsetzung)

d.) Der Kreis (engl.: cycle, circuit) der Länge $n \geq 3$, C_n **:**

$$V = \{1, 2, \ldots, n\} \quad E = \big\{\{i, i+1\} \mid 1 \leq i \leq n-1\big\} \cup \big\{\{n, 1\}\big\}$$

hat n Knoten und n Kanten, ist 2-regulär.

e.) Der vollständige, bipartite Graph $K_{n,m}$ **:**

$$V = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\} \,\dot\cup\, \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$$

$$E = \big\{\{u_i, v_j\} \mid 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq m\big\}$$

hat $n + m$ Knoten und $n \cdot m$ Kanten.

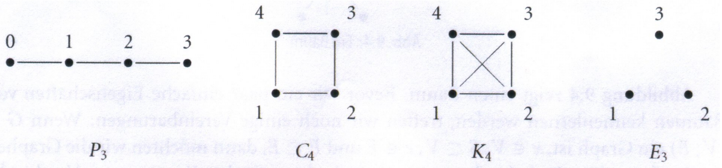


Abb. 9.3: Ein Weg der Länge 3, ein Kreis der Länge 4, eine 4-Clique und eine 3-stabile Menge

[T-43b]

Lemma (1)

Es sei $G = (V, E)$ ein endlicher Graph. Dann gilt:

a) (Handshake-Lemma)

$$\sum_{v \in V} gr(v) = 2\,\#E\ .$$

Folglich ist die Anzahl der Knoten von G, die einen ungeraden Grad haben, eine gerade Zahl.

b) *Ist $\#V \geq 2$, so besitzt G (mindestens) zwei Knoten mit gleichem Grad.*

3.2 Wege, Kreise, Bäume, Wälder

[A] 6.3, 7.1, [I-L] 7.3, [L-P-V] 7.2, 8.1-2, [M-N] 4.2, 5.1, [St] 2.2, [T] III.9

Definition (2)

Es seien $G = (V, E)$ ein Graph mit $\#V \geq 1$ und $n \in \mathbb{N}$.

a) Ein Teilgraph $G' = (V', E')$ von G heißt

•) ein *Weg* (der *Länge* n), wenn G' isomorph zu P_n (vgl. Beispiel 1) ist. Die Knoten von G' mit dem Grad 1 heißen die *Endknoten* des Weges G'.

•) ein *Weg* (der *Länge* 0), wenn $\#V' = 1$ (und $E = \emptyset$) ist.

•) ein *Kreis* (der *Länge* $n \geq 3$), wenn G' isomorph zu C_n ist. Ein Kreis der Länge 3 heißt auch *Dreieck*.

•) eine *Clique* (mit n Knoten) oder *n-Clique*, wenn G' isomorph zu K_n ist.

Definition (2) (Fortsetzung)

b) Der Graph G heißt

•) *zusammenhängend*, wenn $\forall\, v, w \in V$ gilt: in G existiert ein Weg von v nach w.

•) *kreisfrei* (oder: ein *Wald*), wenn G keinen Kreis als Teilgraph enthält.

•) ein *Baum*, wenn G zusammenhängend und kreisfrei ist.

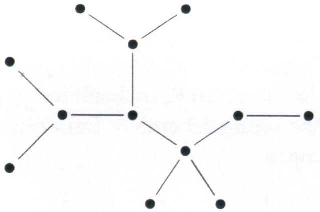


Abb. 9.4: Ein Baum

[T-44]

Definition (2) (Fortsetzung)

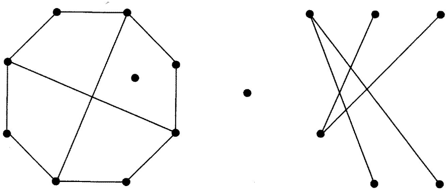
c) Die Relation *„ist erreichbar"* (Symbol: $\rightsquigarrow$) auf V wird für $v, w \in V$ wie folgt definiert:

$$v \rightsquigarrow w \overset{\text{def}}{\iff} \exists \text{ ein Weg von } v \text{ nach } w\ .$$

Dies ist eine Äquivalenzrelation auf V (vgl. Lemma 2.a) unten), und die von den Äquivalenzklassen $[v]_{\rightsquigarrow}$ induzierten Teilgraphen $G\big[[v]_{\rightsquigarrow}\big]$ heißen die (*Zusammenhangs-*)*Komponenten* von G.

Schreibweise: $K(v) = G\big[[v]_{\rightsquigarrow}\big]$.

Abbildung 7.14 zeigt einen Graphen mit insgesamt 5 Zusammenhangskomponenten. Davon sind 2 isolierte Ecken.



Lemma (2)

Es sei $G = (V, E)$ ein Graph mit $\#V \geq 1$.

a) *Die Relation „ist erreichbar" aus Definition 2.c) ist eine Äquivalenzrelation.*

b) *Ist G ein Wald, so ist jede Zusammenhangskomponente von G ein Baum.*

c) *Für einen zusammenhängenden Teilgraphen G' von G gilt: G' ist genau dann eine Zusammenhangskomponente von G, wenn es keinen zusammenhängenden Teilgraphen G'' von G gibt, sodass G' Teilgraph von G'' und $G' \neq G''$ ist; (d.h.: G' ist ein inklusions-maximaler zusammenhängender Teilgraph von G.)*

d) *Ist G ein Baum und $\#V \geq 2$, so besitzt G mindestens zwei Blätter.*

e) *Ist G ein Baum, $\#V \geq 2$ und $v \in V$ ein Blatt, so ist auch $G' = (V' = V \setminus \{v\}, E' = E \cap \mathcal{P}(V'))$ ein Baum.*

Satz (1) (Charakterisierung von Bäumen)

Es sei $G = (V, E)$ ein Graph mit $\#V = n \geq 1$ und $\#E = m \in \mathbb{N}_0$.
Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

a) *G ist ein Baum.*

b) *G ist zusammenhängend und $m = n - 1$.*

c) *G ist kreisfrei und $m = n - 1$.*

d) *Zu je zwei Knoten $v \neq w \in V$ gibt es genau einen Weg von v nach w.*

e) *G ist „kantenminimal zusammenhängend",*
d.h. G ist zusammenhängend und jeder Graph $G' = (V, E')$ mit $E' \subsetneqq E$ ist nicht zusammenhängend.

f) *G ist „kantenmaximal kreisfrei",*
d.h. G ist kreisfrei, und jeder Graph $G' = (V, E')$ mit $E \subsetneqq E'$ ist nicht kreisfrei.

3.3 Eulertouren und Hamiltonkreise

[A] 8.4, [I-L] 7.2, [L-P-V] 7.3, [M-N] 4.4, [St] 2.4.1, [T] III.11

Definition (3)

Es seien $G = (V, E)$ ein Graph und $n \in \mathbb{N}_0$.

a) Ein *Kantenzug* in G ist eine Folge von Knoten $v_0, v_1, \ldots, v_n$ $\in V$, sodass für alle $1 \leq i \leq n$ gilt: $e_i = \{v_{i-1}, v_i\} \in E$.
Ist $v_n = v_0$, so heißt der Kantenzug *geschlossen*.

b) Eine *Eulertour* in G ist ein geschlossener Kantenzug $v_0, v_1, \ldots, v_n = v_0$ derart, dass für jedes $e \in E$ genau ein $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ existiert mit $e = e_i = \{v_{i-1}, v_i\}$;
d.h.: jede Kante von E kommt in dem Kantenzug genau einmal vor.
G heißt ein *Eulerscher Graph*, wenn es eine Eulertour in G gibt.

c) Ein *Hamiltonkreis* in G ist ein Kreis in G, dessen Knotenmenge V ist; d.h.: ein geschlossener Kantenzug, der jeden Knoten von V genau einmal enthält.

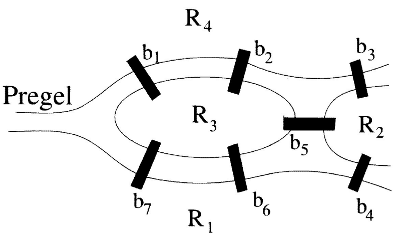


Abbildung 7.17: Brücken von Königsberg

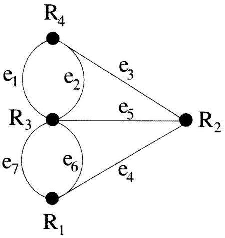


Abbildung 7.18: Königsberger Brückengraph

[I-L-246]

Satz (2) (Charakterisierung von Eulerschen Graphen)

Für einen zusammenhängenden Graphen $G = (V, E)$ sind folgende Aussagen äquivalent:

a) *Es existiert eine Eulertour in G.*

b) *Für jedes $v \in V$ ist $gr(v)$ eine gerade Zahl.*

c) *Es gibt eine Partition von E in „kantendisjunkte" Kreise.*

Satz (3)

Es sei $G = (V, E)$ *ein Graph mit* $\#V \geq 3$.
Gilt für alle $x, y \in V$ *mit* $x \neq y$ *und* $\{x, y\} \notin E$, *dass* $gr(x) + gr(y) \geq \#V$, *so besitzt* G *einen Hamiltonkreis.*

Korollar (1)

Ist $G = (V, E)$ *ein Graph mit* $\#V \geq 3$ *und* $\delta(G) \geq \frac{\#V}{2}$, *so besitzt* G *einen Hamiltonkreis.*

Ausblick: Ebene (= planare) Graphen

Kann ein Graph $G = (V, E)$ so in der (Zeichen-)Ebene dargestellt werden, dass die Ecken verschiedene Punkte der Ebene sind und die Kanten Verbindungslinien („ohne Überkreuzungen”) zwischen diesen Punkten sind, d.h. Kanten schneiden sich nur in Ecken?

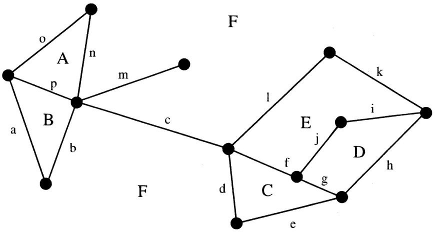


Abbildung 7.30: Planarer Graph mit 6 Gebieten

[I-L-271]

Es sei $g \in \mathbb{N}$ die Anzahl der „Länder” (= zusammenhängende Gebiete), in die ein zusammenhängender, ebener Graph die Ebene zerlegt. Dann gilt die Euler'sche Polyederformel:

$$\#V - \#E + g = 2 \ .$$