DISKRETE MATHEMATIK

Kapitel 2: Anfänge der Kombinatorik

MAT.106UB Vorlesung im WS 2018/19

Günter LETTL

Institut für Mathematik und wissenschaftliches Rechnen
an der Karl-Franzens-Universität Graz

2.1 Funktionen auf endlichen Mengen und Variationen

[A] 1.2, [I-L] 6.1.1-6.1.2, [L-P-V] 1, 2.4, [M-N] 3.1-3.2, [St] 1.1-1.2, [T] II.4, IV.15

Satz (1)

Es sei $n \in \mathbb{N}$, und für alle $1 \leq i \leq n$ sei A_i eine endliche Menge mit $|A_i| = m_i$ Elementen.

a) (Summenregel) *Sind die Mengen A_i paarweise disjunkt, d.h. für alle $1 \leq i < j \leq n$ ist $A_i \cap A_j = \emptyset$, so gilt*

$$\Big|\dot{\bigcup_{1\leq i\leq n}} A_i\Big| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| = m_1 + m_2 + \cdots + m_n \ .$$

b) (Produktregel)

$$\Big|\prod_{1\leq i\leq n} A_i\Big| = \prod_{i=1}^{n} |A_i| = m_1 \cdot m_2 \cdot \cdots \cdot m_n \ .$$

Satz (2)

Es seien A und B nichtleere, endliche Mengen. Dann gilt:

a) *Es existiert eine injektive Abbildung $f : A \to B$ genau dann, wenn $|A| \leq |B|$.*

b) *Es existiert eine surjektive Abbildung $f : A \to B$ genau dann, wenn $|A| \geq |B|$.*

c) *Es existiert eine bijektive Abbildung $f : A \to B$ genau dann, wenn $|A| = |B|$.*

d) *Ist $|A| = |B|$, so sind für eine Abbildung $f : A \to B$ die folgenden Aussagen äquivalent:*

$$f \text{ ist bijektiv} \iff f \text{ ist injektiv} \iff f \text{ ist surjektiv} .$$

Korollar (1)

Es seien $n, k \in \mathbb{N}$, M eine Menge mit $|M| = n$ und $L = \{1, 2, \ldots, k\} \subset \mathbb{N}$.

a) (Schubfachschluss)
Es sei $n > k$. Dann existiert keine injektive Funktion $f : M \to L$.

Verbale Formulierung 1: *Verteilt man n Objekte auf k „Laden", so gibt es (mindestens) eine Lade, in der (mindestens) zwei Objekte sind.*
Verbale Formulierung 2: *Färbt man n Objekte mit k Farben, so sind (mindestens) zwei Objekte mit derselben Farbe gefärbt.*

b) (Satz von Ramsey)
Es seien $l_1, l_2, \ldots, l_k \in \mathbb{N}$ und $n > l_1 + l_2 + \cdots + l_k - k$.
Dann gibt es für jede Funktion $f : M \to L$ ein $i \in \{1, \ldots, k\}$ mit

$$|f^{-1}(\{i\})| \geq l_i \ .$$

Verbale Formulierung: *Übung*

Satz (3)

Es seien A und B endliche, nichtleere Mengen mit $|A| = k$ und $|B| = n$. Dann gilt:

a) *Es gibt n^k verschiedene Funktionen von A nach B.*

b) *Es gibt* $\prod_{j=0}^{k-1}(n-j) = n(n-1)(n-2)\cdot\dots\cdot(n-k+1)$ *verschiedene injektive Funktionen von A nach B.*

c) $\left|\mathcal{P}(B)\right| = 2^n$.

Korollar (2) (Variationen)

Es seien $n, k \in \mathbb{N}$. Von n (unterscheidbaren) Objekten werden nacheinander (d.h. unter Berücksichtigung der Reihenfolge) k Objekte ausgewählt. Dafür gibt es

a) *n^k Möglichkeiten, falls nach jeder Auswahl das Objekt wieder „zurückgelegt" wird (d.h. Objekte auch mehrmals ausgewählt werden können) – „Variation mit Wiederholungen".*

b) *$\prod_{j=0}^{k-1}(n-j)$ Möglichkeiten, falls die ausgewählten Objekte nicht „zurückgelegt" werden (d.h. jedes Objekt höchstens einmal gewählt werden kann) – „Variation ohne Wiederholungen".*

Ist insbesondere $k = n$, so gibt es $\prod_{j=0}^{n-1}(n-j) = n(n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 1 = n!$ Möglichkeiten, n unterscheidbare Objekte auf n „Plätzen" anzuordnen – „Permutation von n Objekten".

2.2 Binomialkoeffizienten und Kombinationen

[A] 1.1, [I-L] 6.1.4-5, [L-P-V] 3, [M-N] 3.3, [St] 1.2, [T] II.5

Definition (1)

a) Für $n \in \mathbb{N}_0$ definiert man

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n$$

und nennt diese Zahl *n Faktorielle* oder *n Fakultät*.

b) Für $n \in \mathbb{N}_0$ und $k \in \mathbb{Z}$ wird der *Binomialkoeffizient* $\binom{n}{k}$ (sprich: „*n* über *k*", definiert durch:

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!} & \text{falls } 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{falls } k < 0 \text{ oder } n < k \end{cases} .$$

Offensichtlich gilt für $0 \leq k \leq n$: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Satz (4)

Es seien $n \in \mathbb{N}_0$ und $k \in \mathbb{Z}$.

a) *Für $k \geq 0$ gilt:* $\displaystyle\binom{n}{k} = \prod_{i=1}^{k} \frac{n-i+1}{i} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!}$.

b) *Es gilt* $\displaystyle\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$ *und* $\binom{n}{k} \in \mathbb{N}_0$.

c) *Eine endliche Menge M mit n Elementen besitzt genau $\binom{n}{k}$ Teilmengen mit k Elementen.*

d) *Es sei $k \geq 0$.*
Aus n (unterscheidbaren) Objekten werden k Objekte ausgewählt, wobei die Reihenfolge des Auswählens nicht berücksichtigt wird.
Dafür gibt es $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten –
„Kombination ohne Wiederholungen".

Korollar (3)

Es sei $n \in \mathbb{N}_0$.

a) (Binomischer Lehrsatz)

Für (beliebige) Zahlen a, b und $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i =$$

$$= a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + b^n.$$

b)

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n \; .$$

Satz (5)

Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{N}_0$.

a) *Die Menge*

$$A = \left\{ (k_1, k_2, \ldots, k_n) \in \mathbb{N}_0^n \;\middle|\; k_1 + k_2 + \cdots + k_n = k \right\}$$

hat $|A| = \binom{n+k-1}{k}$ *Elemente.*

b) *Von n (unterscheidbaren) Objekten werden nacheinander k Objekte ausgewählt, wobei nach jeder Auswahl das gewählte Objekt wieder „zurückgelegt" wird.*

Dafür gibt es $\binom{n+k-1}{k}$ Möglichkeiten, wenn die Reihenfolge der ausgewählen Objekte nicht berücksichtigt wird – „Kombination mit Wiederholungen".

2.3 Multinomialkoeffizienten
[L-P-V] 3, [M-N] 3.3

Definition (2)

Es seien $r \in \mathbb{N}$ und $n, k_1, k_2, \ldots, k_r \in \mathbb{N}_0$ mit $k_1 + k_2 + \cdots + k_r = n$.

Der *Multinomialkoeffizient* $\binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_r}$ wird definiert durch:

$$\binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_r} = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdots k_r!} \, .$$

Satz (6)

Es sei $r \in \mathbb{N}$.

a) (Multinomialsatz)
Für $n \in \mathbb{N}_0$ und beliebige Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_r$ gilt:

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_r)^n = \sum_{\substack{0 \le i_1, i_2, \ldots, i_r \le n \\ i_1 + i_2 + \cdots + i_r = n}} \binom{n}{i_1, i_2, \ldots, i_r} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdot \cdots \cdot x_r^{i_r} \,.$$

***b)** Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $k_1, k_2, \ldots, k_r \in \mathbb{N}_0$ mit*
$k_1 + k_2 + \cdots + k_r = n$.

Es seien n Objekte gegeben, von denen jeweils k_i „vom selben Typ" sind (d.h. sie sind nicht unterscheidbar).

Dann gibt es genau $\binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_r}$ Möglichkeiten, diese n Objekte unter Berücksichtigung ihrer Reihenfolge anzuordnen – „Permutation mit Wiederholungen".

2.4 Inklusion – Exklusion

[A] 2.4, [I-L] 6.1.3, [L-P-V] 2.3, [M-N] 3.7, [St] 1.2, [T] II.4.1

Satz (7)

Es seien $k \in \mathbb{N}$ und $A_1, A_2, \ldots, A_k$ endliche Mengen. Dann gilt:

$$\#\Big(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{k} (\#A_i) - \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le k} \#(A_{i_1} \cap A_{i_2}) +$$

$$+ \sum_{1 \le i_1 < i_2 < i_3 \le k} \#(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}) - \cdots + (-1)^{k-1} \#(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k) =$$

$$= \sum_{j=1}^{k} \Bigg((-1)^{j-1} \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_j \le k} \#(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_j}) \Bigg) .$$

2.5 Partitionen

[A] 1.2, [L-P-V] 3.4, [St] 1.3.2, 1.3.4, [T] II.6

Definition (3)

Es seien $k, n \in \mathbb{N}$ und M eine Menge mit $\#M = n$.

Eine *k-Partition von M* besteht aus k nichtleeren, paarweise disjunkten Teilmengen von M (ohne Berücksichtigung deren Reihenfolge), deren Vereinigung gleich M ist, also:

$$\{A_1, A_2, \ldots, A_k\} \subset \mathcal{P}(M) \setminus \{\emptyset\} \text{ mit}$$

$$\forall 1 \leq i < j \leq k : A_i \cap A_j = \emptyset \quad \text{und} \quad \bigcup_{i=1}^{k} A_i = M \ .$$

Die Anzahl aller k-Partitionen von M wird mit $S_{n,k} \in \mathbb{N}_0$ bezeichnet. Zusätzlich definieren wir: $S_{0,0} = 1$, und für $k, n \in \mathbb{N}$: $S_{n,0} = 0 = S_{0,k}$.

Die so definierten Zahlen $S_{n,k}$ $(n, k \in \mathbb{N}_0)$ heißen die *Stirlingzahlen 2. Art* (oder *Partitions-Stirlingzahlen*).

Satz (8)

a) *Für* $1 \leq k \leq n$ *gilt:*

i) $S_{n,k} = S_{n-1,k-1} + k \cdot S_{n-1,k}$

ii) $$S_{n,k} = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \, \frac{(k-i)^n}{i! \cdot (k-i)!}$$

b) *Es seien* A *und* B *endliche Mengen mit* $|A| = n$ *und* $|B| = k$.
Dann gibt es $k! \cdot S_{n,k}$ *verschiedene surjektive Funktionen* $f : A \to B$.

Zahlpartitionen: $k, n \in \mathbb{N}_0$
Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Zahl n als Summe

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$$

von k positiven ganzen Zahlen $1 \leq n_i \in \mathbb{N}$ zu schreiben – mit bzw. ohne Berücksichtigung der Reihenfolge der Summanden?

Definition (4)

Für $k, n \in \mathbb{N}_0$ definieren wir

$$\mathrm{gZP}(n,k) = \left\{ (n_1, n_2, \ldots, n_k) \in \mathbb{N}^k \;\middle|\; \sum_{i=1}^{k} n_i = n \right\} \quad \text{und}$$

$$\mathrm{ugZP}(n,k) = \left\{ (n_1, n_2, \ldots, n_k) \in \mathrm{gZP}(n,k) \;\middle|\; n_1 \leq n_2 \leq \cdots \leq n_k \right\}.$$

$\mathrm{gZP}(n,k)$ (bzw. $\mathrm{ugZP}(n,k)$) heißt die Menge der *geordneten* (bzw. *ungeordneten*) *k-Partitionen der Zahl n*.

Weiters setzen wir $P_{n,k} = \#\big(\mathrm{ugZP}(n,k)\big) \in \mathbb{N}_0$.

Satz (9)

a) Für $k \geq 0$ *und* $n \geq 1$ *gilt:* $\#(gZP(n,k)) = \binom{n-1}{k-1}$.

b) Es gilt:

i) $P_{0,0} = 1$, *und für* $k, n > 0$: $P_{n,0} = 0 = P_{0,k}$.

ii) Für $k > n$ *ist* $P_{n,k} = 0$

iii) Für $1 \leq n$ *ist* $P_{n,1} = 1 = P_{n,n}$.

iv) Für $k, n \geq 0$ *gilt:* $P_{n+k,k} = \sum_{i=0}^{k-1} P_{n,k-i}$.