DISKRETE MATHEMATIK

Kapitel 1:
Grundlagen der Mathematik

MAT.106UB Vorlesung im WS 2018/19

Günter LETTL

Institut für Mathematik und wissenschaftliches Rechnen
an der Karl-Franzens-Universität Graz

1.1 (Aussagen- und Prädikaten-)Logik
[I-L] 1.2-1.3, [S-S] 3.2

Eine (mathematische oder logische) *Aussage* ist entweder wahr oder falsch.

Eine (mathematische oder logische) *Aussageform* (oder *Prädikat*) enthält eine (oder mehrere) freie Variablen (= Unbestimmte).

Durch Ersetzen der Variablen durch konkrete Objekte („Werte”) aus einer Grundgesamtheit (oft: Menge) entsteht aus einer Aussageform eine Aussage, die dann entweder wahr oder falsch ist.

Operationen mit Aussagen (= logische Verknüpfungen):

Aus (ein oder zwei) Aussagen wird eine neue Aussage gebildet.

Für das Folgende seien p und q (beliebige) Aussagen.

Negation $\neg$:

$\neg p$ („*nicht* p", „*non* p") ist die Aussage, die genau dann wahr ist, wenn p falsch ist.

Konjunktion $\wedge$:

Die Aussage $p \wedge q$ („p *und* q") ist genau dann wahr, wenn sowohl p als auch q wahr sind.

Disjunktion $\vee$:

Die Aussage $p \vee q$ („p *oder* q") ist genau dann wahr, wenn p wahr ist oder q wahr ist oder beide wahr sind.

Implikation $\Rightarrow$: (auch: Subjunktion)

Die Aussage $p \Rightarrow q$ („*aus p folgt q*", „*p impliziert q*", „*q ist notwendig für p*", „*p ist hinreichend für q*") ist genau dann wahr, wenn p falsch ist oder q wahr ist.

Äquivalenz $\Leftrightarrow$:

Die Aussage $p \Leftrightarrow q$ („*p und q sind (logisch) äquivalent*", „*p gilt genau dann, wenn q gilt*", „*p ist notwendig und hinreichend für q*") ist genau dann wahr, wenn p und q entweder beide wahr oder beide falsch sind.

Satz (1) (Umformungsregeln für logische Verknüpfungen)

Für (beliebige) Aussagen p, q und r gilt:

a) *doppelte Verneinung:* $(\neg(\neg p)) \Leftrightarrow p$

b) *de Morgan'sche Regeln:*

$$(\neg(p \wedge q)) \Leftrightarrow ((\neg p) \vee (\neg q))$$
$$(\neg(p \vee q)) \Leftrightarrow ((\neg p) \wedge (\neg q))$$

c) *Distributivgesetze:*

$$(p \wedge (q \vee r)) \Leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$$
$$(p \vee (q \wedge r)) \Leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$$

d) *Kontraposition:* $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow ((\neg q) \Rightarrow (\neg p))$

Satz (2) (Konjunktive und disjunktive Normalform)

Es seien $n \in \mathbb{N}$ *und* $p_1, p_2, \dots, p_n$ *Aussagen.*

Dann lässt sich jede aus $p_1, p_2, \dots, p_n$ *(mit obigen logischen Operationen) gebildete Aussage* x *in der Form*

$$x = d_1 \vee d_2 \vee \cdots \vee d_N$$

mit einem $N \in \mathbb{N}_0$, $N \leq 2^n$, *darstellen, wobei jedes* d_i *von der Form*

$$d_i = e_1^{(i)} \wedge e_2^{(i)} \wedge \cdots \wedge e_n^{(i)} \quad \text{mit } e_j^{(i)} = p_j \text{ oder } e_j^{(i)} = \neg p_j$$

ist. Diese Darstellung heißt die disjunktive Normalform von x.

Analog: *konjunktive Normalform von* x

$x = d_1 \wedge d_2 \wedge \cdots \wedge d_N$ *mit* $d_i = e_1^{(i)} \vee e_2^{(i)} \vee \cdots \vee e_n^{(i)}$

Logische Quantoren: machen aus Aussageformen eine Aussage.

Es sei $A(x)$ eine Aussageform für Objekte x aus einer Grundgesamtheit.

Die Aussage $\boxed{\forall x : A(x)}$ ist genau dann wahr, wenn für jedes Objekt x_0 die Aussage $A(x_0)$ wahr ist.

Die Aussage $\boxed{\exists x : A(x)}$ ist genau dann wahr, wenn es ein Objekt x_0 gibt, für welches die Aussage $A(x_0)$ wahr ist.
(Es darf auch mehrere solche x_0 geben!)

Satz (3)

Es sei $A(x)$ eine beliebige Aussageform. Dann gilt:

a) $\Big(\neg(\forall x : A(x))\Big) \Leftrightarrow \Big(\exists x : (\neg A(x))\Big)$

b) $\Big(\neg(\exists x : A(x))\Big) \Leftrightarrow \Big(\forall x : (\neg A(x))\Big)$

1.2 Naive Mengenlehre

[I-L] 2.1, [L-P-V] 1.2, [M-N] 1.2, [S-S] 4.1, [T] I.1

Definition von „Menge" nach Georg Cantor (1845 – 1918):

„Eine *Menge* ist eine Zusammenfassung bestimmter, wohlunterschiedener Objekte unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen. Von jedem Objekt muss eindeutig feststehen, ob es zu dieser Menge gehört oder nicht. Die zur Menge gehörenden Objekte nennt man die *Elemente* dieser Menge."

Ist M eine Menge und a ein Objekt, so gilt

entweder $a \in M$ („*a ist ein Element von M*", „*a liegt in M*", „*a gehört zu M*")

oder $a \notin M$ („*a ist kein Element von M*", „*a liegt nicht in M*"...).

Angabe von Mengen:

a) durch Aufzählen: die Elemente einer Menge werden zwischen geschweifte Klammern („Mengenklammern") geschrieben.

b) durch Aussonderung (= Beschreibung): ist $A(x)$ eine Aussageform („Eigenschaft") für Objekte x, so wird durch

$$M = \{x \mid A(x)\}$$

die Menge aller Objekte x beschrieben, für welche $A(x)$ wahr ist (die die „Eigenschaft" haben).

Beispiel: Zahlenmengen

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$ Menge der natürlichen Zahlen

$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\}$
Menge der ganzen Zahlen

$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ Menge der nicht negativen ganzen Zahlen

$\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z} \text{ und } b \neq 0\} = \{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z} \wedge b \in \mathbb{N}\}$
Menge der rationalen Zahlen

$\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ Menge der reellen bzw. komplexen Zahlen

Definition (1)

Es seien M und N beliebige Mengen.

a) Relationen (= Beziehungen) zwischen Mengen:

(Es wird festgestellt, ob zwischen M und N eine „bestimmte Beziehung" gilt – oder nicht.)

Die Mengen M und N heißen *gleich* (Schreibweise: $M = N$) genau dann, wenn sie dieselben Elemente enthalten; andernfalls heißen sie *ungleich* (Schreibweise: $M \neq N$).

$$M = N \overset{\text{def}}{\iff} \forall x : (x \in M \Leftrightarrow x \in N)$$

$$M \neq N \overset{\text{def}}{\iff} \neg(M = N)$$

Die Menge M heißt *eine Teilmenge von N* (Schreibweise: $M \subset N$; auch $M \subseteq N$, $M \subseteqq N$) genau dann, wenn jedes Element von M auch ein Element von N ist.

$$M \subset N \overset{\text{def}}{\iff} \forall x \in M : x \in N$$

„Echte Teilmenge": $\quad M \subsetneqq N \overset{\text{def}}{\iff} \Big((M \subset N) \wedge (M \neq N)\Big)$

„Keine Teilmenge": $\quad M \not\subset N \overset{\text{def}}{\iff} \neg(M \subset N)$

Definition (1) (Fortsetzung)

b) Operationen mit Mengen:

(Aus den Mengen M und N wird eine neue Menge – das Ergebnis der Operation – gebildet.)

Durchschnittsmenge: $M \cap N = \{x \mid (x \in M) \wedge (x \in N)\}$

Die Mengen M und N heißen *(zueinander) disjunkt* (oder *elementfremd*), wenn $M \cap N = \{\}$ gilt.

Vereinigungsmenge: $M \cup N = \{x \mid (x \in M) \vee (x \in N)\}$

Differenzmenge: $M \setminus N = \{x \mid (x \in M) \wedge (x \notin N)\}$

Produktmenge (*Kartesisches Produkt*):
$M \times N = \{(a, b) \mid (a \in M) \wedge (b \in N)\}$ ist die Menge aller „geordneten Paare" (a, b), wobei $a \in M$ und $b \in N$ gilt.

Potenzmenge von M: $\mathcal{P}(M) = \{A \mid A \subset M\}$ ist die Menge aller Teilmengen von M.

Satz (4) (Rechenregeln für Mengenoperationen)

Für (beliebige) Mengen A, B und C gelten die folgenden Aussagen:

a) Kommutativgesetze

$$A \cup B = B \cup A \qquad A \cap B = B \cap A$$

b) Assoziativgesetze

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \qquad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

c) Distributivgesetze

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \qquad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

d) De Morgan'sche Regeln

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C) \qquad A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$$

Definition (2)
(Durchschnitt und Vereinigung von beliebig vielen Mengen)

Es sei $\emptyset \neq I$ eine nichtleere (Index-)Menge, und für jedes $i \in I$ sei M_i eine Menge. Dann heißen

$$(M_i)_{i \in I} \quad \text{eine } \textit{Familie von Mengen},$$

die Menge $$\bigcap_{i \in I} M_i = \{x \mid \forall i \in I : x \in M_i\}$$

der *Durchschnitt* der Familie $(M_i)_{i \in I}$, und

die Menge $$\bigcup_{i \in I} M_i = \{x \mid \exists i \in I : x \in M_i\}$$

die *Vereinigung* der Mengenfamilie $(M_i)_{i \in I}$.

Definition (3)

Eine Menge M heißt *endlich*, wenn es ein $n \in \mathbb{N}_0$ gibt, sodass gilt: M hat genau n (verschiedene) Elemente.

Wir schreiben dann $\#M = |M| = n$ und nennen n die *Elementanzahl* (oder *Kardinalität*) von M.

Ist die Menge M nicht endlich, so heißt M *unendlich*, und wir schreiben $\#M = |M| = \infty$.

1.3 Mathematische Beweise

[I-L] 1.2.4, 3.3, [S-S] 2.1, Beispiel 3.3.9

Typischer Aufbau eines mathematischen Satzes (Lemmas, Korollars):

I. Vereinbarung: der verwendeten Begriffe/Objekte/Bezeichnungen
II. Voraussetzung: Aussage(form) p, die für die verwendeten Objekte wahr sein soll
III. Behauptung: Aussage q, deren Wahrheit bewiesen werden soll

I. bzw. **II.** können auch fehlen.

Beweisvorgang:
Wir nehmen an, dass p richtig ist, und versuchen damit, die Richtigkeit der Aussage q herzuleiten.

Logik und Beweismethoden:

p, q und r seien Aussagen.

***) Direkter Beweis:** („Modus ponens") $\big(p \wedge (p \Rightarrow q)\big) \Rightarrow q$

***) Kettenschluss:** $\big((p \Rightarrow r) \wedge (r \Rightarrow q)\big) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$

***) Kontraposition (= Indirekter Beweis):**
$(\neg q \Rightarrow \neg p) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$
Wir nehmen an, dass q falsch ist, und versuchen damit zu zeigen, dass dann p auch falsch ist.

***) Beweis durch Widerspruch:** $\neg(\neg q \wedge p) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$
Wir nehmen an, dass p und $\neg q$ beide wahr sind, und versuchen damit zu zeigen, dass auch q bzw. $\neg p$ wahr ist.

***) Fallunterscheidung:** $\big((r \Rightarrow q) \wedge (\neg r \Rightarrow q)\big) \Rightarrow q$

1.4 Relationen

[I-L] 2.2, [M-N] 1.5-1.6, 2, [S-S] 4.2, [T] I.3

Eine **Relation** beschreibt, ob zwischen Elementen einer Menge M und Elementen einer Menge N eine „Beziehung" besteht oder nicht.

Definition (4)

Es seien M und N nichtleere Mengen.

a) Eine (*binäre*) *Relation zwischen M und N* ist eine Teilmenge $\mathcal{R} \subset M \times N$. Ist $M = N$, so heißt $\mathcal{R}$ eine *Relation auf M*.

Üblicherweise bezeichnet man eine Relation $\mathcal{R} \subset M \times N$ mit einem Symbol $R \in \{\sim, \simeq, =, \subset, |, <, \geq, \equiv, \ldots\}$ und schreibt für $a \in M$, $b \in N$:

$$aRb \Longleftrightarrow (a, b) \in \mathcal{R} \quad (\text{„}a \text{ steht in der Relation } R \text{ zu } b\text{"}) ,$$

$$a\not{R}b \Longleftrightarrow (a, b) \notin \mathcal{R} \quad (\text{„}a \text{ steht nicht in der Relation } R \text{ zu } b\text{"}) .$$

Definition (4) (Fortsetzung)

b) Eine Relation R auf M [d.h. $\mathcal{R} \subset M \times M$] heißt

i) *reflexiv*, wenn $\forall x \in M$: xRx [bzw. $(x,x) \in \mathcal{R}$].

ii) *symmetrisch*, wenn $\forall x, y \in M$: $xRy \Longrightarrow yRx$
[bzw. $(x,y) \in \mathcal{R} \Longrightarrow (y,x) \in \mathcal{R}$].

iii) *antisymmetrisch*, wenn $\forall x, y \in M$: $(xRy \wedge yRx) \Longrightarrow x = y$
[bzw. $((x,y) \in \mathcal{R} \wedge (y,x) \in \mathcal{R}) \Longrightarrow x = y$].

iv) *transitiv*, wenn $\forall x, y, z \in M$: $(xRy \wedge yRz) \Longrightarrow xRz$
[bzw. $((x,y) \in \mathcal{R} \wedge (y,z) \in \mathcal{R}) \Longrightarrow (x,z) \in \mathcal{R}$].

Definition (4) (Fortsetzung)

c) Eine Relation $\sim$ auf M heißt eine *Äquivalenzrelation*, wenn sie reflexiv, symmetrisch und transitiv ist (also **i)**, **ii)**, **iv)** erfüllt).

Ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf M und $x \in M$, so heißt

$$[x]_\sim = \{y \in M \mid x \sim y\}$$

die *Äquivalenzklasse von x bezüglich* $\sim$, und jedes $x' \in [x]_\sim$ heißt ein *Repräsentant* der Äquivalenzklasse $[x]_\sim$.

Die Menge aller Äquivalenzklassen bezüglich $\sim$ wird mit

$$M/_\sim = \{[x]_\sim \mid x \in M\}$$

bezeichnet.

Satz (5)

Es seien $\emptyset \neq M$ eine Menge und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf M.

a) *Für $x, y \in M$ gilt:*

$$[x]_\sim = [y]_\sim \iff [x]_\sim \cap [y]_\sim \neq \emptyset \iff x \sim y \ .$$

b) *Die (verschiedenen) Äquivalenzklassen von M bezüglich $\sim$ bilden eine Partition von M;*
d.h. eine Familie $(T_i)_{i \in I}$ von Teilmengen $T_i \subset M$, sodass $M = \bigcup_{i \in I} T_i$ und $\forall i, j \in I$ mit $i \neq j$: $T_i \cap T_j = \emptyset$
(Schreibweise: $M = \dot{\bigcup}_{i \in I} T_i$).

Definition (5)

Es sei $\emptyset \neq M$ eine nichtleere Menge.

a) Eine Relation $\prec$ auf M heißt eine *Ordnungsrelation* (oder *Halbordnung*, *partielle Ordnung*), wenn sie reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist (also **i)**, **iii)**, **iv)** aus Definition 4.b) erfüllt).

Ist die Ordnungsrelation $\prec$ zusätzlich auch

v) *konnex* (= *linear*), d.h. $\forall x, y \in M$: $(x \prec y) \vee (y \prec x)$,

so heißt $\prec$ eine *Totalordnung* (oder *lineare Ordnung*) auf M.

Ist $\prec$ eine Ordnungsrelation (bzw. eine Totalordnung) auf M, so nennt man $(M, \prec)$ eine *geordnete* (bzw. *totalgeordnete*) *Menge*.

Definition (5) (Fortsetzung)

b) Es sei $(M, \leq)$ eine geordnete Menge. Ein Element $a \in M$ heißt

- •) das *Minimum* (oder das *kleinste Element*) von M, wenn $\forall x \in M$: $a \leq x$.
- •) das *Maximum* (oder das *größte Element*) von M, wenn $\forall x \in M$: $x \leq a$.
- •) ein *minimales Element* von M, wenn $\forall x \in M$: $(x \leq a) \Longrightarrow (x = a)$.
- •) ein *maximales Element* von M, wenn $\forall x \in M$: $(a \leq x) \Longrightarrow (x = a)$.

Definition (5) (Fortsetzung)

c) Es sei $(M, \leq)$ eine geordnete Menge und $A \subset M$ eine Teilmenge.

Ein Element $s \in M$ heißt eine $\left\{\begin{matrix} \textit{untere} \\ \textit{obere} \end{matrix}\right\}$ *Schranke von A*, wenn

$\forall x \in A$ gilt: $\left\{\begin{matrix} s \leq x \\ x \leq s \end{matrix}\right\}$.

Besitzt die Menge der unteren Schranken von A ein Maximum m, so heißt dieses *Infimum* (oder *größte untere Schranke*) *von A*:
$m = \inf A$.

Besitzt die Menge der oberen Schranken von A ein Minimum n, so heißt dieses *Supremum* (oder *kleinste obere Schranke*) *von A*:
$n = \sup A$.

A heißt eine *Kette*, wenn $\forall a, b \in A$ gilt: $(a \leq b) \vee (b \leq a)$
(d.h.: die Einschränkung von $\leq$ auf A ist eine Totalordnung).

$(M, \leq)$ heißt eine *Wohlordnung*, wenn jede nichtleere Teilmenge von M ein Minimum besitzt.

Axiom I: Lemma von Zorn:

Es sei M eine nichtleere, geordnete Menge, und jede Kette $A \subset M$ besitze eine obere Schranke. Dann existiert (mindestens) ein maximales Element in M.

Axiom II: Wohlordnungssatz:

Für jede nichtleere Menge M existiert eine Wohlordnung.

1.5 Funktionen

[I-L] 2.3, [M-N] 1.4, [S-S] 4.3, [T] I.3

Definition (6)

a) Eine *Funktion* (oder *Abbildung*) f ist ein Tripel $f = (A, B, G)$, wobei A und B Mengen sind und G eine Relation zwischen A und B mit folgenden Eigenschaften:

vi) *linksvollständig*: $\forall x \in A : \exists y \in B : (x, y) \in G$

vii) *rechtseindeutig*: $\forall x \in A$:

$$\Big((x, y) \in G \wedge (x, y') \in G\Big) \Rightarrow (y = y').$$

Die Menge A heißt die *Definitionsmenge* der Funktion f,
die Menge B heißt die *Zielmenge* (oder *Wertevorrat*) von f und
die Menge $G \subset A \times B$ heißt der *Graph* von f.

Ist $(x, y) \in G$, so schreibt man auch $y = f(x)$ und nennt y den *Funktionswert* von f an der Stelle x (oder für das *Argument* x).

Schreibweise: $f : A \to B$, $x \mapsto f(x)$.

Definition (6) (Fortsetzung)

b) Zwei Funktionen $f = (A, B, G)$ und $g = (A', B', G')$ heißen *gleich*, wenn $A = A'$ und $B = B'$ und $G = G'$ gelten.

c) Es seien $f = (A, B, G)$ eine Funktion und $A_0 \subset A$, $B_0 \subset B$. Dann heißen

$$f(A_0) = \{y \in B \mid \exists x \in A_0 \text{ mit } (x, y) \in G\} = \{f(x) \mid x \in A_0\}$$

die *Bildmenge* von A_0 unter f,

$f(A)$ die *Bildmenge* (oder *Wertemenge*, $\mathrm{Im}(f)$) von f,

$$f^{-1}(B_0) = \{x \in A \mid \exists y \in B_0 \text{ mit } (x, y) \in G\} = \{x \in A \mid f(x) \in B_0\}$$

die *Urbildmenge von B_0 unter f* und

$$f\Big|_{A_0} = (A_0, B, G_0) \quad \text{mit} \quad G_0 = G \cap (A_0 \times B)$$

die *Einschränkung* der Funktion f auf A_0.

Ist $B_0 = \{b\} \subset B$, so heißt jedes $x \in f^{-1}(\{b\})$ ein *Urbild* von b unter f.

Definition (7)

a) Es seien A, B, C Mengen und $G_1 \subset A \times B$ und $G_2 \subset B \times C$ Relationen. Dann sind

$$G_2 \circ G_1 = \Big\{(x,z) \in A \times C \mid \exists y \in B : \big((x,y) \in G_1 \wedge (y,z) \in G_2\big)\Big\}$$

eine Relation auf $A \times C$ und heißt die *Verkettung* von G_1 mit G_2, und

$$G_1^{-1} = \big\{(y,x) \in B \times A \mid (x,y) \in G_1\big\}$$

eine Relation auf $B \times A$ und heißt die *Umkehrrelation* von G_1.

b) Es seien $f = (A, B, G)$ und $g = (B, C, H)$ Funktionen. Dann ist $g \circ f = (A, C, H \circ G)$ wieder eine Funktion und heißt die *Zusammensetzung* (oder *Hintereinanderausführung*, *Komposition*) der Funktionen f und g.

Falls G^{-1} linksvollständig und rechtseindeutig ist, so heißt $f^{-1} = (B, A, G^{-1})$ die *Umkehrfunktion* von f.

Definition (8)

Eine Funktion $f = (A, B, G)$ heißt

- *injektiv*, wenn $\forall b \in B: \ \#\big(f^{-1}(\{b\})\big) \leq 1$;
  d.h.: jedes $b \in B$ hat höchstens ein Urbild unter f.
- *surjektiv*, wenn $\forall b \in B: \ \#\big(f^{-1}(\{b\})\big) \geq 1$;
  d.h.: jedes $b \in B$ hat mindestens ein Urbild unter f.
- *bijektiv*, wenn $\forall b \in B: \ \#\big(f^{-1}(\{b\})\big) = 1$;
  d.h.: f ist injektiv und surjektiv bzw. jedes $b \in B$ hat genau ein Urbild unter f.

Definition (9)

Es sei $\emptyset \neq I$ eine nichtleere (Index-)Menge.

a) (Familie von Objekten) Eine *Familie* von Objekten $(X_i)_{i\in I}$ ist eine Abbildung $f : I \to \Omega$, sodass $\forall i \in I : f(i) = X_i$.
Hierbei ist Ω eine geeignete Menge, welche alle „benötigten” Objekte X_i (als Elemente) enthält.
Ist insbesondere $I = \mathbb{N}$, so nennt man $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ auch eine *Folge* von Objekten. Schreibweise: $(X_1, X_2, X_3, \dots)$.

b) (Produkte von Mengen) Es sei $(M_i)_{i\in I}$ eine Familie von Mengen. Dann heißt

$$\prod_{i\in I} M_i = \Big\{f : I \to \bigcup_{i\in I} M_i \,\Big|\, \forall i \in I : f(i) = x_i \in M_i\Big\} =$$

$$= \big\{(x_i)_{i\in I} \,\big|\, \forall i \in I : x_i \in M_i\big\}$$

das *kartesische Produkt* (oder die *Produktmenge*) der Mengenfamilie $(M_i)_{i\in I}$.

Axiom III: Auswahlaxiom:

Ist $(M_i)_{i \in I}$ eine Familie von nichtleeren Mengen M_i, so existiert (mindestens) eine Funktion $f : I \to \bigcup_{i \in I} M_i$ mit $f(i) \in M_i, \forall i \in I$ (eine „Auswahlfunktion").

Axiom III bedeutet: Sind alle $M_i \neq \emptyset$, so ist auch $\prod_{i \in I} M_i \neq \emptyset$.

Man kann beweisen: Axiom I $\iff$ Axiom II $\iff$ Axiom III