ANALYSIS 2 für LAK

Kapitel 6: Integralrechnung in mehreren Variablen

MAB.03022UB Vorlesung im SS 2019

Günter LETTL

Institut für Mathematik und wissenschaftliches Rechnen
Karl-Franzens-Universität Graz

6.1 Das n-dimensionale Riemann-Integral

Definition (1)

Es sei $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}^n$ eine (Jordan-)messbare Menge.

a) Eine endliche Menge $\mathcal{Z} = \{M_1, M_2, \dots, M_k\}$ von messbaren Teilmengen $M_i \subset M$ heißt eine *Zerlegung* von M, wenn $\bigcup_{i=1}^k M_i = M$ ist und für alle $1 \leq i < j \leq k$ gilt: $M_i^\circ \cap M_j^\circ = \emptyset$.

$\delta(\mathcal{Z}) := \max\{\operatorname{diam}(M_i) \mid 1 \leq i \leq k\}$ heißt die *Feinheit der Zerlegung* $\mathcal{Z}$ (bezüglich der Norm $\|\cdot\|$),
wobei $\operatorname{diam}(M_i) := \sup\{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| \mid \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in M_i\}$ der *Durchmesser der Menge* M_i (bezüglich $\|\cdot\|$) ist.

Es seien $\mathcal{Z} = \{M_1, M_2, \dots, M_k\}$ und $\mathcal{Z}' = \{N_1, N_2, \dots, N_l\}$ Zerlegungen von M. Dann heißt $\mathcal{Z}'$ eine *Verfeinerung* von $\mathcal{Z}$ (oder: *feiner als* $\mathcal{Z}$; Schreibweise: $\mathcal{Z}' \succ \mathcal{Z}$), wenn für alle $1 \leq j \leq l$ gilt: es gibt ein $i \in \{1, \dots, k\}$ mit $N_j \subset M_i$.

Definition (1) (Fortsetzung)

b) Es seien $f : M \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion und $\mathcal{Z} = \{M_1, M_2, \ldots, M_k\}$ eine Zerlegung von M. Dann heißen

$$\overline{S}(f, \mathcal{Z}) := \sum_{i=1}^{k} \sup\{f(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in M_i\}\, \mathrm{v}_n(M_i)$$

die *Darboux'sche Obersumme* von f bzgl. $\mathcal{Z}$ und

$$\underline{S}(f, \mathcal{Z}) := \sum_{i=1}^{k} \inf\{f(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in M_i\}\, \mathrm{v}_n(M_i)$$

die *Darboux'sche Untersumme* von f bzgl. $\mathcal{Z}$.

Ist $B = \{\boldsymbol{t}_1, \boldsymbol{t}_2, \ldots, \boldsymbol{t}_k\} \subset M$ derart, dass für alle $1 \leq i \leq k$ gilt $\boldsymbol{t}_i \in M_i$, so heißt B eine *Belegung* zur Zerlegung $\mathcal{Z}$, und

$$S(f, \mathcal{Z}, B) := \sum_{i=1}^{k} f(\boldsymbol{t}_i) \cdot \mathrm{v}_n(M_i)$$

heißt die *Riemann-Summe* von f bzgl. $\mathcal{Z}$ zur Belegung B.

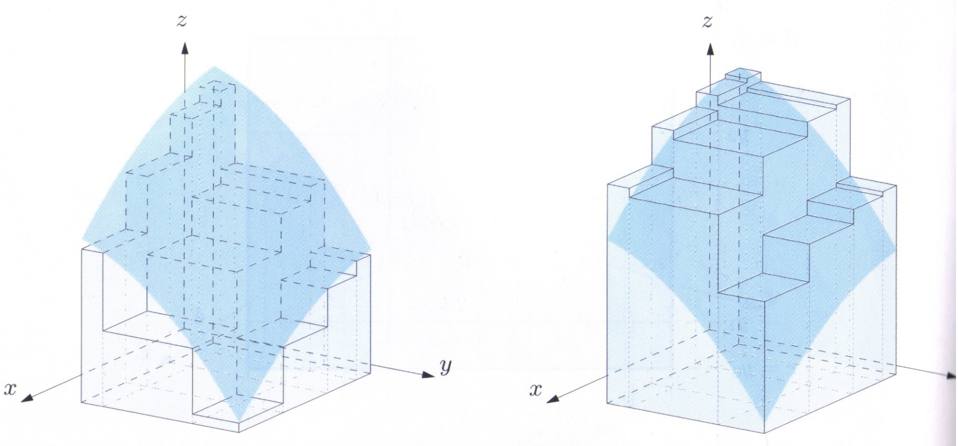


Figure 8.3. Lower (left) and upper sum (right)

Definition (1) (Fortsetzung)

$$\overline{\int_M} f = \overline{\int_M} f(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} := \inf\{\overline{S}(f, \mathcal{Z}) \mid \mathcal{Z} \text{ ist Zerlegung von } M\}$$

heißt das *obere Integral* von f über M, und

$$\underline{\int_M} f = \underline{\int_M} f(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} := \sup\{\underline{S}(f, \mathcal{Z}) \mid \mathcal{Z} \text{ ist Zerlegung von } M\}$$

heißt das *untere Integral* von f über M.

f heißt *(Riemann-)integrierbar* über M, wenn $\overline{\int_M} f = \underline{\int_M} f$, und in diesem Fall heißt

$$\int_M f := \overline{\int_M} f = \underline{\int_M} f$$

das *(Riemann-)Integral* von f über M.

$\mathcal{R}(M)$ bezeichne die Menge aller über M integrierbaren Funktionen.

Satz (1) (Charakterisierung von integrierbaren Funktionen)

Es seien $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}^n$ eine messbare Menge und $f : M \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion.
Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

a) $f \in \mathcal{R}(M)$.

b) *Es existiert eine Folge von Zerlegungen $(\mathcal{Z}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von M mit $\lim_{k\to\infty} \delta(\mathcal{Z}_k) = 0$ und es existiert ein $A \in \mathbb{R}$, sodass für jede beliebige Wahl von Belegungen B_k zu $\mathcal{Z}_k$ gilt:*

$$\lim_{k\to\infty} S(f, \mathcal{Z}_k, B_k) = A\ .$$

c) *Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert eine Zerlegung $\mathcal{Z}$ von M mit*

$$\overline{S}(f, \mathcal{Z}) - \underline{S}(f, \mathcal{Z}) < \varepsilon$$

d) *Für jede messbare Teilmenge $M_0 \subset M$ gilt: $f\big|_{M_0} \in \mathcal{R}(M_0)$.*

Satz (1) (Fortsetzung)

e) *Die Menge*

$$U = \{\boldsymbol{x} \in M \mid f \text{ ist unstetig im Punkt } \boldsymbol{x}\}$$

ist eine „Lebesgue-Nullmenge",
d.h. zu jedem $\varepsilon > 0$ *existiert eine Folge von offenen Quadern* $(Q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *mit*

$$U \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{v}_n(Q_k) < \varepsilon \ .$$

Satz (2) (Rechenregeln für das Integral)

Es sei $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}^n$ *messbar und* $f, g \in \mathcal{R}(M)$*. Dann gilt:*

a) *Sind* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$*, so ist* $\lambda f + \mu g \in \mathcal{R}(M)$ *und es gilt*

$$\int_M (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_M f + \mu \int_M g \ .$$

b) $|f|$, f^2, $fg \in \mathcal{R}(M)$.

Ist $\inf\{|f(\boldsymbol{x})| \mid \boldsymbol{x} \in M\} > 0$*, so ist auch* $\frac{1}{f} \in \mathcal{R}(M)$.

c) *Ist* $f(\boldsymbol{x}) \leq g(\boldsymbol{x})$ *für alle* $\boldsymbol{x} \in M$*, so gilt*

$$\int_M f \leq \int_M g \ .$$

Satz (2) (Fortsetzung)

d) *Sind $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ mit $c_1 \le f \le c_2$, so gilt:*

(i) $c_1 \, \mathrm{v}_n(M) \le \int_M f \le c_2 \, \mathrm{v}_n(M)$.

(ii) *Ist $g \ge 0$, so gilt* $c_1 \int_M g \le \int_M fg \le c_2 \int_M g$.

(iii) $\left| \int_M f \right| \le \int_M |f| \le \sup\{|f(\boldsymbol{x})| \mid \boldsymbol{x} \in M\} \, \mathrm{v}_n(M)$.

e) *Sind $M_1, M_2 \subset M$ messbar mit $M = M_1 \cup M_2$ und $M_1^\circ \cap M_2^\circ = \emptyset$, und ist $h : M \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion, so gilt:*

$$h\big|_{M_i} \in \mathcal{R}(M_i) \ \ (\text{für } i = 1, 2) \iff h \in \mathcal{R}(M) \ .$$

Ist dies der Fall, so gilt: $\int_{M_1} h + \int_{M_2} h = \int_M h$.

Lemma (1)

Es seien $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}^n$ messbar und $N \subset \mathbb{R}^n$ eine J-Nullmenge.

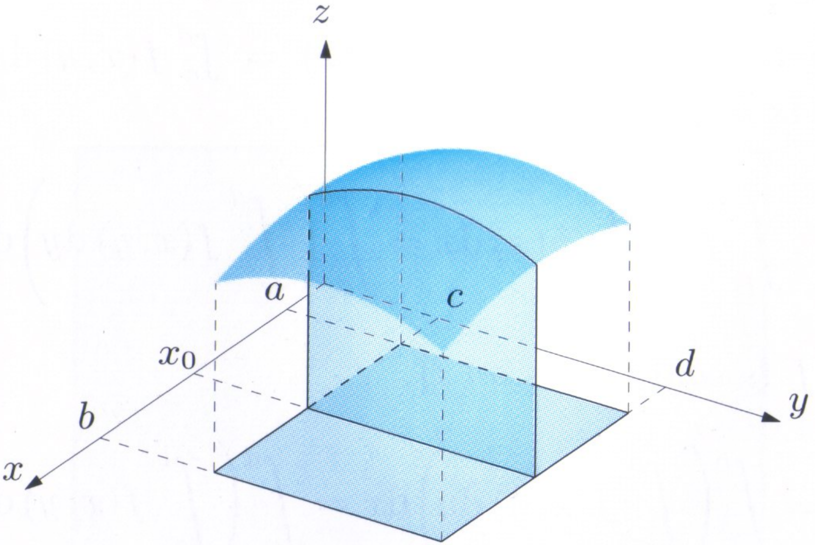
a) *Ist $f\colon N \to \mathbb{R}$ beschränkt, so gilt $f \in \mathcal{R}(N)$ und $\int_N f = 0$.*

b) *Ist $f\colon \overline{M} \to \mathbb{R}$ beschränkt und $f \in \mathcal{R}(M)$, so gilt auch $f \in \mathcal{R}(M^\circ)$, $f \in \mathcal{R}(\overline{M})$ und*

$$\int_M f = \int_{M^\circ} f = \int_{\overline{M}} f \ .$$

c) *Ist $f\colon M \to \mathbb{R}$ beschränkt und stetig auf $M \setminus N$, so ist $f \in \mathcal{R}(M)$.*

6.2 Berechnung von Integralen und Satz von Fubini



Satz (3) (Satz von Fubini)

Es seien $p, q \in \mathbb{N}$ *und* $n = p + q$. *Für* $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p$ *und* $\boldsymbol{y} = (y_1, \dots, y_q) \in \mathbb{R}^q$ *sei* $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q) \in \mathbb{R}^n$. *Weiters sei* $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}^n$ *messbar.*

Für alle $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^p$ *seien die Schnittmengen von* M *bezüglich* $\boldsymbol{x}$,

$$M_{\boldsymbol{x}} = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^q \mid (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in M\} \ ,$$

sowie $\widetilde{M} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^p \mid M_{\boldsymbol{x}} \neq \emptyset\}$ *messbar.*

Ist $f : M \to \mathbb{R}$, $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \mapsto f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, *integrierbar, so gilt*

$$\int_M f = \int_M f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\, d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \int_{\widetilde{M}} \left(\int_{M_{\boldsymbol{x}}} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{y} \right) d\boldsymbol{x} \ ,$$

soferne alle auftretenden Integrale (im Riemann'schen Sinn) existieren.

Lemma (2)

Es seien $M, N \subset \mathbb{R}^n$ messbare Mengen, und für jedes $y \in \mathbb{R}$ seien die $(n-1)$-dimensionalen Schnittmengen

$$M_y = \{(x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} \mid (x_1, \dots, x_{n-1}, y) \in M\} \quad \textit{und}$$

$$N_y = \{(x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} \mid (x_1, \dots, x_{n-1}, y) \in N\} \quad \textit{messbar.}$$

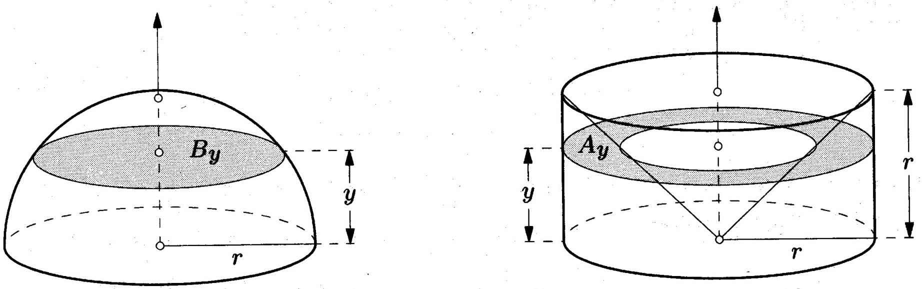
a) *Sind $a, b \in \mathbb{R}$ mit $\widetilde{M} = \{y \in \mathbb{R} \mid M_y \neq \emptyset\} \subset [a, b]$, so gilt*

$$\mathrm{v}_n(M) = \int_a^b \mathrm{v}_{n-1}(M_y) dy \ .$$

b) (Prinzip von Cavalieri)
Gilt für alle $y \in \mathbb{R}$, dass $\mathrm{v}_{n-1}(M_y) = \mathrm{v}_{n-1}(N_y)$, so folgt

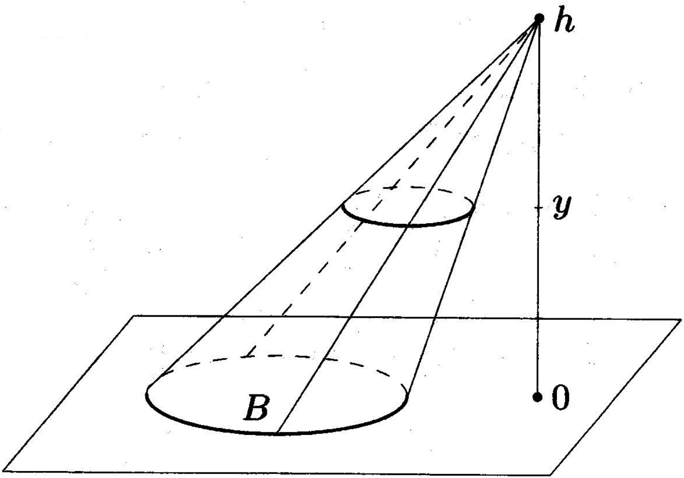
$$\mathrm{v}_n(M) = \mathrm{v}_n(N) \ .$$

Beispiel 5: Kugelvolumen nach Archimedes



Die Kreisscheibe B_y hat denselben Flächeinhalt wie der Kreisring A_y

Beispiel 6: Volumen eines n-dimensionalen Kegels



$$M = \{(\boldsymbol{x}, y) \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq y \leq h \text{ und } \boldsymbol{x} \in (1 - \tfrac{y}{h})B\}$$

Ausblick: Substitutionsregel

Es seien $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}^n$ messbar, $\varphi\colon D^\circ \to \mathbb{R}^n$ eine injektive C^1-Funktion und $\varphi(D) = M \subset \mathbb{R}^n$ messbar (... und φ verhalte sich „gutartig" auf $D \setminus D^\circ$.)

Ist $f\colon M \to \mathbb{R}$ integrierbar so gilt:

$$\int_M f(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = \int_D f(\varphi(\boldsymbol{u})) \cdot \left|\det J\varphi(\boldsymbol{u})\right| d\boldsymbol{u} \; .$$