ANALYSIS 2 für LAK

Kapitel 5:
Differentialrechnung in mehreren Variablen

MAB.03022UB Vorlesung im SS 2019

Günter LETTL

Institut für Mathematik und wissenschaftliches Rechnen
Karl-Franzens-Universität Graz

5.1 Richtungsableitungen und partielle Ableitungen

Definition (1)

a) Eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt *(reelle) Polynomfunktion (in n Variablen)*, wenn es ein $N \in \mathbb{N}_0$ und reelle Zahlen $a_{i_1,i_2,\ldots,i_n} \in \mathbb{R}$ (wobei $0 \le i_1,\ldots,i_n \le N$) gibt, sodass für alle $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$f(\boldsymbol{x}) = \sum_{0 \le i_1,\ldots,i_n \le N} a_{i_1,\ldots,i_n} \cdot x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_n^{i_n} \ .$$

Ist $f \neq 0$, so heißt

$$\max\{i_1 + i_2 + \cdots + i_n \mid a_{i_1,\ldots,i_n} \neq 0, 0 \le i_1,\ldots,i_n \le N\}$$

der *(Gesamt-)Grad* der Polynomfunktion f.

Definition (1) (Fortsetzung)

b) Eine Funktion $h : D \to \mathbb{R}$ (mit $D \subset \mathbb{R}^n$) heißt eine *rationale Funktion* (in n Variablen), wenn es Polynomfunktionen $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gibt, sodass gilt:

$$D = \mathbb{R}^n \setminus \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid g(\boldsymbol{x}) = 0\} \quad \text{und} \quad \forall \boldsymbol{x} \in D\colon h(\boldsymbol{x}) = \frac{f(\boldsymbol{x})}{g(\boldsymbol{x})} .$$

Jede Polynomfunktion ist auf ganz $\mathbb{R}^n$ stetig.

Jede rationale Funktion ist auf ihrem Definitionsbereich stetig.

Definition (2)

Es sei $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f\colon D \to \mathbb{R}$ und $\boldsymbol{a} \in D$.

a) Es sei $0 \neq \boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^n$. Existiert

$$\partial_{\boldsymbol{h}} f(\boldsymbol{a}) := \lim_{t \to 0} \frac{f(\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{a})}{t} \in \mathbb{R},$$

so heißt *f im Punkt $\boldsymbol{a}$ differenzierbar in Richtung $\boldsymbol{h}$*, und $\partial_{\boldsymbol{h}} f(\boldsymbol{a})$ heißt die *Richtungsableitung von f in $\boldsymbol{a}$ in Richtung $\boldsymbol{h}$.*

f heißt *auf D in Richtung $\boldsymbol{h}$ differenzierbar*, wenn f in jedem Punkt $\boldsymbol{a} \in D$ in Richtung $\boldsymbol{h}$ differenzierbar ist. In diesem Fall heißt

$$\partial_{\boldsymbol{h}} f\colon \; D \to \mathbb{R}$$
$$\boldsymbol{a} \mapsto \partial_{\boldsymbol{h}} f(\boldsymbol{a})$$

die *Richtungsableitung von f in Richtung $\boldsymbol{h}$*.

Definition (2) (Fortsetzung)

b) Es sei $1 \le i \le n$ und $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{e}_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ der i-te kanonische Basisvektor des $\mathbb{R}^n$.
f heißt *im Punkt* $\boldsymbol{a}$ *partiell nach* x_i (bzw. *nach der* i*-ten Koordinate*) *differenzierbar*, wenn f in $\boldsymbol{a}$ in Richtung $\boldsymbol{e}_i$ differenzierbar ist. Ist dies der Fall, so schreibt man

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{a}) := \partial_{\boldsymbol{e}_i} f(\boldsymbol{a}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + t, a_{i+1}, \dots, a_n) - f(\boldsymbol{a})}{t} .$$

$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{a})$ heißt die *i-te partielle Ableitung von f im Punkt* $\boldsymbol{a}$ und

$$\operatorname{grad} f(\boldsymbol{a}) = \nabla f(\boldsymbol{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{a}) \right) \in \mathbb{R}^n$$

heißt die *Gradient von f im Punkt* $\boldsymbol{a}$ oder „Nabla $f(\boldsymbol{a})$“.

Definition (2) (Fortsetzung)

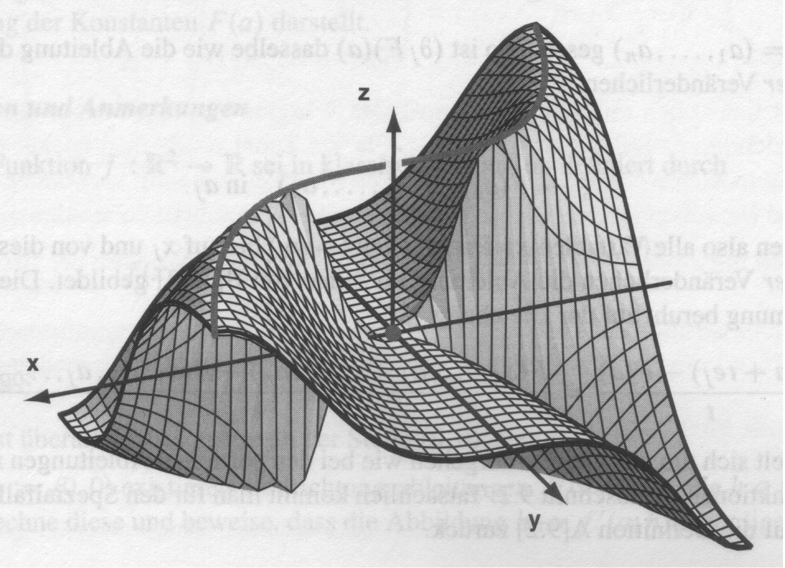
f heißt *auf D partiell nach x_i differenzierbar*, wenn f in jedem Punkt $\boldsymbol{a} \in D$ partiell nach x_i differenzierbar ist. In diesem Fall heißt

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} : \; D \to \mathbb{R}$$

$$\boldsymbol{a} \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{a})$$

die *i-te partielle Ableitung von f*.

Beispiel 2: $\quad g(x,y) = \dfrac{2x^3y}{x^6+y^2}$



5.2 Lineare Approximierbarkeit und Differenzierbarkeit

Definition (3)

Eine Funktion $l : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt eine *lineare Funktion* (= *lineare Abbildung*), wenn es $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ gibt, sodass für alle $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$l(\boldsymbol{x}) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n = \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{x} \ .$$

$L_n = \{l : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \mid l \text{ ist lineare Abbildung}\}$ bezeichne die Menge aller linearen Abbildungen von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}$ (für ein festes $n \in \mathbb{N}$).

Satz (1)

Es sei $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$ und $x_0 \in D \cap D'$ ein Häufungspunkt von D. Die Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ ist genau dann im Punkt x_0 differenzierbar, wenn es eine lineare Abbildung $l\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gibt, sodass

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - l(h)}{h} = 0$$

gilt.

5.2 Lineare Approximierbarkeit und Differenzierbarkeit

Definition (3)

Eine Funktion $l : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt eine *lineare Funktion* (= *lineare Abbildung*), wenn es $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ gibt, sodass für alle $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$l(\boldsymbol{x}) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n = \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{x} \ .$$

$L_n = \{l : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \mid l \text{ ist lineare Abbildung}\}$ bezeichne die Menge aller linearen Abbildungen von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}$ (für ein festes $n \in \mathbb{N}$).

Satz (1)

Es sei $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$ und $x_0 \in D \cap D'$ ein Häufungspunkt von D. Die Funktion $f \colon D \to \mathbb{R}$ ist genau dann im Punkt x_0 differenzierbar, wenn es eine lineare Abbildung $l \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gibt, sodass

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - l(h)}{h} = 0$$

gilt.

Definition (4)

Es seien $n \in \mathbb{N}$, $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

a) f heißt *im Punkt $\boldsymbol{a} \in D$ differenzierbar*, wenn es eine lineare Abbildung $l : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gibt, sodass

$$\lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}} \frac{1}{\|\boldsymbol{h}\|}\Big(f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{a}) - l(\boldsymbol{h})\Big) = 0$$

gilt.

b) Ist f in $\boldsymbol{a}$ differenzierbar, so heißt $df(\boldsymbol{a}) := l \in L_n$ das (*totale*) *Differential von f im Punkt $\boldsymbol{a}$*.

c) f heißt *differenzierbar (auf D)*, wenn f in jedem Punkt $\boldsymbol{a} \in D$ differenzierbar ist. In diesem Fall heißt die Abbildung

$$df\colon D \to L_n$$
$$\boldsymbol{a} \mapsto df(\boldsymbol{a})$$

das *Differential* von f.

Satz (2)

Es sei $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}^n$ *offen, und* $f\colon D \to \mathbb{R}$ *sei differenzierbar im Punkt* $\boldsymbol{a} \in D$. *Dann gilt:*

a) *Die lineare Abbildung* l *in Definition 4.a) ist eindeutig bestimmt.*

b) f *ist stetig im Punkt* $\boldsymbol{a}$.

c) *Für jedes* $0 \neq \boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^n$ *existiert die Richtungsableitung von* f *in* $\boldsymbol{a}$ *in Richtung* $\boldsymbol{h}$, *und es gilt*

$$\partial_{\boldsymbol{h}} f(\boldsymbol{a}) = df(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{h}) = \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{a}) = \operatorname{grad} f(\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{h} \in \mathbb{R}\ .$$

Definition (5)

Es seien $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f\colon D \to \mathbb{R}$.

a) Ist f differenzierbar im Punkt $\boldsymbol{a}$ und $df(\boldsymbol{a}) \neq 0$ (Nullabbildung!), so heißt

$$T = \{(\boldsymbol{x}, f(\boldsymbol{a}) + df(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})) \mid \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n\}$$

die *Tangentialhyperebene* an Graph(f) *im Punkt* $(\boldsymbol{a}, f(\boldsymbol{a}))$.

b) f heißt eine *C^1-Funktion auf D* (oder: *stetig differenzierbar auf D*), wenn f auf ganz D differenzierbar ist und das Differential

$$\begin{aligned} df\colon D &\to L_n \\ \boldsymbol{a} &\mapsto df(\boldsymbol{a}) \end{aligned}$$

eine stetige Abbildung ist.

Satz (3)

Es seien $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}^n$ *offen und* $f\colon D \to \mathbb{R}$.

f *ist genau dann eine* C^1*-Funktion auf* D, *wenn für alle* $1 \leq i \leq n$ *die partiellen Ableitungen*

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_i}\colon\ D &\to \mathbb{R} \\ \boldsymbol{a} &\mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{a}) \end{aligned}$$

auf D *existieren und stetig sind.*

Satz (4)

Es seien $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}^n$ *offen,* $\lambda \in \mathbb{R}$ *und* $f, g \colon D \to \mathbb{R}$ *seien differenzierbar im Punkt* $\boldsymbol{a} \in D$*. Dann gilt:*

a) λf, $f \pm g$ *und* fg *sind im Punkt* $\boldsymbol{a}$ *differenzierbar, und es gilt:*

$$\operatorname{grad}(\lambda f)(\boldsymbol{a}) = \lambda \operatorname{grad} f(\boldsymbol{a})$$

$$\operatorname{grad}(f \pm g)(\boldsymbol{a}) = \operatorname{grad} f(\boldsymbol{a}) \pm \operatorname{grad} g(\boldsymbol{a})$$

Produktregel: $\operatorname{grad}(fg)(\boldsymbol{a}) = g(\boldsymbol{a}) \operatorname{grad} f(\boldsymbol{a}) + f(\boldsymbol{a}) \operatorname{grad} g(\boldsymbol{a})$

b) (Quotientenregel) *Ist* $g(\boldsymbol{x}) \neq 0$ *für alle* $\boldsymbol{x} \in D$*, so ist* $\frac{f}{g} \colon D \to \mathbb{R}$ *im Punkt* $\boldsymbol{a}$ *differenzierbar und es gilt:*

$$\operatorname{grad}\left(\frac{f}{g}\right)(\boldsymbol{a}) = \frac{1}{g(\boldsymbol{a})^2}\big(g(\boldsymbol{a}) \operatorname{grad}(f)(\boldsymbol{a}) - f(\boldsymbol{a}) \operatorname{grad}(g)(\boldsymbol{a})\big).$$

5.3 Höhere partielle Ableitungen

Definition (6)

Es sei $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f\colon D \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ und $i_1, i_2, \ldots, i_k \in$ $\in \{1, \ldots, n\}$. Existieren Funktionen $f_0 := f, f_1, f_2, \ldots, f_k\colon D \to \mathbb{R}$ derart, dass für alle $1 \leq j \leq k$ gilt:

$$f_{j-1} \text{ ist auf } D \text{ partiell nach } x_{i_j} \text{ differenzierbar und } f_j = \frac{\partial}{\partial x_{i_j}} f_{j-1},$$

so heißt *f (auf D) k-mal partiell nach $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}$ differenzierbar* und f_k heißt die *partielle Ableitung (k-ter Ordnung) von f nach $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$*. Schreibweise:

$$f_k = \frac{\partial}{\partial x_{i_k}}\Big(\frac{\partial}{\partial x_{i_{k-1}}} \ldots \Big(\frac{\partial}{\partial x_{i_2}}\Big(\frac{\partial}{\partial x_{i_1}} f\Big)\Big) \ldots\Big) =$$

$$= \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_k}} = f_{x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k}} \; .$$

f heißt eine *C^k-Funktion (auf D)*, wenn für alle $(i_1, \ldots, i_k) \in$ $\in \{1, \ldots, n\}^k$ die partiellen Ableitungen $f_{x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k}}$ existieren und stetig sind.

Satz (5) (Satz von Schwarz)

Es seien $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}^2$ *offen,* $f\colon D \to \mathbb{R}$ *und* $\boldsymbol{a} \in D$.
Existieren die partiellen Ableitungen $f_x, f_y, f_{xy}\colon D \to \mathbb{R}$ *und ist* f_{xy} *stetig im Punkt* $\boldsymbol{a}$*, so ist* f_y *in* $\boldsymbol{a}$ *partiell nach* x *differenzierbar, und es gilt:*

$$\frac{\partial}{\partial x} f_y(\boldsymbol{a}) = f_{xy}(\boldsymbol{a}).$$

Insbesondere gilt: ist f_{xy} *stetig auf* D*, so existiert auch* $f_{yx}\colon D \to \mathbb{R}$ *und es gilt* $f_{yx} = f_{xy}$.

Korollar (1)

Es seien $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}^n$ *offen,* $k \in \mathbb{N}$ *und* $f\colon D \to \mathbb{R}$ *eine* C^k*-Funktion auf* D*. Dann gilt für jede Permutation (= bijektive Abbildung)* $\sigma\colon \{1, \dots, k\} \to \{1, \dots, k\}$ *und für alle* $1 \leq i_1, i_2, \dots, i_k \leq n$:

$$f_{x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k}} = f_{x_{i_{\sigma(1)}} x_{i_{\sigma(2)}} \dots x_{i_{\sigma(k)}}}$$

(d. h.: die partielle Ableitung ändert sich nicht, wenn die Reihenfolge der Variablen, nach denen differenziert wird, verändert wird.)

Satz (5) (Satz von Schwarz)

Es seien $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}^2$ *offen,* $f\colon D \to \mathbb{R}$ *und* $\boldsymbol{a} \in D$.
Existieren die partiellen Ableitungen $f_x, f_y, f_{xy}\colon D \to \mathbb{R}$ *und ist* f_{xy} *stetig im Punkt* $\boldsymbol{a}$, *so ist* f_y *in* $\boldsymbol{a}$ *partiell nach* x *differenzierbar, und es gilt:*

$$\frac{\partial}{\partial x} f_y(\boldsymbol{a}) = f_{xy}(\boldsymbol{a}).$$

Insbesondere gilt: ist f_{xy} *stetig auf* D, *so existiert auch* $f_{yx}\colon D \to \mathbb{R}$ *und es gilt* $f_{yx} = f_{xy}$.

Korollar (1)

Es seien $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}^n$ *offen,* $k \in \mathbb{N}$ *und* $f\colon D \to \mathbb{R}$ *eine* C^k*-Funktion auf* D. *Dann gilt für jede Permutation (= bijektive Abbildung)* $\sigma\colon \{1,\ldots,k\} \to \{1,\ldots,k\}$ *und für alle* $1 \leq i_1, i_2, \ldots, i_k \leq n$:

$$f_{x_{i_1} x_{i_2} \ldots\, x_{i_k}} = f_{x_{i_{\sigma(1)}} x_{i_{\sigma(2)}} \ldots\, x_{i_{\sigma(k)}}}$$

(d. h.: die partielle Ableitung ändert sich nicht, wenn die Reihenfolge der Variablen, nach denen differenziert wird, verändert wird.)

5.4 Quadratische Formen und relative Extremstellen

- **Quadratische Formen** [„Vorgriff" auf die Lineare Algebra]

Eine Matrix $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ heißt *symmetrisch*, wenn für alle $1 \leq i, j \leq n$ gilt: $a_{ji} = a_{ij}$.

Ist $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ symmetrisch, so heißt die Polynomfunktion

$$\begin{aligned} q_A \colon \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ \boldsymbol{x} &\mapsto \boldsymbol{x}^{tr} A \boldsymbol{x} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \end{aligned}$$

die *durch A definierte quadratische Form*.

A bzw. q_A heißt

$$\left\{\begin{matrix} \textit{positiv definit} \\ \textit{negativ definit} \\ \textit{indefinit} \end{matrix}\right\}, \text{ wenn } \begin{cases} \text{für alle } \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\boldsymbol{0}\} \colon q_A(\boldsymbol{x}) > 0 \\ \text{für alle } \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\boldsymbol{0}\} \colon q_A(\boldsymbol{x}) < 0 \\ \text{es } \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n \text{ gibt mit } q_A(\boldsymbol{x}) < 0 < q_A(\boldsymbol{y}) \end{cases}$$

5.4 Quadratische Formen und relative Extremstellen

- **Quadratische Formen** [„Vorgriff" auf die Lineare Algebra]

Eine Matrix $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n} \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ heißt *symmetrisch*, wenn für alle $1 \le i, j \le n$ gilt: $a_{ji} = a_{ij}$.

Ist $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ symmetrisch, so heißt die Polynomfunktion

$$\begin{aligned} q_A \colon \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ \boldsymbol{x} &\mapsto \boldsymbol{x}^{tr} A \boldsymbol{x} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \end{aligned}$$

die *durch A definierte quadratische Form*.

A bzw. q_A heißt

$$\left\{\begin{matrix} \textit{positiv definit} \\ \textit{negativ definit} \\ \textit{indefinit} \end{matrix}\right\}, \text{ wenn } \begin{cases} \text{für alle } \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\boldsymbol{0}\}\colon q_A(\boldsymbol{x}) > 0 \\ \text{für alle } \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\boldsymbol{0}\}\colon q_A(\boldsymbol{x}) < 0 \\ \text{es } \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n \text{ gibt mit } q_A(\boldsymbol{x}) < 0 < q_A(\boldsymbol{y}) \end{cases}$$

- **Definitheitskriterium**

Für eine symmetrische Matrix $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ gilt:

$$A \text{ ist } \left\{ \begin{array}{c} \textit{positiv definit} \\ \textit{negativ definit} \\ \textit{indefinit} \end{array} \right\} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{alle Eigenwerte von } A \text{ sind positiv} \\ \text{alle Eigenwerte von } A \text{ sind negativ} \\ A \text{ besitzt positive } \textbf{und} \text{ negative Eigenwerte} \end{array} \right\}$$

$$\underset{\text{für } n=2:\ A=\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ b & d \end{smallmatrix}\right)}{\Longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{r} a > 0 \text{ und } ad - b^2 > 0 \\ a < 0 \text{ und } ad - b^2 > 0 \\ ad - b^2 < 0 \end{array} \right\}$$

Definition (7)

Es sei $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f\colon D \to \mathbb{R}$ und $\boldsymbol{a} \in D$.

a) f hat im Punkt $\boldsymbol{a}$ ein *lokales* [bzw. *strenges lokales*] $\left\{\begin{matrix} \textit{Minimum} \\ \textit{Maximum} \end{matrix}\right\}$, wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt, sodass für alle $\boldsymbol{x} \in K_\varepsilon(\boldsymbol{a}) \cap D$ gilt: $\left\{\begin{matrix} f(\boldsymbol{x}) \geq f(\boldsymbol{a}) \\ f(\boldsymbol{x}) \leq f(\boldsymbol{a}) \end{matrix}\right\}$

$\Big[$bzw. für alle $\boldsymbol{x} \in K_\varepsilon(\boldsymbol{a}) \cap D$ mit $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{a}$: $\left\{\begin{matrix} f(\boldsymbol{x}) > f(\boldsymbol{a}) \\ f(\boldsymbol{x}) < f(\boldsymbol{a}) \end{matrix}\right\}\Big]$.

b) Ist f eine C^2-Funktion, so heißt die (symmetrische) Matrix

$$Hf(\boldsymbol{a}) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\boldsymbol{a})\right)_{1 \leq i,j \leq n} \in M_{n,n}(\mathbb{R})$$

die *Hessesche Matrix von f im Punkt $\boldsymbol{a}$*.

Satz (6) (Kriterien für lokale Extremstellen)

Es sei $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}^n$ *offen,* $f\colon D \to \mathbb{R}$ *und* $\boldsymbol{a} \in D$.

a) *Ist* f *in* $\boldsymbol{a}$ *differenzierbar und hat* f *in* $\boldsymbol{a}$ *ein lokales Minimum oder Maximum, so ist* $df(\boldsymbol{a}) = 0$.

b) *Es sei* f *eine* C^2*-Funktion und* $df(\boldsymbol{a}) = 0$. *Dann gilt:*

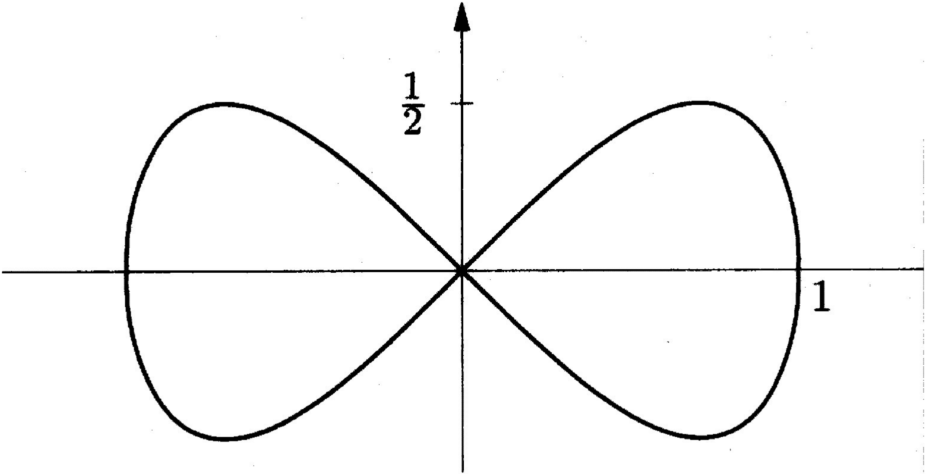
(i) *Ist* $Hf(\boldsymbol{a})$ *positiv definit, so hat* f *in* $\boldsymbol{a}$ *ein strenges lokales Minimum.*

(ii) *Ist* $Hf(\boldsymbol{a})$ *negativ definit, so hat* f *in* $\boldsymbol{a}$ *ein strenges lokales Maximum.*

(iii) *Ist* $Hf(\boldsymbol{a})$ *indefinit, so hat* f *in* $\boldsymbol{a}$ *keine lokale Extremstelle.*

5.5 Implizite Funktionen und implizites Differenzieren

Beispiel 6: $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2(1 - x^2) - y^2 = 0\}$



Satz (7)

Es seien $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ *offen,* $f\colon \begin{array}{l} D \to \mathbb{R} \\ (\boldsymbol{x}, y) \mapsto f(\boldsymbol{x}, y) \end{array}$ *eine* C^1*-Funktion,*

und für $(\boldsymbol{a}, b) \in D$ *sei* $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}, b) = 0$, *wobei* $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ *und* $y, b \in \mathbb{R}$.

Ist $\frac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{a}, b) \neq 0$, *so existieren offene Mengen* $U \subset \mathbb{R}^n$ *und* $I \subset \mathbb{R}$
mit $(\boldsymbol{a}, b) \in U \times I \subset D$ *und*
eine C^1*-Funktion* $g\colon U \to I$, *sodass für alle* $(\boldsymbol{x}, y) \in U \times I$ *gilt:*

$$f(\boldsymbol{x}, y) = 0 \iff y = g(\boldsymbol{x}) \; .$$

Weiters gilt für alle $\boldsymbol{x} \in U$*:*

$$\frac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{x}, g(\boldsymbol{x})) \neq 0 \quad \text{und} \quad \forall 1 \leq i \leq n\colon \; \frac{\partial g}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}, g(\boldsymbol{x}))}{\frac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{x}, g(\boldsymbol{x}))} \; .$$