§5. Differentialrechnung in mehreren Variablen

5.1 Richtungsableitungen und partielle Ableitungen

Definition 1.

a) Eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt *(reelle) Polynomfunktion (in n Variablen)*, wenn es ein $N \in \mathbb{N}_0$ und reelle Zahlen $a_{i_1,i_2,\ldots,i_n} \in \mathbb{R}$ gibt (wobei $0 \le i_1, \ldots, i_n \le N$), sodass für alle $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$f(\boldsymbol{x}) = \sum_{0 \le i_1,\ldots,i_n \le N} a_{i_1,\ldots,i_n} \cdot x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_n^{i_n} \ .$$

Ist $f \neq 0$, so heißt

$$\max \{ i_1 + i_2 + \cdots + i_n \mid a_{i_1,\ldots,i_n} \neq 0, 0 \le i_1, \ldots, i_n \le N \}$$

der *(Gesamt-)Grad* der Polynomfunktion f.

b) Eine Funktion $h : D \to \mathbb{R}$ (mit $D \subset \mathbb{R}^n$) heißt eine *rationale Funktion* (in n Variablen), wenn es Polynomfunktionen $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gibt, sodass gilt:

$$D = \mathbb{R}^n \setminus \{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid g(\boldsymbol{x}) = 0 \} \quad \text{und} \quad \forall \boldsymbol{x} \in D\colon h(\boldsymbol{x}) = \frac{f(\boldsymbol{x})}{g(\boldsymbol{x})} \ .$$

Es gilt: Jede Polynomfunktion ist auf ganz $\mathbb{R}^n$ stetig.
Jede rationale Funktion ist auf ihrem Definitionsbereich stetig.

Beispiel 54: Welche der folgenden Funktionen $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sind Polynomfunktionen? Geben Sie für diese einen passenden Wert für N und alle Koeffizienten $a_{i_1,\ldots,i_n}$ $(0 \le i_1, \ldots, i_n \le N)$ gemäß der Darstellung aus Definition 1.b) *an:*

$n = 2, \quad f(x_1, x_2) = -2x_1^2 + \pi x_1 x_2 - \sqrt{17}$
$n = 2, \quad f(x_1, x_2) = x_2^3 - \sqrt{x_1 x_2}$
$n = 3, \quad f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_2 x_3 - x_2^3 + 2x_1 x_3^3 - 10 x_1 x_2 + 3x_3 + \frac{1}{2}$
$n = 4, \quad f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_2 x_4^3 - x_3^{x_1}$
$n = 5, \quad f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 - (x_2 x_4 - x_1 x_5)^2$

Beispiel 55: Geben Sie möglichst große Definitionsmengen (bzw. offene Definitionsmengen) für die Funktionen aus Beispiel 54 *an und überprüfen Sie diese Funktionen auf Stetigkeit!*

Definition 2.
Es sei $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f\colon D \to \mathbb{R}$ und $\boldsymbol{a} \in D$.

a) Es sei $0 \neq \boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^n$. Existiert

$$\partial_{\boldsymbol{h}} f(\boldsymbol{a}) := \lim_{t \to 0} \frac{f(\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{a})}{t} \in \mathbb{R},$$

so heißt f *im Punkt* $\boldsymbol{a}$ *differenzierbar in Richtung* $\boldsymbol{h}$, und $\partial_{\boldsymbol{h}} f(\boldsymbol{a})$ heißt die *Richtungsableitung von* f *in* $\boldsymbol{a}$ *in Richtung* $\boldsymbol{h}$.
f heißt *auf* D *in Richtung* $\boldsymbol{h}$ *differenzierbar*, wenn f in jedem Punkt $\boldsymbol{a} \in D$ in Richtung $\boldsymbol{h}$ differenzierbar ist. In diesem Fall heißt

$$\begin{aligned} \partial_{\boldsymbol{h}} f\colon\ & D \to \mathbb{R} \\ & \boldsymbol{a} \mapsto \partial_{\boldsymbol{h}} f(\boldsymbol{a}) \end{aligned}$$

die *Richtungsableitung von* f *in Richtung* $\boldsymbol{h}$.

b) Es sei $1 \leq i \leq n$ und $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{e}_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ der i-te kanonische Basisvektor des $\mathbb{R}^n$.
f heißt *im Punkt* $\boldsymbol{a}$ *partiell nach* x_i (bzw. *nach der* i*-ten Koordinate*) *differenzierbar*, wenn f in $\boldsymbol{a}$ in Richtung $\boldsymbol{e}_i$ differenzierbar ist. Ist dies der Fall, so schreibt man

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{a}) := \partial_{\boldsymbol{e}_i} f(\boldsymbol{a}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i + t, a_{i+1}, \ldots, a_n) - f(\boldsymbol{a})}{t}\,.$$

$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{a})$ heißt die *i-te partielle Ableitung von f im Punkt $\boldsymbol{a}$* und

$$\operatorname{grad} f(\boldsymbol{a}) = \nabla f(\boldsymbol{a}) = \Big(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{a})\Big) \in \mathbb{R}^n$$

heißt die *Gradient* von f im Punkt $\boldsymbol{a}$ oder „Nabla $f(\boldsymbol{a})$“.
f heißt *auf* D *partiell nach* x_i *differenzierbar*, wenn f in jedem Punkt $\boldsymbol{a} \in D$ partiell nach x_i differenzierbar ist. In diesem Fall heißt

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_i}\colon\ & D \to \mathbb{R} \\ & \boldsymbol{a} \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{a}) \end{aligned}$$

die *i-te partielle Ableitung von f*.

Beispiel 56: Es sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x_1, x_2) = x_2^3 - 3x_1x_2 + 5x_1 - 2$. Berechnen Sie für beliebiges $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^2$ die Richtungsableitung $\partial_{\boldsymbol{h}} f(\boldsymbol{a})$ im Punkt $\boldsymbol{a} = (0, 0)$!
Verwenden Sie Definition 2.a) *um zu zeigen, dass für einen beliebigen Punkt $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2)$ und $\boldsymbol{h} = (h_1, h_2)$ gilt:*

$$\partial_{\boldsymbol{h}} f(\boldsymbol{a}) = 3a_2^2 h_2 - 3a_2 h_1 - 3a_1 h_2 + 5h_1.$$

Beispiel 57: Geben Sie für alle Funktionen aus Beispiel 54 *alle partiellen Ableitungen* $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $1 \leq i \leq n$, *an!*

5.2 Lineare Approximierbarkeit und Differenzierbarkeit

Definition 3.
Eine Funktion $l : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt eine *lineare Funktion* (= *lineare Abbildung*), wenn es $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ gibt, sodass für alle $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$l(\boldsymbol{x}) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n = \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{x} \ .$$

$L_n = \{l : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \mid l \text{ ist lineare Abbildung}\}$ bezeichne die Menge aller linearen Abbildungen von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}$ (für ein festes $n \in \mathbb{N}$).

Satz 1.
Es sei $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$ und $x_0 \in D \cap D'$ ein Häufungspunkt von D. Die Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ ist genau dann im Punkt x_0 differenzierbar, wenn es eine lineare Abbildung $l\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gibt, sodass

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - l(h)}{h} = 0$$

gilt.

Beispiel 58: Überlegen Sie sich, dass (mit den Bezeichnungen aus Satz 1*) $y = f(x_0) + l(x - x_0)$ die Gleichung der Tangente im Punkt $(x_0, f(x_0))$ an den Graphen von f ist!*

Definition 4. Es seien $n \in \mathbb{N}$, $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

a) f heißt *im Punkt $\boldsymbol{a} \in D$ differenzierbar*, wenn es eine lineare Abbildung $l : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gibt, sodass

$$\lim_{\boldsymbol{h} \to \boldsymbol{0}} \frac{1}{\|\boldsymbol{h}\|} \Big(f(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{a}) - l(\boldsymbol{h}) \Big) = 0$$

gilt.

b) Ist f in $\boldsymbol{a}$ differenzierbar, so heißt $df(\boldsymbol{a}) := l \in L_n$ das (*totale*) *Differential von f im Punkt $\boldsymbol{a}$*.

c) f heißt *differenzierbar (auf D)*, wenn f in jedem Punkt $\boldsymbol{a} \in D$ differenzierbar ist. In diesem Fall heißt die Abbildung

$$\begin{aligned} df\colon D &\to L_n \\ \boldsymbol{a} &\mapsto df(\boldsymbol{a}) \end{aligned}$$

das *Differential* von f.

Satz 2.
Es sei $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}^n$ offen, und $f\colon D \to \mathbb{R}$ sei differenzierbar im Punkt $\boldsymbol{a} \in D$. Dann gilt:

a) *Die lineare Abbildung l in Definition 4.a) ist eindeutig bestimmt.*

b) *f ist stetig im Punkt $\boldsymbol{a}$.*

c) *Für jedes $0 \neq \boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^n$ existiert die Richtungsableitung von f in $\boldsymbol{a}$ in Richtung $\boldsymbol{h}$, und es gilt*

$$\partial_{\boldsymbol{h}} f(\boldsymbol{a}) = df(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{h}) = \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{a}) = \operatorname{grad} f(\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{h} \in \mathbb{R} \ .$$

Beispiel 59: Geben Sie für die Funktion f aus Beispiel 56 *ihr (vermutetes) Differential mit Hilfe von* Satz 2.c) *an, und beweisen Sie, dass f in jedem Punkt $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^2$ differenzierbar (im Sinne von* Definition 4.a)*) ist.*

Definition 5. Es seien $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f\colon D \to \mathbb{R}$.

a) Ist f differenzierbar im Punkt $\boldsymbol{a} \in D$ und $df(\boldsymbol{a}) \neq 0$ (Nullabbildung!), so heißt

$$T = \left\{ (\boldsymbol{x}, f(\boldsymbol{a}) + df(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})) \;\middle|\; \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \right\}$$

die *Tangentialhyperebene an* Graph(f) *im Punkt* $(\boldsymbol{a}, f(\boldsymbol{a}))$.

b) f heißt eine *C^1-Funktion auf D* (oder: *stetig differenzierbar auf D*), wenn f auf ganz D differenzierbar ist und das Differential

$$\begin{aligned} df\colon D &\to L_n \\ \boldsymbol{a} &\mapsto df(\boldsymbol{a}) \end{aligned}$$

eine stetige Abbildung ist.

Beispiel 60: Geben Sie für die Funktion f aus Beispiel 56 *die Tangentialebene im Punkt* $(1, 2, 3)$ *an! In welcher Form ist diese Ebene dargestellt?*
Fertigen Sie eine dazupassende Zeichnung mit Geogebra an!

Satz 3. *Es seien $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f\colon D \to \mathbb{R}$.*

f ist genau dann eine C^1-Funktion auf D, wenn für alle $1 \leq i \leq n$ die partiellen Ableitungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_i}\colon\ D &\to \mathbb{R} \\ \boldsymbol{a} &\mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{a}) \end{aligned}$$

auf D existieren und stetig sind.

Beispiel 61: Es sei $D = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1x_2 > 0\}$ und $g\colon D \to \mathbb{R}$ gegeben durch $g(x_1, x_2) = x_2^3 - \sqrt{x_1x_2}$.
Geben Sie die partiellen Ableitungen von g an. Warum ist g auf ganz D eine C^1-Funktion? Untersuchen Sie $\lim\limits_{\boldsymbol{a}\to\boldsymbol{c}} \frac{\partial g}{\partial x_1}(\boldsymbol{a})$ für $\boldsymbol{c} = (0,0)$ bzw. $\boldsymbol{c} = (t,0), t \neq 0$ bzw. $\boldsymbol{c} = (0,t), t \neq 0$!

Satz 4.
Es seien $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\lambda \in \mathbb{R}$ und $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ seien differenzierbar im Punkt $\boldsymbol{a} \in D$. Dann gilt:

a) *λf, $f \pm g$ und fg sind im Punkt $\boldsymbol{a}$ differenzierbar, und es gilt:*

$$\operatorname{grad}(\lambda f)(\boldsymbol{a}) = \lambda \operatorname{grad} f(\boldsymbol{a})$$

$$\operatorname{grad}(f \pm g)(\boldsymbol{a}) = \operatorname{grad} f(\boldsymbol{a}) \pm \operatorname{grad} g(\boldsymbol{a})$$

Produktregel: $$\operatorname{grad}(fg)(\boldsymbol{a}) = g(\boldsymbol{a}) \operatorname{grad} f(\boldsymbol{a}) + f(\boldsymbol{a}) \operatorname{grad} g(\boldsymbol{a})$$

b) (Quotientenregel) *Ist $g(\boldsymbol{x}) \neq 0$ für alle $\boldsymbol{x} \in D$, so ist $\frac{f}{g}\colon D \to \mathbb{R}$ im Punkt $\boldsymbol{a}$ differenzierbar und es gilt:*

$$\operatorname{grad}\left(\frac{f}{g}\right)(\boldsymbol{a}) = \frac{1}{g(\boldsymbol{a})^2}\big(g(\boldsymbol{a}) \operatorname{grad}(f)(\boldsymbol{a}) - f(\boldsymbol{a}) \operatorname{grad}(g)(\boldsymbol{a})\big).$$

Beispiel 62: Wählen Sie für ein passendes $D \subset \mathbb{R}^3$ konkrete Funktion $f, g : D \to \mathbb{R}$ in 3 Variablen und überprüfen Sie mit diesen Funktionen die Differnzierbarkeitsregeln aus Satz 4. *Können Sie daraus einfache, allgemeine Beweise für diese Regeln herleiten?*

5.3 Höhere partielle Ableitungen

Definition 6. Es sei $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f\colon D \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ und $i_1, i_2, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}$. Existieren Funktionen $f_0 := f, f_1, f_2, \ldots, f_k\colon D \to \mathbb{R}$ derart, dass für alle $1 \leq j \leq k$ gilt:

$$f_{j-1} \text{ ist auf } D \text{ partiell nach } x_{i_j} \text{ differenzierbar und } f_j = \frac{\partial}{\partial x_{i_j}} f_{j-1},$$

so heißt f *(auf D) k-mal partiell nach $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}$ differenzierbar*, und f_k heißt die *partielle Ableitung (k-ter Ordnung) von f nach $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$*.
Schreibweise:

$$f_k = \underleftarrow{\frac{\partial}{\partial x_{i_k}}\left(\frac{\partial}{\partial x_{i_{k-1}}} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_{i_2}}\left(\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}\right.\right.\right.} f\Big)\Big)\cdots\Big) = \frac{\partial^k f}{\underrightarrow{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_k}}} = f_{\underrightarrow{x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k}}}\ .$$

f heißt eine *C^k-Funktion (auf D)*, wenn für alle $(i_1, \ldots, i_k) \in \{1, \ldots, n\}^k$ die partiellen Ableitungen $f_{x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k}}$ existieren und stetig sind.

Satz 5. (Satz von Schwarz, 2-dimensionale Version)
Es seien $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}^2$ offen, $f\colon D \to \mathbb{R}$ und $\boldsymbol{a} \in D$.
Existieren die partiellen Ableitungen $f_x, f_y, f_{xy}\colon D \to \mathbb{R}$ und ist f_{xy} stetig im Punkt $\boldsymbol{a}$, so ist f_y in $\boldsymbol{a}$ partiell nach x differenzierbar, und es gilt:

$$\frac{\partial}{\partial x} f_y(\boldsymbol{a}) = f_{xy}(\boldsymbol{a}).$$

Insbesondere gilt: ist f_{xy} stetig auf D, so existiert auch $f_{yx}\colon D \to \mathbb{R}$ und es gilt $f_{yx} = f_{xy}$.

Korollar 1. Es seien $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $k \in \mathbb{N}$ und $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine C^k-Funktion auf D. Dann gilt für jede Permutation (= bijektive Abbildung $\sigma\colon \{1,\ldots,k\} \to \{1,\ldots,k\}$) und für alle $1 \leq i_1, i_2, \ldots, i_k \leq n$:

$$f_{x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k}} = f_{x_{i_{\sigma(1)}} x_{i_{\sigma(2)}} \ldots x_{i_{\sigma(k)}}}$$

(d. h.: die partielle Ableitung ändert sich nicht, wenn die Reihenfolge der Variablen, nach denen differenziert wird, verändert wird.)

Beispiel 63: Gegeben sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ durch $f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 x_3 - 3x_2^3 + x_1 x_2 x_3 + 7x_2 - x_1 + 2$.
Berechnen Sie alle partiellen Ableitungen 1., 2. und 3. Ordnung von f!
Für welche $k \in \mathbb{N}$ ist f eine C^k-Funktion?

Beispiel 64: Es sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ eine C^3-Funktion. Wie viele partielle Ableitungen 2. (bzw. 3.) Ordnung müssen berechnet werden, um alle partiellen Ableitungen 2. (bzw. 3.) Ordnung von f zu kennen? Tip: Korollar 1.
Für Spezialisten: Können Sie obige Frage auch für eine C^3-Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ beantworten?

5.4 Quadratische Formen und relative Extremstellen

- **Quadratische Formen** [„Vorgriff" auf die Lineare Algebra]

Es sei $n \in \mathbb{N}$. Eine Matrix $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ heißt *symmetrisch*, wenn für alle $1 \leq i, j \leq n$ gilt: $a_{ji} = a_{ij}$.

Ist $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ symmetrisch, so heißt die Polynomfunktion

$$\begin{aligned} q_A\colon \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ \boldsymbol{x} &\mapsto \boldsymbol{x}^{tr} A \boldsymbol{x} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \end{aligned}$$

die *durch A definierte quadratische Form.*

Beispiel 65: Es sei $A = \begin{pmatrix} 2 & * & 1 \\ -3 & * & * \\ * & 4 & -5 \end{pmatrix} \in M_{3,3}(\mathbb{R})$. Ergänzen Sie die fehlenden Einträge so, dass A eine symmetrische Matrix wird (welche Einträge sind dabei eindeutig bestimmt, welche nicht?) Geben Sie die zu A gehörige quadratische Form q_A an!

$$A \text{ bzw. } q_A \text{ heißt } \left\{\begin{matrix} \textit{positiv definit} \\ \textit{negativ definit} \\ \textit{indefinit} \end{matrix}\right\}, \text{ wenn } \left\{\begin{array}{l} \text{für alle } \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}\colon q_A(\boldsymbol{x}) > 0 \\ \text{für alle } \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}\colon q_A(\boldsymbol{x}) < 0 \\ \text{es } \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n \text{ gibt mit } q_A(\boldsymbol{x}) < 0 < q_A(\boldsymbol{y}) \end{array}\right.$$

• **Definitheitskriterium**

Für eine symmetrische Matrix $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ gilt:

$$A \text{ ist } \left\{\begin{matrix} positiv\ definit \\ negativ\ definit \\ indefinit \end{matrix}\right\} \iff \left\{\begin{matrix} \text{alle Eigenwerte von } A \text{ sind positiv} \\ \text{alle Eigenwerte von } A \text{ sind negativ} \\ A \text{ besitzt positive } \textbf{und} \text{ negative Eigenwerte} \end{matrix}\right\} \iff$$

$$\overset{\text{für } n=2\text{: } A=\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ b & d \end{smallmatrix}\right)}{\iff} \left\{\begin{array}{r} a > 0 \text{ und } ad - b^2 > 0 \\ a < 0 \text{ und } ad - b^2 > 0 \\ ad - b^2 < 0 \end{array}\right\}$$

Beispiel 66: Zeigen Sie, dass die Matrix A aus Beispiel 65 *indefinit ist!*

Definition 7. Es sei $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f\colon D \to \mathbb{R}$ und $\boldsymbol{a} \in D$.

a) f hat im Punkt $\boldsymbol{a}$ ein *lokales* [bzw. *strenges lokales*] $\left\{\begin{matrix} \textit{Minimum} \\ \textit{Maximum} \end{matrix}\right\}$, wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt, sodass für alle $\boldsymbol{x} \in K_\varepsilon(\boldsymbol{a}) \cap D$ gilt: $\left\{\begin{matrix} f(\boldsymbol{x}) \geq f(\boldsymbol{a}) \\ f(\boldsymbol{x}) \leq f(\boldsymbol{a}) \end{matrix}\right\}$

$\Big[$bzw. für alle $\boldsymbol{x} \in K_\varepsilon(\boldsymbol{a}) \cap D$ mit $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{a}$: $\left\{\begin{matrix} f(\boldsymbol{x}) > f(\boldsymbol{a}) \\ f(\boldsymbol{x}) < f(\boldsymbol{a}) \end{matrix}\right\}\Big]$.

b) Ist f eine C^2-Funktion, so heißt die (symmetrische) Matrix

$$Hf(\boldsymbol{a}) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\boldsymbol{a})\right)_{1 \leq i,j \leq n} \in M_{n,n}(\mathbb{R})$$

die *Hesse'sche Matrix von f im Punkt $\boldsymbol{a}$.*

Beispiel 67: Geben Sie für die Funktion f aus Beispiel 63 *und einen beliebigen Punkt $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ die Hesse'sche Matrix $Hf(\boldsymbol{a})$ an!*

Satz 6. (Kriterien für lokale Extremstellen)
Es sei $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}^n$ *offen,* $f\colon D \to \mathbb{R}$ *und* $\boldsymbol{a} \in D$.

a) *Ist* f *in* $\boldsymbol{a}$ *differenzierbar und hat* f *in* $\boldsymbol{a}$ *ein lokales Minimum oder Maximum, so ist* $df(\boldsymbol{a}) = 0$.

b) *Es sei* f *eine* C^2*-Funktion und* $df(\boldsymbol{a}) = 0$. *Dann gilt:*

(i) *Ist* $Hf(\boldsymbol{a})$ *positiv definit, so hat* f *in* $\boldsymbol{a}$ *ein strenges lokales Minimum.*

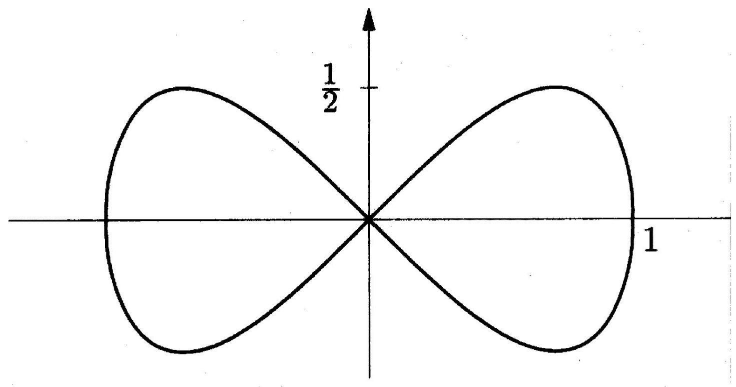
(ii) *Ist* $Hf(\boldsymbol{a})$ *negativ definit, so hat* f *in* $\boldsymbol{a}$ *ein strenges lokales Maximum.*

(iii) *Ist* $Hf(\boldsymbol{a})$ *indefinit, so hat* f *in* $\boldsymbol{a}$ *keine lokale Extremstelle.*

Beispiel 68: Bestimmen Sie für die Funktion f *aus* Beispiel 63 *alle Punkte* $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ *mit* $df(\boldsymbol{a}) = 0$*! Die Gleichung* $f_{x_3}(\boldsymbol{a}) = 0$ *ist der „Schlüssel" zum Lösen des Gleichungssystems!*

5.5 Implizite Funktionen und implizites Differenzieren

Beispiel 6: $L = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2(1-x^2) - y^2 = 0\}$



Satz 7.
Es seien $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ *offen,* $f\colon \begin{array}{l} D \to \mathbb{R} \\ (\boldsymbol{x}, y) \mapsto f(\boldsymbol{x}, y) \end{array}$ *eine* C^1*-Funktion, und für* $(\boldsymbol{a}, b) \in D$ *sei* $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}, b) = 0$*, wobei* $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ *und* $y, b \in \mathbb{R}$.

Ist $\dfrac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{a}, b) \neq 0$*, so existieren offene Mengen* $U \subset \mathbb{R}^n$ *und* $I \subset \mathbb{R}$ *mit* $(\boldsymbol{a}, b) \in U \times I \subset D$ *und eine* C^1*-Funktion* $g\colon U \to I$*, sodass für alle* $(\boldsymbol{x}, y) \in U \times I$ *gilt:*

$$f(\boldsymbol{x}, y) = 0 \iff y = g(\boldsymbol{x}) \ .$$

Weiters gilt für alle $\boldsymbol{x} \in U$*:*

$$\frac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{x}, g(\boldsymbol{x})) \neq 0 \quad \textit{und} \quad \forall 1 \leq i \leq n\colon \ \frac{\partial g}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}) = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}, g(\boldsymbol{x}))}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{x}, g(\boldsymbol{x}))} \ .$$