ANALYSIS 2 für LAK

Kapitel 4: Kurven und Jordan-Inhalt

MAB.03022UB Vorlesung im SS 2019

Günter LETTL

Institut für Mathematik und wissenschaftliches Rechnen
Karl-Franzens-Universität Graz

4.1 Kurven im $\mathbb{R}^n$

Definition (1)

Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $\varphi\colon I \to \mathbb{R}^n$ mit $t \mapsto \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \vdots \\ \varphi_n(t) \end{pmatrix}$

eine **stetige** Abbildung.

a) Dann heißt φ eine *parametrisierte Kurve* (oder: ein *Weg*) im $\mathbb{R}^n$.
Die Bildmenge $\varphi(I) \subset \mathbb{R}^n$ heißt die *durch φ definierte geometrische Kurve* (oder: *die Spur des Weges φ*).

Für $n = 2$ bzw. 3 heißt φ eine *ebene Kurve* bzw. eine *Raumkurve*.

Sind $t_1, t_2 \in I$ mit $t_1 \neq t_2$ und $\varphi(t_1) = \varphi(t_2) = \boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^n$, so heißt $\boldsymbol{p}$ ein *Doppelpunkt* der Kurve φ.

Ist φ injektiv, so heißt φ eine *einfache* (oder: *doppelpunktfreie*) Kurve.

Definition (1) (Fortsetzung)

b) Ist $I = [a, b]$ ein kompaktes Intervall, so heißt φ eine *kompakte Kurve* (oder: *kompakter Weg*) mit *Anfangspunkt* $\varphi(a)$ und *Endpunkt* $\varphi(b)$;
gilt überdies $\varphi(a) = \varphi(b)$, so heißt die Kurve φ *geschlossen*.

Eine kompakte, geschlossene Kurve heißt eine (geschlossene) Jordan-Kurve, wenn $\varphi\big|_{[a,b)}$ injektiv ist.

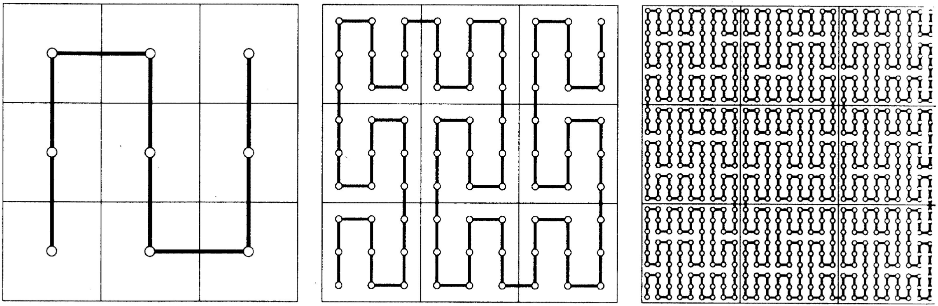


ABB. 2.10. Peanos Kurve

Satz (Jordan'scher Kurvensatz)

Es seien $a < b \in \mathbb{R}$ *und* $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ *eine ebene, geschlossene Jordankurve.*

Dann zerlegt die geometrische Kurve $C = \varphi([a, b])$ *den Raum* $\mathbb{R}^2$ *in zwei Gebiete (= nicht leere, offene, zusammenhängende Mengen)* $G_1, G_2 \subset \mathbb{R}^2$*, von denen genau eines beschränkt ist (dieses heißt dann das Innengebiet von* C*), sodass gilt:*

$$\mathbb{R}^2 = G_1 \,\dot\cup\, C \,\dot\cup\, G_2 \quad \text{und} \quad C = \partial G_1 = \partial G_2 \ .$$

Definition (2)

Es seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $\varphi \colon I \to \mathbb{R}^n$ eine Kurve.

a) φ heißt eine *differenzierbare* (bzw. eine C^k)-*Kurve*, wenn für alle $1 \leq j \leq n$ die j-te Komponentenfunktion $\varphi_j : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar (bzw. eine C^k-Funktion) ist.

b) Es sei φ eine differenzierbare Kurve und $t_0 \in I$. Dann heißt

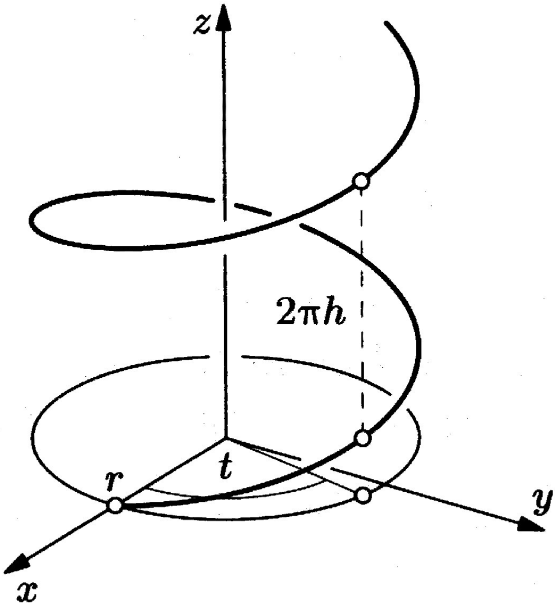
$\varphi'(t_0) = \begin{pmatrix} \varphi_1'(t_0) \\ \vdots \\ \varphi_n'(t_0) \end{pmatrix}$ der *Tangentialvektor* an φ im Punkt $\varphi(t_0)$.

$\varphi(t_0)$ heißt ein *regulärer Punkt* von φ, wenn $\varphi'(t_0) \neq \mathbf{0}$ gilt.
Ist $\varphi(t_0)$ regulär, so heißt

$$T := \{\varphi(t_0) + \lambda \cdot \varphi'(t_0) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

die *Tangente* an die Kurve φ im Punkt $\varphi(t_0)$.

Die Kurve φ heißt *glatt*, wenn φ eine C^1-Kurve ist und für alle $t \in I$ gilt: $\varphi(t)$ ist ein regulärer Punkt.



z
2πh
r
t
y
x

Definition (3)

Es seien $\varphi\colon I = [a,b] \to \mathbb{R}^n$ eine kompakte Kurve und $J = [c,d] \subset \mathbb{R}$.

Eine streng monotone, stetige und bijektive Funktion $t\colon J \to I$ mit $u \mapsto t(u)$ heißt eine *zulässige Parametertransformation* (für φ), und die Kurve

$$\begin{aligned} \psi = \varphi \circ t : J &\to \mathbb{R}^n \\ u &\mapsto \varphi(t(u)) \end{aligned}$$

heißt die *Umparametrisierung von φ mittels t*.

Sind t und t^{-1} C^k-Funktionen (für ein $k \in \mathbb{N}$), so heißt t eine *zulässige C^k-Parametertransformation*.

t heißt $\left\{\begin{matrix} \textit{orientierungstreu} \\ \textit{orientierungsumkehrend} \end{matrix}\right\}$, wenn t streng monoton $\left\{\begin{matrix} \text{wächst} \\ \text{fällt} \end{matrix}\right\}$.

4.2 Die Länge von Kurven

Definition (4)

Es sei $\varphi\colon I = [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine kompakte Kurve und $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$. Für eine endliche Teilmenge $T = \{t_0, t_1, \dots, t_m\} \subset I$ mit $a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$ heißt

$$\ell(\varphi; T) = \sum_{j=1}^{m} \|\varphi(t_j) - \varphi(t_{j-1})\|$$

die *Länge des Streckenzuges* mit den *Eckpunkten* $\varphi(t_0), \varphi(t_1), \dots$ $\dots, \varphi(t_m)$ (*bezüglich der Norm* $\|\cdot\|$).

$$\ell(\varphi) := \sup\{\ell(\varphi; T) \mid T \text{ endlich und } \{a, b\} \subset T \subset I\} \in [0, \infty]$$

heißt die *(Bogen-)Länge* oder *Weglänge von* φ (bzgl. $\|\cdot\|$).

φ heißt *rektifizierbar*, wenn $\ell(\varphi) < \infty$ ist.

Definition (5)

Es sei $\varphi : I = [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine rektifizierbare Kurve. Dann heißt

$$\begin{aligned} \sigma\colon [a, b] &\to [0, \ell(\varphi)] \\ t &\mapsto \sigma(t) = \ell(\varphi\big|_{[a,t]}) \end{aligned}$$

die *Bogenlängenfunktion* von φ.

Existiert $\sigma^{-1}\colon [0, \ell(\varphi)] \to [a, b]$, so heißt $\psi := \varphi \circ \sigma^{-1}$ die *Umparametrisierung der Kurve φ auf die Bogenlänge* als Parameter.

Satz (1)

Es sei $\varphi : I = [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *eine rektifizierbare Kurve und* $\sigma\colon I \to [0, \ell(\varphi)]$ *die Bogenlängenfunktion von* φ. *Dann gilt:*

a) σ *ist monoton wachsend, stetig und surjektiv.*

b) *Ist* φ *auf keinem Teilintervall von* I *konstant, so ist* σ *bijektiv, und* σ *und* σ^{-1} *sind zulässige, orientierungserhaltende Parametertransformationen.*

c) *Ist* φ *eine* C^1*-Funktion, so ist auch* σ *stetig differenzierbar, und für* $t \in [a, b]$ *gilt:* $\sigma'(t) = \|\varphi'(t)\|, \;\; \sigma(t) = \int\limits_a^t \|\varphi'(\tau)\| d\tau,$

und insbesondere: $\ell(\varphi) = \int\limits_a^b \|\varphi'(\tau)\| d\tau.$

4.3 Die Krümmung ebener Kurven

In diesem Unterkapitel sei stets $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$ die Euklidische Norm.

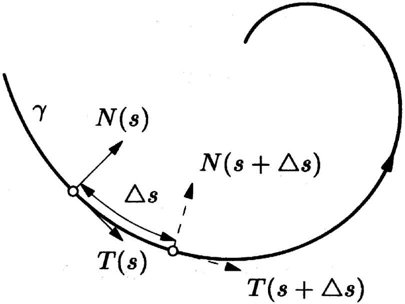
Lemma (1)

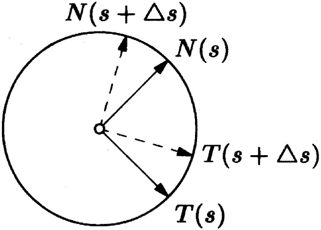
Es sei $\varphi : [0, l] \to \mathbb{R}^n$ eine mit der Bogenlänge parametrisierte C^1-Kurve. Dann gilt:

a) *Für jedes $s \in [0, l]$ ist $\|\varphi'(s)\| = 1$.*

b) *Ist φ zweimal differenzierbar, so gilt für jedes $s \in [0, l]$:*

$$\varphi'(s) \cdot \varphi''(s) = 0 \;, \qquad d.h.\ \varphi''(s) \perp \varphi'(s) \;.$$


γ
N(s)
Δs
N(s + Δs)
T(s)
T(s + Δs)


N(s + Δs)
N(s)
T(s + Δs)
T(s)

Definition (6)

Es seien $\varphi\colon [0, l] \to \mathbb{R}^2$ eine mit der Bogenlänge parametrisierte, ebene C^2-Kurve, $\varphi'(s)^\perp = \begin{pmatrix} -\varphi_2'(t) \\ \varphi_1'(t) \end{pmatrix}$ und $\varphi''(s) = \begin{pmatrix} \varphi_1''(t) \\ \varphi_2''(t) \end{pmatrix}$.

a) Dann heißt $(\varphi'(s), \varphi'(s)^\perp) \in (\mathbb{R}^2)^2$ das *begleitende Zweibein* der Kurve φ.
Die (eindeutig bestimmte) Zahl $k(s) \in \mathbb{R}$ mit

$$\varphi''(s) = k(s)\,\varphi'(s)^\perp$$

heißt die *Krümmung* von φ im Punkt $\varphi(s)$.

Ist $k(s) \neq 0$, so heißen

$\left|\frac{1}{k(s)}\right|$ der *Krümmungsradius*,

$\boldsymbol{n}(s) = \left|\frac{1}{k(s)}\right| \varphi''(s)$ der *Hauptnormalenvektor* und

$\boldsymbol{m}(s) = \varphi(s) + \left|\frac{1}{k(s)}\right| \boldsymbol{n}(s)$ der *Krümmungsmittelpunkt*.

Definition (6) (Fortsetzung)

Der Kreis mit Mittelpunkt $\boldsymbol{m}(s)$ und Radius $\left|\frac{1}{k(s)}\right|$ heißt der *Krümmungskreis* der Kurve φ im Kurvenpunkt $\varphi(s)$.

b) Ist $k(s) \left\{\begin{matrix} \geq 0 \\ \leq 0 \end{matrix}\right\}$, so heißt die Kurve $\left\{\begin{matrix} \textit{linksgekrümmt} \\ \textit{rechtsgekrümmt} \end{matrix}\right\}$ im Punkt $\varphi(s)$.

Satz (2)

a) *Es sei* $\varphi\colon [0,l] \to \mathbb{R}^2$ *eine mit der Bogenlänge parametrisierte, ebene* C^2*-Kurve. Dann gilt:*

$$k(s) = \det(\varphi', \varphi'') = \varphi_1'(s)\varphi_2''(s) - \varphi_1''(s)\varphi_2'(s) \ .$$

b) *Ist* $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ *eine glatte* C^2*-Kurve (mit beliebiger Parametrisierung), so gilt:*

$$k(t) = \frac{\varphi_1'(t)\varphi_2''(t) - \varphi_1''(t)\varphi_2'(t)}{\|\varphi'(t)\|_2^3} \ .$$

Ausblick: Kurvenintegrale

Es sei $\varphi : I = [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine rektifizierbare C^1-Kurve.

Kurvenintegral 1. Art:
φ sei eine doppelpunktfreie Kurve, $\sigma : I \to [0, l]$ ihre Bogenlängenfunktion, $C := \varphi(I) \subset \mathbb{R}^n$ und $f \colon C \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion („Dichtefunktion").

Dann heißt

$$\int_C f \, d\sigma := \int_a^b f(\varphi(t))\, \sigma'(t)\, dt$$

das *Kurvenintegral* (erster Art) von f über die Kurve C.

Der so definierte Wert des Kurvenintegrals $\int_C f \, d\sigma$ ist unabhängig von der Wahl der Parameterdarstellung von C.

Kurvenintegral 2. Art:
Es sei $\boldsymbol{f}\colon C \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion („Vektor-, Kraftfeld").
Dann heißt

$$\int_{\varphi} \boldsymbol{f}\, d\boldsymbol{x} := \int_a^b \boldsymbol{f}(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\, dt = \int_a^b \Big(\sum_{j=1}^{n} f_j(\varphi(t))\, \varphi_j'(t)\Big) dt$$

das *Kurvenintegral* (zweiter Art) von $\boldsymbol{f}$ entlang der Kurve φ.

Der so definierte Wert des Kurvenintegrals $\int_{\varphi} \boldsymbol{f}\, d\boldsymbol{x}$ ist invariant unter orientierungserhaltenden zulässigen C^1-Parametertransformationen, wechselt jedoch sein Vorzeichen bei orientierungsumkehrenden Parametertransformationen.

4.4 Der Jordan'sche Inhalt

Intervalle: Es seien $a, b \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ mit $a \leq b$.
Eine Teilmenge $I \subset \overline{\mathbb{R}}$ heißt Intervall mit Endpunkten a und b, wenn $(a, b) \subset I \subset [a, b]$, und $|I| = b - a \in [0, \infty]$ heißt die Länge des Intervalls I.

Definition (7)

Es sei $n \in \mathbb{N}$.

a) Eine nichtleere Teilmenge $\emptyset \neq Q \subset \mathbb{R}^n$ heißt ein *Quader*, wenn es für $1 \leq j \leq n$ beschränkte Intervalle $I_j \subset \mathbb{R}$ mit Endpunkten $a_j \leq b_j \in \mathbb{R}$ gibt, sodass

$$Q = I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_j \in I_j \ \text{ für alle } 1 \leq j \leq n\}$$

gilt.

$$v(Q) = v_n(Q) = \prod_{j=1}^{n} |I_j| = \prod_{j=1}^{n} (b_j - a_j) \in [0, \infty)$$

heißt dann das *n-dimensionale Volumen* (= *Inhalt*) des Quaders Q.

Q heißt *ausgeartet* $\iff$ $v(Q) = 0$.

4.4 Der Jordan'sche Inhalt

Intervalle: Es seien $a, b \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ mit $a \leq b$.
Eine Teilmenge $I \subset \overline{\mathbb{R}}$ heißt Intervall mit Endpunkten a und b, wenn $(a, b) \subset I \subset [a, b]$, und $|I| = b - a \in [0, \infty]$ heißt die Länge des Intervalls I.

Definition (7)

Es sei $n \in \mathbb{N}$.
a) Eine nichtleere Teilmenge $\emptyset \neq Q \subset \mathbb{R}^n$ heißt ein *Quader*, wenn es für $1 \leq j \leq n$ beschränkte Intervalle $I_j \subset \mathbb{R}$ mit Endpunkten $a_j \leq b_j \in \mathbb{R}$ gibt, sodass

$$Q = I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_n = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid x_j \in I_j \ \text{ für alle } 1 \leq j \leq n\}$$

gilt.

$$\mathrm{v}(Q) = \mathrm{v}_n(Q) = \prod_{j=1}^{n} |I_j| = \prod_{j=1}^{n} (b_j - a_j) \in [0, \infty)$$

heißt dann *das n-dimensionale Volumen (= Inhalt) des Quaders Q*.

Q heißt *ausgeartet* $\iff \mathrm{v}(Q) = 0$.

Definition (7) (Fortsetzung)

b) Eine Teilmenge $F \subset \mathbb{R}^n$ heißt *Figur*, wenn $F = Q_1 \cup \ldots \cup Q_k$ mit abgeschlossenen Quadern $Q_i \subset \mathbb{R}^n$ gilt.

Zwei Figuren $F, F' \subset \mathbb{R}^n$ heißen *nicht überlappend* (= *fremd*), wenn sie keine gemeinsamen inneren Punkte besitzen ($\iff F^\circ \cap (F')^\circ = \emptyset$).

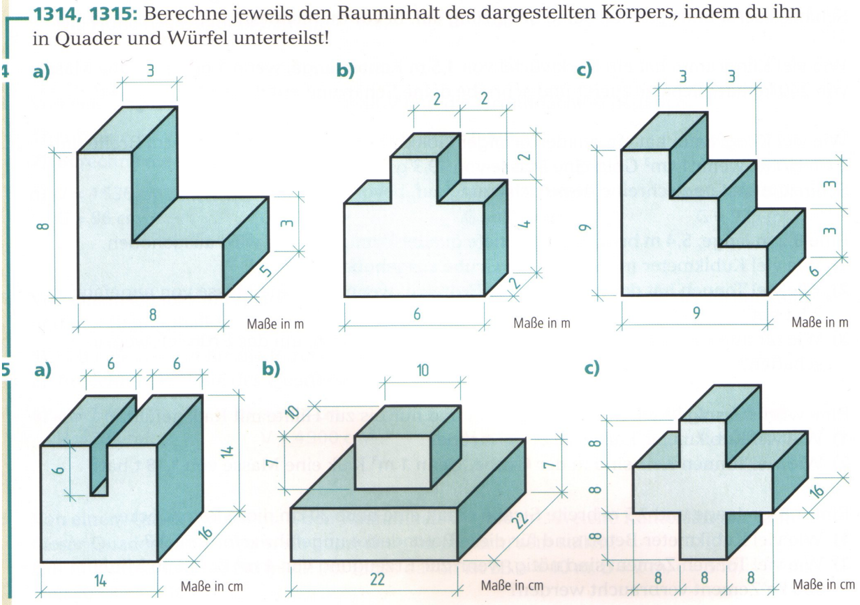
c) Es sei $F = Q_1 \cup \ldots \cup Q_k \subset \mathbb{R}^n$ eine Figur, und die Quader Q_i seien paarweise nicht überlappend. Dann heißt

$$\mathrm{v}(F) = \mathrm{v}_n(F) = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{v}(Q_i) \in [0, \infty)$$

das *n-dimensionale Volumen* (= *Inhalt*) der Figur F.

Zusatz: $\mathrm{v}(\emptyset) = 0$.

Figuren im $\mathbb{R}^3$ aus dem Schulbuch „Das ist Mathematik", 1. Klasse:


1314, 1315: Berechne jeweils den Rauminhalt des dargestellten Körpers, indem du ihn in Quader und Würfel unterteilst!

[Rei1-259]

Lemma (2)

Es seien $F, F' \subset \mathbb{R}^n$ Figuren.

a) *Ist $F = \bigcup_{i=1}^k Q_i$ mit abgeschlossenen Quadern Q_i, so existieren paarweise nicht überlappende, abgeschlossene Quader Q_j' $(1 \le j \le K)$, sodass $F = \bigcup_{j=1}^K Q_j'$ und für alle $1 \le i \le k$, $1 \le j \le K$ gilt:*

$$(Q_j' \subset Q_i) \vee ((Q_j')^\circ \cap Q_i^\circ = \emptyset) \ .$$

b) *Die Definition 7.c) von $\mathrm{v}(F)$ ist unabhängig von der Darstellung von F als Vereinigung von paarweise nicht überlappenden, abgeschlossenen Quadern.*

c) *Ist $F' \subset F$, so existiert eine Figur $F'' \subset \mathbb{R}^n$ mit*

$$(F')^\circ \cap (F'')^\circ = \emptyset \quad \text{und} \quad F = F' \cup F'' \ .$$

Satz (3)

Es seien $F, F' \subset \mathbb{R}^n$ *Figuren.*

a) *Ist* $F' \subset F$ *und* F'' *so wie in Lemma 2.c), so gilt*

$$\mathrm{v}(F) = \mathrm{v}(F') + \mathrm{v}(F'') \ ,$$

und insbesondere: $\mathrm{v}(F') \leq \mathrm{v}(F)$.

b) $\mathrm{v}(F \cup F') \leq \mathrm{v}(F) + \mathrm{v}(F')$,
und „=" gilt, falls $F^\circ \cap (F')^\circ = \emptyset$.

Definition (8)

Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $M \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte Menge. Dann heißen

$$\underline{\mathrm{v}}(M) = \underline{\mathrm{v}}_n(M) := \sup\{\mathrm{v}(F) \mid F \text{ ist Figur mit } F \subset M\}$$

der *innere Jordan-Inhalt* von M, und

$$\overline{\mathrm{v}}(M) = \overline{\mathrm{v}}_n(M) := \inf\{\mathrm{v}(F) \mid F \text{ ist Figur mit } M \subset F\}$$

der *äußere Jordan-Inhalt* von M.

M heißt *Jordan-messbar* (= J-messbar), wenn $\underline{\mathrm{v}}(M) = \overline{\mathrm{v}}(M)$ gilt, und dann heißt $\mathrm{v}(M) = \mathrm{v}_n(M) := \underline{\mathrm{v}}(M) = \overline{\mathrm{v}}(M)$ das *n-dimensionale Volumen* (= der *n-dimensionale Jordan-Inhalt*) von M.

M heißt eine *Jordan-Nullmenge*, wenn M J-messbar ist und $\mathrm{v}(M) = 0$ ist.

Satz (4)

Es seien $M, N \subset \mathbb{R}^n$ *beschränkte Mengen. Dann gilt:*

a) $M \subset N \;\Rightarrow\; \underline{\mathrm{v}}(M) \le \underline{\mathrm{v}}(N)$ *und* $\overline{\mathrm{v}}(M) \le \overline{\mathrm{v}}(N)$

b) $\overline{\mathrm{v}}(M) = \overline{\mathrm{v}}(\overline{M})$ *und* $\underline{\mathrm{v}}(M) = \underline{\mathrm{v}}(M^\circ)$

c) $\underline{\mathrm{v}}(M) + \overline{\mathrm{v}}(\partial M) = \overline{\mathrm{v}}(M)$

d) $\overline{\mathrm{v}}(M \cup N) \le \overline{\mathrm{v}}(M) + \overline{\mathrm{v}}(N)$

e) *Ist* $M^\circ \cap N^\circ = \emptyset$, *so gilt:* $\underline{\mathrm{v}}(M) + \underline{\mathrm{v}}(N) \le \underline{\mathrm{v}}(M \cup N)$

Korollar (1) (Charakterisierung J-messbarer Mengen)

Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte Menge. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

a) *M ist J-messbar.*

b) *Zu jedem $\varepsilon > 0$ existieren Figuren $F, F' \subset \mathbb{R}^n$ mit*

$$F \subset M \subset F' \quad \text{und} \quad \mathrm{v}(F') - \mathrm{v}(F) < \varepsilon \; .$$

c) *M° und $\overline{M}$ sind J-messbar und $\mathrm{v}(M^\circ) = \mathrm{v}(\overline{M})$.*

d) *Für jede Menge $N \subset \mathbb{R}^n$ mit $M^\circ \subset N \subset \overline{M}$ gilt: N ist J-messbar.*

e) *$\overline{\mathrm{v}}(\partial M) = 0$, d.h.: der Rand von M ist eine J-Nullmenge.*

Satz (5)

Es seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *integrierbare Funktionen, für alle* $x \in [a, b]$ *sei* $f(x) \leq g(x)$ *und*

$$M = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b \text{ und } f(x) \leq y \leq g(x)\} \ .$$

Dann ist M *J-messbar, und es gilt:*

$$\mathrm{v}_2(M) = \int_a^b (g - f) \ .$$

Satz (6) (Rechenregeln für den Jordan-Inhalt)

a) *Es seien $M, N \subset \mathbb{R}^n$ J-messbare Mengen. Dann gilt:*

i) *$M \cup N$, $M \cap N$ und $M \setminus N$ sind J-messbar.*

ii) *Ist $M^\circ \cap N^\circ = \emptyset$, so gilt:* $\mathrm{v}(M \cup N) = \mathrm{v}(M) + \mathrm{v}(N)$.

iii) *Ist $M \subset N$, so gilt:* $\mathrm{v}(N \setminus M) = \mathrm{v}(N) - \mathrm{v}(M)$.

iv) $\mathrm{v}(M \cup N) + \mathrm{v}(M \cap N) = \mathrm{v}(M) + \mathrm{v}(N)$.

b) *Sind $p, q \in \mathbb{N}$ mit $p + q = n$, und $A' \subset \mathbb{R}^p$, $A'' \subset \mathbb{R}^q$ J-messbare Mengen, so ist auch $A' \times A'' \subset \mathbb{R}^n$ J-messbar, und es gilt:*

$$\mathrm{v}_n(A' \times A'') = \mathrm{v}_p(A') \cdot \mathrm{v}_q(A'') \ .$$