§4. Kurven und Jordan-Inhalt

4.1 Kurven im $\mathbb{R}^n$

Definition 1.
Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein (beliebiges) Intervall und $\boldsymbol{\varphi}\colon I \to \mathbb{R}^n$ mit $t \mapsto \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \vdots \\ \varphi_n(t) \end{pmatrix}$
eine **stetige** Abbildung.

a) Dann heißt $\boldsymbol{\varphi}$ eine *(parametrisierte) Kurve* (oder: ein *Weg*) im $\mathbb{R}^n$.
Die Bildmenge $\boldsymbol{\varphi}(I) \subset \mathbb{R}^n$ heißt die *durch $\boldsymbol{\varphi}$ definierte geometrische Kurve* (oder: *die Spur des Weges $\boldsymbol{\varphi}$*).
Für $n = 2$ bzw. 3 heißt $\boldsymbol{\varphi}$ eine *ebene Kurve* bzw. eine *Raumkurve.*

Sind $t_1, t_2 \in I$ mit $t_1 \neq t_2$ und $\boldsymbol{\varphi}(t_1) = \boldsymbol{\varphi}(t_2) = \boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^n$, so heißt $\boldsymbol{p}$ ein *Doppelpunkt* der Kurve $\boldsymbol{\varphi}$.
Ist $\boldsymbol{\varphi}$ injektiv, so heißt $\boldsymbol{\varphi}$ eine *einfache* (oder: *doppelpunktfreie*) Kurve.

b) Ist $I = [a, b]$ ein kompaktes Intervall, so heißt $\boldsymbol{\varphi}$ eine *kompakte Kurve* (oder: *kompakter Weg*) mit *Anfangspunkt* $\boldsymbol{\varphi}(a)$ und *Endpunkt* $\boldsymbol{\varphi}(b)$;
gilt überdies $\boldsymbol{\varphi}(a) = \boldsymbol{\varphi}(b)$, so heißt die Kurve $\boldsymbol{\varphi}$ *geschlossen.*

Eine kompakte, geschlossene Kurve heißt eine *(geschlossene) Jordan-Kurve*, wenn $\boldsymbol{\varphi}\big|_{[a,b)}$ injektiv ist.

Beispiel 40: Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein (beliebiges) Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Geben Sie eine Parameterdarstellung $\boldsymbol{\varphi}\colon I \to \mathbb{R}^2$ an, welche den Graphen von f als ebene, doppelpunktfreie Kurve darstellt!

Beispiel 41: Untersuchen Sie, welche Eigenschaften aus Definition 1 *die folgenden Kurven haben, und skizzieren Sie deren Spur:*

$$\boldsymbol{\varphi}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto \binom{t^2}{t} \qquad \boldsymbol{\varphi}\colon [-1,1] \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto \begin{pmatrix} 2-t^2 \\ t^2 \\ 1+3t^2 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{\varphi}\colon (0,1) \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto \begin{pmatrix} \frac{1}{t} \\ \frac{1}{1-t} \end{pmatrix}$$

Jordan'scher Kurvensatz:
Es seien $a < b \in \mathbb{R}$ und $\boldsymbol{\varphi} : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ eine ebene, geschlossene Jordankurve.
Dann zerlegt die geometrische Kurve $C = \boldsymbol{\varphi}([a, b])$ den Raum $\mathbb{R}^2$ in zwei Gebiete (= nicht leere, offene, zusammenhängende Mengen) $G_1, G_2 \subset \mathbb{R}^2$, von denen genau eines beschränkt ist (dieses heißt dann das *Innengebiet von C*), sodass gilt:

$$\mathbb{R}^2 = G_1 \mathbin{\dot\cup} C \mathbin{\dot\cup} G_2 \quad \text{und} \quad C = \partial G_1 = \partial G_2 \ .$$

Definition 2.
Es seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $\boldsymbol{\varphi}\colon I \to \mathbb{R}^n$ eine Kurve.

a) $\boldsymbol{\varphi}$ heißt eine *differenzierbare* (bzw. eine C^k)-*Kurve*, wenn für alle $1 \le j \le n$ die j-te Komponentenfunktion $\varphi_j : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar (bzw. eine C^k-Funktion) ist.

b) Es sei $\boldsymbol{\varphi}$ eine differenzierbare Kurve und $t_0 \in I$. Dann heißt $\boldsymbol{\varphi}'(t_0) = \begin{pmatrix} \varphi_1'(t_0) \\ \vdots \\ \varphi_n'(t_0) \end{pmatrix}$ der *Tangentialvektor* an $\boldsymbol{\varphi}$ im Punkt $\boldsymbol{\varphi}(t_0)$.
$\boldsymbol{\varphi}(t_0)$ heißt ein *regulärer Punkt* von $\boldsymbol{\varphi}$, wenn $\boldsymbol{\varphi}'(t_0) \neq \mathbf{0}$ gilt.
Ist $\boldsymbol{\varphi}(t_0)$ regulär, so heißt

$$T := \{\boldsymbol{\varphi}(t_0) + \lambda \cdot \boldsymbol{\varphi}'(t_0) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^n$$

die *Tangente* an die Kurve $\boldsymbol{\varphi}$ im Punkt $\boldsymbol{\varphi}(t_0)$.
Die Kurve $\boldsymbol{\varphi}$ heißt *glatt*, wenn $\boldsymbol{\varphi}$ eine C^1-Kurve ist und für alle $t \in I$ gilt: $\boldsymbol{\varphi}(t)$ ist ein regulärer Punkt.

Beispiel 42: Geben Sie für die Kurven aus Beispiel 41 *den Tangentialvektor in einem beliebigen Kurvenpunkt $\boldsymbol{\varphi}(t)$ an, und bestimmen Sie alle Kurvenpunkte, die nicht regulär sind!*

Beispiel 43: Es sei $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar auf I. Verwenden Sie die Parameterdarstellung aus Beispiel 40 *und zeigen Sie, dass der Graph von f eine glatte Kurve ist!*

Definition 3.
Es seien $\boldsymbol{\varphi}\colon I = [a,b] \to \mathbb{R}^n$ eine kompakte Kurve und $J = [c,d] \subset \mathbb{R}$.
Eine streng monotone, stetige und bijektive Funktion $t\colon J \to I$ mit $u \mapsto t(u)$ heißt eine *zulässige Parametertransformation* (für $\boldsymbol{\varphi}$), und die Kurve

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\varphi} \circ t\colon J &\to \mathbb{R}^n \\ u &\mapsto \boldsymbol{\varphi}(t(u)) \end{aligned}$$

heißt die *Umparametrisierung von $\boldsymbol{\varphi}$ mittels t.*
Sind t und t^{-1} C^k-Funktionen (für ein $k \in \mathbb{N}$), so heißt t eine *zulässige C^k-Parametertransformation.*

t heißt $\left\{ \begin{matrix} \textit{orientierungstreu} \\ \textit{orientierungsumkehrend} \end{matrix} \right\}$, wenn t streng monoton $\left\{ \begin{matrix} \text{wächst} \\ \text{fällt} \end{matrix} \right\}$.

Beispiel 44: Es sei $t\colon [-1,1] \to [-1,1]$ gegeben durch

$$t(u) = \begin{cases} \sqrt{|u|} & \text{für } u \le 0 \\ -\sqrt{u} & \text{für } u > 0. \end{cases}$$

Überprüfen Sie, dass t eine zulässige Parametertransformation für die 2. Kurve $\boldsymbol{\varphi}$ aus Beispiel 41 *darstellt! Geben Sie die Umparametrisierung $\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\varphi} \circ t$ an!*
Zeigen Sie: $\boldsymbol{\varphi}$ ist eine C^1-Kurve, $\boldsymbol{\psi}$ jedoch nicht. Kann daher t eine C^1-Parametertransformation sein? Können Sie den Grund dafür näher erklären?

4.2 Die Länge von Kurven

Definition 4.
Es sei $\boldsymbol{\varphi}\colon I = [a,b] \to \mathbb{R}^n$ eine kompakte Kurve und $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$. Für eine endliche Teilmenge $T = \{t_0, t_1, \ldots, t_m\} \subset I$ mit $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = b$ heißt

$$\ell(\boldsymbol{\varphi}; T) = \sum_{j=1}^{m} \|\boldsymbol{\varphi}(t_j) - \boldsymbol{\varphi}(t_{j-1})\|$$

die *Länge des Streckenzuges* mit den *Eckpunkten* $\boldsymbol{\varphi}(t_0), \boldsymbol{\varphi}(t_1), \ldots\ldots, \boldsymbol{\varphi}(t_m)$ (*bezüglich der Norm* $\|\cdot\|$).

$$\ell(\boldsymbol{\varphi}) := \sup\{\ell(\boldsymbol{\varphi}; T) \mid T \text{ endlich und } \{a,b\} \subset T \subset I\} \in [0,\infty]$$

heißt die *(Bogen-)Länge* oder *Weglänge von* $\boldsymbol{\varphi}$ (bzgl. $\|\cdot\|$).

$\boldsymbol{\varphi}$ heißt *rektifizierbar*, wenn $\ell(\boldsymbol{\varphi}) < \infty$ ist.

Definition 5.
Es sei $\boldsymbol{\varphi} : I = [a,b] \to \mathbb{R}^n$ eine rektifizierbare Kurve. Dann heißt

$$\begin{aligned} \sigma\colon [a,b] &\to [0, \ell(\boldsymbol{\varphi})] \\ t &\mapsto \sigma(t) = \ell(\boldsymbol{\varphi}\big|_{[a,t]}) \end{aligned}$$

die *Bogenlängenfunktion* von $\boldsymbol{\varphi}$.

Existiert $\sigma^{-1}\colon [0, \ell(\boldsymbol{\varphi})] \to [a,b]$, so heißt $\boldsymbol{\psi} := \boldsymbol{\varphi} \circ \sigma^{-1}$ die *Umparametrisierung der Kurve* $\boldsymbol{\varphi}$ *auf die Bogenlänge* als Parameter.

Beispiel 45: Wieso ist durch

$$\begin{aligned} \varphi\colon [0,3] &\to \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto \begin{pmatrix} \min\{t,1\} + \max\{0, t-2\} \\ \max\{t-1, 0\} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

eine ebene Kurve gegeben? (Tipp: Untersuchen Sie φ auf den Intervallen $[0,1]$, $[1,2]$ und $[2,3]$ getrennt!) Skizzieren Sie die Spur von $\boldsymbol{\varphi}$.
Ist φ eine C^1-Kurve bzw. rektifizierbar? Können Sie $\ell(\varphi)$ berechnen?

Satz 1.
Es sei $\boldsymbol{\varphi}\colon I = [a,b] \to \mathbb{R}^n$ eine rektifizierbare Kurve und $\sigma\colon I \to [0, \ell(\boldsymbol{\varphi})]$ die Bogenlängenfunktion von $\boldsymbol{\varphi}$. Dann gilt:

a) *σ ist monoton wachsend, stetig und surjektiv.*

b) *Ist $\boldsymbol{\varphi}$ auf keinem Teilintervall von I konstant, so ist σ bijektiv, und σ und σ^{-1} sind zulässige, orientierungserhaltende Parametertransformationen.*

c) *Ist $\boldsymbol{\varphi}$ eine C^1-Funktion, so ist auch σ stetig differenzierbar, und für $t \in [a,b]$ gilt: $\sigma'(t) = \|\boldsymbol{\varphi}'(t)\|$, $\sigma(t) = \int\limits_a^t \|\boldsymbol{\varphi}'(\tau)\| d\tau$, und insbesondere: $\ell(\boldsymbol{\varphi}) = \int\limits_a^b \|\boldsymbol{\varphi}'(\tau)\| d\tau$.*

Beispiel 46: Die „Zykloide" ist gegeben durch $\boldsymbol{\varphi}\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{\varphi}(t) = \begin{pmatrix} t - \sin t \\ 1 - \cos t \end{pmatrix}$.
Zeigen Sie, dass $\boldsymbol{\varphi}$ *eine doppelpunktfreie* C^k*-Kurve (für jedes* $k \in \mathbb{N}$*) ist und berechnen Sie* $\ell(\boldsymbol{\varphi})$.
Bemerkung: $\sqrt{2 - 2\cos(t)} = 2\sin(t/2)$.

Beispiel 47: Geben Sie die Bogenlängenfunktion $\sigma(t)$ *der Zykloide aus* Beispiel 46 *an, deren Umkehrfunktion* $\sigma^{-1}(t)$*, und die Umparametrisierung der Zykloide auf die Bogenlänge!*

4.3 Die Krümmung ebener Kurven

In diesem Unterkapitel sei stets $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$ die Euklidische Norm.

Lemma 1.
Es sei $\boldsymbol{\varphi} : [0,l] \to \mathbb{R}^n$ *eine mit der Bogenlänge parametrisierte* C^1*-Kurve. Dann gilt:*

a) *Für jedes* $s \in [0,l]$ *ist* $\|\boldsymbol{\varphi}'(s)\| = 1$.

b) *Ist* $\boldsymbol{\varphi}$ *zweimal differenzierbar, so gilt für jedes* $s \in [0,l]$*:*

$$\boldsymbol{\varphi}'(s) \cdot \boldsymbol{\varphi}''(s) = 0 \ , \qquad \textit{d.h. } \boldsymbol{\varphi}''(s) \perp \boldsymbol{\varphi}'(s) \ .$$

Definition 6.
Es seien $\boldsymbol{\varphi}\colon [0,l] \to \mathbb{R}^2$ eine mit der Bogenlänge parametrisierte, ebene C^2-Kurve,
$\boldsymbol{\varphi}'(s)^\perp = \begin{pmatrix} -\varphi_2'(t) \\ \varphi_1'(t) \end{pmatrix}$ und $\boldsymbol{\varphi}''(s) = \begin{pmatrix} \varphi_1''(t) \\ \varphi_2''(t) \end{pmatrix}$.

a) Dann heißt $(\boldsymbol{\varphi}'(s), \boldsymbol{\varphi}'(s)^\perp) \in (\mathbb{R}^2)^2$ das *begleitende Zweibein* der Kurve $\boldsymbol{\varphi}$, und die (eindeutig bestimmte) Zahl $k(s) \in \mathbb{R}$ mit

$$\boldsymbol{\varphi}''(s) = k(s)\, \boldsymbol{\varphi}'(s)^\perp$$

heißt die *Krümmung* von $\boldsymbol{\varphi}$ im Punkt $\boldsymbol{\varphi}(s)$.

Ist $k(s) \neq 0$, so heißen
$\left|\frac{1}{k(s)}\right|$ der *Krümmungsradius*,
$\boldsymbol{n}(s) = \left|\frac{1}{k(s)}\right| \boldsymbol{\varphi}''(s)$ der *Hauptnormalenvektor* und
$\boldsymbol{m}(s) = \boldsymbol{\varphi}(s) + \left|\frac{1}{k(s)}\right| \boldsymbol{n}(s)$ der *Krümmungsmittelpunkt*.
Der Kreis mit Mittelpunkt $\boldsymbol{m}(s)$ und Radius $\left|\frac{1}{k(s)}\right|$ heißt *Krümmungskreis* der Kurve $\boldsymbol{\varphi}$ im Kurvenpunkt $\boldsymbol{\varphi}(s)$.

b) Ist $k(s) \begin{Bmatrix} \geq 0 \\ \leq 0 \end{Bmatrix}$, so heißt die Kurve $\begin{Bmatrix} \textit{linksgekrümmt} \\ \textit{rechtsgekrümmt} \end{Bmatrix}$ im Punkt $\boldsymbol{\varphi}(s)$.

Satz 2. a) *Es sei* $\boldsymbol{\varphi}\colon [0,l] \to \mathbb{R}^2$ *eine mit der Bogenlänge parametrisierte, ebene* C^2*-Kurve. Dann gilt:*

$$k(s) = \det(\boldsymbol{\varphi}', \boldsymbol{\varphi}'') = \varphi_1'(s)\varphi_2''(s) - \varphi_1''(s)\varphi_2'(s) \ .$$

b) *Ist* $\boldsymbol{\varphi} : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ *eine glatte* C^2*-Kurve (mit beliebiger Parametrisierung), so gilt:*

$$k(t) = \frac{\varphi_1'(t)\varphi_2''(t) - \varphi_1''(t)\varphi_2'(t)}{\|\boldsymbol{\varphi}'(t)\|_2^3} \ .$$

Beispiel 48: Berechnen Sie die Krümmung der Zykloide aus Beispiel 46. *Kontrollieren Sie Ihr Resultat für* $t = 0$ *und* $t = 2\pi$.

Ausblick: Kurvenintegrale
Es sei $\boldsymbol{\varphi} : I = [a,b] \to \mathbb{R}^n$ eine rektifizierbare C^1-Kurve.

Kurvenintegral 1. Art:
$\boldsymbol{\varphi}$ sei eine doppelpunktfreie Kurve, $\sigma : I \to [0,l]$ ihre Bogenlängenfunktion,
$C := \boldsymbol{\varphi}(I) \subset \mathbb{R}^n$ und $f\colon C \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion („Dichtefunktion"). Dann heißt

$$\int_C f \, d\sigma := \int_a^b f(\boldsymbol{\varphi}(t))\, \sigma'(t)\, dt$$

das *Kurvenintegral* (erster Art) von f über die Kurve C.

Der so definierte Wert des Kurvenintegrals $\int_C f\, d\sigma$ ist unabhängig von der Wahl der Parameterdarstellung von C.

Kurvenintegral 2. Art:
Es sei $\boldsymbol{f}\colon C \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion („Vektor-, Kraftfeld"). Dann heißt

$$\int_{\boldsymbol{\varphi}} \boldsymbol{f}\, d\boldsymbol{x} := \int_a^b \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\varphi}(t)) \cdot \boldsymbol{\varphi}'(t)\, dt = \int_a^b \Big(\sum_{j=1}^n f_j(\boldsymbol{\varphi}(t))\, \varphi_j'(t) \Big) dt$$

das *Kurvenintegral* (zweiter Art) von $\boldsymbol{f}$ entlang der Kurve $\boldsymbol{\varphi}$.

Der so definierte Wert des Kurvenintegrals $\int_{\boldsymbol{\varphi}} \boldsymbol{f}\, d\boldsymbol{x}$ ist invariant unter orientierungserhaltenden zulässigen C^1-Parametertransformationen, wechselt jedoch sein Vorzeichen bei orientierungsumkehrenden Parametertransformationen.

4.4 Der Jordan'sche Inhalt

Intervalle: Es seien $a, b \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ mit $a \leq b$.
Eine Teilmenge $I \subset \overline{\mathbb{R}}$ heißt Intervall mit Endpunkten a und b, wenn $(a, b) \subset I \subset [a, b]$, und $|I| = b - a \in [0, \infty]$ heißt die Länge des Intervalls I.

Definition 7. Es sei $n \in \mathbb{N}$.

a) Eine nichtleere Teilmenge $\emptyset \neq Q \subset \mathbb{R}^n$ heißt ein *Quader*, wenn es für $1 \leq j \leq n$ beschränkte Intervalle $I_j \subset \mathbb{R}$ mit Endpunkten $a_j \leq b_j \in \mathbb{R}$ gibt, sodass

$$Q = I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_n = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid x_j \in I_j \quad \text{für alle } 1 \leq j \leq n\}$$

gilt.

$$\mathsf{v}(Q) = \mathsf{v}_n(Q) = \prod_{j=1}^{n} |I_j| = \prod_{j=1}^{n} (b_j - a_j) \in [0, \infty)$$

heißt dann das *n-dimensionale Volumen* (= *Inhalt*) des Quaders Q.
Q heißt *ausgeartet* $\iff \mathsf{v}(Q) = 0$.

b) Eine Teilmenge $F \subset \mathbb{R}^n$ heißt *Figur*, wenn $F = Q_1 \cup \ldots \cup Q_k$ mit abgeschlossenen Quadern $Q_i \subset \mathbb{R}^n$ gilt.
Zwei Figuren $F, F' \subset \mathbb{R}^n$ heißen *nicht überlappend* (= *fremd*), wenn sie keine gemeinsamen inneren Punkte besitzen ($\iff F^\circ \cap (F')^\circ = \emptyset$).

c) Es sei $F = Q_1 \cup \ldots \cup Q_k \subset \mathbb{R}^n$ eine Figur, und die Quader Q_i seien paarweise nicht überlappend. Dann heißt

$$\mathsf{v}(F) = \mathsf{v}_n(F) = \sum_{i=1}^{k} \mathsf{v}(Q_i) \in [0, \infty)$$

das *n-dimensionale Volumen* (= *Inhalt*) der Figur F.

Zusatz: $\mathsf{v}(\emptyset) = 0$.

Beispiel 49: Gegeben sind die (2-dimensionalen) Quader $Q_1 = [-1; 4] \times [0; 1]$ und $Q_2 = [1; 2] \times [-2; 3]$. Skizzieren Sie die Figur $F = Q_1 \cup Q_2$! Sind die Quader Q_1 und Q_2 überlappend? Stellen Sie die Figur F als Vereinigung von nicht überlappenden Quadern dar! Wie viele Quader benötigen Sie dazu? Bestimmen Sie das 2-dimensionale Volumen von F!

Lemma 2. *Es seien $F, F' \subset \mathbb{R}^n$ Figuren.*

a) *Ist $F = \bigcup_{i=1}^{k} Q_i$ mit abgeschlossenen Quadern Q_i, so existieren paarweise nicht überlappende, abgeschlossene Quader Q'_j ($1 \leq j \leq K$), sodass $F = \bigcup_{j=1}^{K} Q'_j$ und für alle $1 \leq i \leq k$, $1 \leq j \leq K$ gilt:*

$$(Q'_j \subset Q_i) \vee ((Q'_j)^\circ \cap Q_i^\circ = \emptyset) \ .$$

b) *Die* Definition 7.c) *von* $\mathsf{v}(F)$ *ist unabhängig von der Darstellung von F als Vereinigung von paarweise nicht überlappenden, abgeschlossenen Quadern.*

c) *Ist* $F' \subset F$, *so existiert eine Figur* $F'' \subset \mathbb{R}^n$ *mit*

$$(F')^\circ \cap (F'')^\circ = \emptyset \quad \textit{und} \quad F = F' \cup F'' \ .$$

Satz 3. *Es seien* $F, F' \subset \mathbb{R}^n$ *Figuren.*

a) *Ist* $F' \subset F$ *und* F'' *so wie in* Lemma 2.c), *so gilt* $\mathsf{v}(F) = \mathsf{v}(F') + \mathsf{v}(F'')$, *und insbesondere:* $\mathsf{v}(F') \leq \mathsf{v}(F)$.

b) $\mathsf{v}(F \cup F') \leq \mathsf{v}(F) + \mathsf{v}(F')$, *und „=" gilt, falls* $F^\circ \cap (F')^\circ = \emptyset$.

Beispiel 50: Wählen Sie konkrete Figuren $F' \subset F$ *im* $\mathbb{R}^3$, *und erklären Sie die Aussagen von* Lemma 2 *und* Satz 3 *an diesem konkreten Beispiel!*

Definition 8.
Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $M \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte Menge. Dann heißen

$$\underline{\mathsf{v}}(M) = \underline{\mathsf{v}}_n(M) := \sup\{\mathsf{v}(F) \mid F \text{ ist Figur mit } F \subset M\}$$

der *innere Jordan-Inhalt* von M, und

$$\overline{\mathsf{v}}(M) = \overline{\mathsf{v}}_n(M) := \inf\{\mathsf{v}(F) \mid F \text{ ist Figur mit } M \subset F\}$$

der *äußere Jordan-Inhalt* von M.

M heißt *Jordan-messbar* (= J-messbar), wenn $\underline{\mathsf{v}}(M) = \overline{\mathsf{v}}(M)$ gilt, und dann heißt $\mathsf{v}(M) = \mathsf{v}_n(M) := \underline{\mathsf{v}}(M) = \overline{\mathsf{v}}(M)$ das *n-dimensionale Volumen* (= der *n-dimensionale Jordan-Inhalt*) von M.

M heißt eine *Jordan-Nullmenge*, wenn M J-messbar ist und $\mathsf{v}(M) = 0$ ist.

Beispiel 51: Beweisen Sie: jede endliche Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ *ist eine Figur und eine J-Nullmenge! (Abgeschlossene Quader können auch Punkte sein!)*

Beispiel 52: Es seien $M_1 = [0;1] \cap \mathbb{Q}$ *und* $M_2 = M_1 \times M_1$. *Zeigen Sie:* $\underline{\mathsf{v}}_1(M_1) = \underline{\mathsf{v}}_2(M_2) = 0$ *und* $\overline{\mathsf{v}}_1(M_1) = \overline{\mathsf{v}}_2(M_2) = 1$. *Was zeigt dieses Beispiel für abzählbare Mengen?*

Beispiel 53: Es seien $0 < a, h, x \in \mathbb{R}$ *mit* $x \leq a$ *und* $M \subset \mathbb{R}^2$ *das (abgeschlossene) Dreieck mit den Eckpunkten* $A = (-x, 0)$, $B = (-x + a, 0)$ *und* $C = (0, h)$, *wobei* $x \in \mathbb{R}$ *beliebig ist.*
Unterteilen Sie das Dreieck M *in* $n \in \mathbb{N}$ *gleich hohe, horizontale Streifen, geben Sie Figuren* F'_n, F''_n *an mit* $F'_n \subset M \subset F''_n$ *und berechnen Sie deren Fläche (Strahlensatz!).*
Zeigen Sie, dass M *messbar ist und dass* $\mathsf{v}_2(M) = a \cdot h/2$ *ist!*
Wo entstehen Probleme, wenn man ein beliebiges $x \in \mathbb{R}$ *erlaubt?*

Satz 4. *Es seien $M, N \subset \mathbb{R}^n$ beschränkte Mengen. Dann gilt:*

a) $M \subset N \;\Rightarrow\; \underline{\mathsf{v}}(M) \leq \underline{\mathsf{v}}(N)$ *und* $\overline{\mathsf{v}}(M) \leq \overline{\mathsf{v}}(N)$

b) $\overline{\mathsf{v}}(M) = \overline{\mathsf{v}}(\overline{M})$ *und* $\underline{\mathsf{v}}(M) = \underline{\mathsf{v}}(M^\circ)$

c) $\underline{\mathsf{v}}(M) + \overline{\mathsf{v}}(\partial M) = \overline{\mathsf{v}}(M)$

d) $\overline{\mathsf{v}}(M \cup N) \leq \overline{\mathsf{v}}(M) + \overline{\mathsf{v}}(N)$

e) *Ist $M^\circ \cap N^\circ = \emptyset$, so gilt:* $\underline{\mathsf{v}}(M) + \underline{\mathsf{v}}(N) \leq \underline{\mathsf{v}}(M \cup N)$

Korollar 1. (Charakterisierung J-messbarer Mengen)
Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte Menge. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

a) M ist J-messbar.

b) Zu jedem $\varepsilon > 0$ existieren Figuren $F, F' \subset \mathbb{R}^n$ mit

$$F \subset M \subset F' \quad \text{und} \quad \mathsf{v}(F') - \mathsf{v}(F) < \varepsilon \ .$$

c) M° und $\overline{M}$ sind J-messbar **und** $\mathsf{v}(M^\circ) = \mathsf{v}(\overline{M})$.

d) Für jede Menge $N \subset \mathbb{R}^n$ mit $M^\circ \subset N \subset \overline{M}$ gilt: N ist J-messbar.

e) $\overline{\mathsf{v}}(\partial M) = 0$, d.h.: der Rand von M ist eine J-Nullmenge.

Satz 5. *Es seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbare Funktionen, für alle $x \in [a, b]$ sei $f(x) \leq g(x)$ und*

$$M = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b \text{ und } f(x) \leq y \leq g(x)\} \ .$$

Dann ist M J-messbar, und es gilt:

$$\mathsf{v}_2(M) = \int_a^b (g - f) \ .$$

Satz 6. (Rechenregeln für den Jordan-Inhalt)

a) *Es seien $M, N \subset \mathbb{R}^n$ J-messbare Mengen. Dann gilt:*

i) *$M \cup N$, $M \cap N$ und $M \setminus N$ sind J-messbar.*

ii) *Ist $M^\circ \cap N^\circ = \emptyset$, so gilt:* $\mathsf{v}(M \cup N) = \mathsf{v}(M) + \mathsf{v}(N)$.

iii) *Ist $M \subset N$, so gilt:* $\mathsf{v}(N \setminus M) = \mathsf{v}(N) - \mathsf{v}(M)$.

iv) $\mathsf{v}(M \cup N) + \mathsf{v}(M \cap N) = \mathsf{v}(M) + \mathsf{v}(N)$.

b) *Sind $p, q \in \mathbb{N}$ mit $p + q = n$, und $A' \subset \mathbb{R}^p$, $A'' \subset \mathbb{R}^q$ J-messbare Mengen, so ist auch $A' \times A'' \subset \mathbb{R}^n$ J-messbar, und es gilt:*

$$\mathsf{v}_n(A' \times A'') = \mathsf{v}_p(A') \cdot \mathsf{v}_q(A'') \ .$$