ANALYSIS 2 für LAK

Kapitel 3: Der $\mathbb{R}^n$ und seine Topologie

MAB.03022UB Vorlesung im SS 2019

Günter LETTL

Institut für Mathematik und wissenschaftliches Rechnen
Karl-Franzens-Universität Graz

3.1 Die Vektorraumstruktur des $\mathbb{R}^n$

Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$\mathbb{R}^n = \{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\} = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n \text{ Faktoren}}$$

Definition (1)

Für beliebige Elemente
$\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n), \boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$
definieren wir

(VA) $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n)$ *Vektoraddition* und

(SM) $\lambda \boldsymbol{a} = (\lambda a_1, \ldots, \lambda a_n)$ *Multiplikation einer Zahl (=Skalar) mit einem Vektor* (λ-fache des Vektors)

1.) Der $\mathbb{R}^n$ erfüllt mit der Vektoraddition **(VA)** die folgenden Axiome einer kommutativen Gruppe:

Für alle $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ und $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$ gilt:

(G1) $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})$ *Assoziativgesetz*

(G2) $\boldsymbol{a} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$ $\mathbf{0}$ *ist neutrales Element bezüglich* $+$

(G3) Es gibt ein $\boldsymbol{a}' \in \mathbb{R}^n$ mit $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}' = 0 = \boldsymbol{a}' + \boldsymbol{a}$, nämlich $\boldsymbol{a}' = -\boldsymbol{a} = (-a_1, \ldots, -a_n)$
jedes $\boldsymbol{a}$ *besitzt ein inverses Element bezüglich* $+$

(G4) $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$ *Kommutativgesetz*

2.) Der $\mathbb{R}^n$ erfüllt mit der in **(SM)** definierten Multiplikation mit Skalaren die folgenden Axiome eines $\mathbb{R}$-Vektorraums:

Für alle $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ und beliebige $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt:

(V1) $\lambda(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \lambda\boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{b}$

(V2) $(\lambda + \mu)\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{a}$

(V3) $\lambda(\mu\boldsymbol{a}) = (\lambda\mu)\boldsymbol{a}$

(V4) $1\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$

Definition (2)

a) Eine Abbildung $\|\cdot\|: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt *eine Norm auf* $\mathbb{R}^n$, wenn für alle $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

(N1) $\|\boldsymbol{a}\| = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0} = (0, 0, \ldots, 0)$

(N2) $\|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\| \leq \|\boldsymbol{a}\| + \|\boldsymbol{b}\|$ (*Dreiecksungleichung*)

(N3) $\|\lambda \boldsymbol{a}\| = |\lambda| \cdot \|\boldsymbol{a}\|$ (*Homogenität*)

Definition (2) (Fortsetzung)

b) Es seien $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ und $0 < \rho \in \mathbb{R}$.

Dann heißen

$\|\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}\|$ *der Abstand von $\boldsymbol{a}$ zu $\boldsymbol{b}$ bezüglich der Norm $\|\cdot\|$* und

$$K_{\rho,\|\cdot\|}(\boldsymbol{a}) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\| < \rho\}$$

die (offene) ρ-Kugel um $\boldsymbol{a}$ bezüglich der Norm $\|\cdot\|$ (mit Radius ρ und Mittelpunkt $\boldsymbol{a}$).

c) Für $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ definieren wir *das (Standard-)Skalarprodukt* durch

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$$

Lemma (1) (und Definition)

Die folgenden Abbildungen sind Normen auf dem $\mathbb{R}^n$:

(i) *Summennorm:*

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_1 : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ \boldsymbol{a} &\mapsto \|\boldsymbol{a}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |a_i| \end{aligned}$$

(ii) *Euklidische Norm:*

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_2 : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ \boldsymbol{a} &\mapsto \|\boldsymbol{a}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \end{aligned}$$

(iii) *Maximumsnorm:*

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_\infty : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ \boldsymbol{a} &\mapsto \|\boldsymbol{a}\|_\infty = \max\{|a_i| \mid 1 \leq i \leq n\} \end{aligned}$$

Lemma (2)

Für die in Lemma 1 definierten Normen gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$:

$$\|\boldsymbol{a}\|_\infty \leq \|\boldsymbol{a}\|_2 \leq \|\boldsymbol{a}\|_1 \leq n\,\|\boldsymbol{a}\|_\infty$$

Insbesondere gilt für jedes $0 < \rho \in \mathbb{R}$:

$$K_{\rho,\|\cdot\|_\infty}(\boldsymbol{a}) \supset K_{\rho,\|\cdot\|_2}(\boldsymbol{a}) \supset K_{\rho,\|\cdot\|_1}(\boldsymbol{a}) \supset K_{\frac{1}{n}\rho,\|\cdot\|_\infty}(\boldsymbol{a})$$

3.3 Folgen und Grenzwerte im $\mathbb{R}^n$

Definition (3)

Für jedes $k \in \mathbb{N}$ sei $\boldsymbol{a}_k = (a_{k,1}, a_{k,2}, \ldots, a_{k,n}) \in \mathbb{R}^n$ und $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$.

a) Die Folge $(\boldsymbol{a}_k)_{k\geq 1}$ heißt *konvergent*, wenn es ein $\boldsymbol{b} = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ mit folgender Eigenschaft gibt:

zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein Index $N \in \mathbb{N}$,
sodass für alle $k \geq N$ gilt: $\|\boldsymbol{a}_k - \boldsymbol{b}\| < \varepsilon$.

Ist die Folge $(\boldsymbol{a}_k)_{k\geq 1}$ konvergent, so heißt $\boldsymbol{b}$ der *Grenzwert* (oder: *Limes*) der Folge.
Schreibweise: $\lim\limits_{k\to\infty} \boldsymbol{a}_k = \boldsymbol{b}$ bzw. $(\boldsymbol{a}_k)_{k\geq 1} \to \boldsymbol{b}$

Eine Folge, die gegen $\mathbf{0} = (0, \ldots, 0)$ konvergiert, heißt *Nullfolge*.
Eine Folge, die nicht konvergiert, heißt *divergent*.

b) Die Folge $(\boldsymbol{a}_k)_{k\geq 1}$ heißt *beschränkt*, wenn die Menge $\{\|\boldsymbol{a}_k\| \mid k \geq 1\}$ beschränkt ist; andernfalls heißt sie *unbeschränkt*.

Satz (1) (Koordinatenweise Konvergenz)

Mit den Bezeichnungen von Definition 3 gilt:

Die Folge $(\boldsymbol{a}_k)_{k\geq 1}$ in $\mathbb{R}^n$ konvergiert genau dann, wenn für jedes $1 \leq j \leq n$ die Folge der j-ten Koordinaten der $\boldsymbol{a}_k$, $(a_{k,j})_{k\geq 1}$, in $\mathbb{R}$ konvergiert.

Genauer gilt:

$$\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{a}_k = \boldsymbol{b} \iff \forall\, 1 \leq j \leq n : \lim_{k\to\infty} a_{k,j} = b_j.$$

Alle Resultate von A1, §4, welche keine „reelle Spezialitäten” benötigen, lassen sich auf Folgen im $\mathbb{R}^n$ übertragen:

Satz (A1, §4, Satz 1 und 2)

a) Ist eine Folge konvergent, so ist ihr Limes eindeutig bestimmt.

b) Eine konvergente Folge ist beschränkt.

c) Sind $(\boldsymbol{a}_k)_{k\geq 1} \to \boldsymbol{a}$ und $(\boldsymbol{b}_k)_{k\geq 1} \to \boldsymbol{b}$ konvergente Folgen in $\mathbb{R}^n$, und ist $\lambda \in \mathbb{R}$, so gilt:

$$\lim_{k\to\infty} \|\boldsymbol{a}_k\| = \|\boldsymbol{a}\|, \qquad \lim_{k\to\infty} (\boldsymbol{a}_k \pm \boldsymbol{b}_k) = \boldsymbol{a} \pm \boldsymbol{b},$$

$$\lim_{k\to\infty} (\lambda \boldsymbol{a}_k) = \lambda \boldsymbol{a}, \qquad \lim_{k\to\infty} (\boldsymbol{a}_k \cdot \boldsymbol{b}_k) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}.$$

A1, §4, Definition 3 und Satz 3:
Definition von Endstück, Teilfolge und Umordnung einer Folge, und Grenzwerte ändern sich dabei nicht.

Definition (A1, §4, Def.5)

$\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ heißt ein *Häufungswert* der Folge $(\boldsymbol{a}_k)_{k\geq 1}$, wenn es eine Teilfolge $(\boldsymbol{a}_{k_i})_{i\in\mathbb{N}}$ dieser Folge gibt, die gegen $\boldsymbol{a}$ konvergiert.

Satz (A1, §4, Satz 7.b))

$\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ ist genau dann ein Häufungswert der Folge $(\boldsymbol{a}_k)_{k\geq 1}$, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ gilt: $\#\{k \in \mathbb{N} \mid \|\boldsymbol{a}_k - \boldsymbol{a}\| < \varepsilon\} = \infty$.

Satz (A1, §4, Satz 8.b))

Jede beschränkte Folge $(\boldsymbol{a}_k)_{k\geq 1}$ in $\mathbb{R}^n$ besitzt Häufungswerte.

Satz (A1, §4, Satz 9)

Eine Folge $(\boldsymbol{a}_k)_{k\geq 1}$ in $\mathbb{R}^n$ konvergiert genau dann, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, sodass für alle $k, l \geq N$ gilt:

$$\|\boldsymbol{a}_k - \boldsymbol{a}_l\| < \varepsilon \, .$$

Definition (A1, §4, Def.5)

$\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ heißt ein *Häufungswert* der Folge $(\boldsymbol{a}_k)_{k\geq 1}$, wenn es eine Teilfolge $(\boldsymbol{a}_{k_i})_{i\in\mathbb{N}}$ dieser Folge gibt, die gegen $\boldsymbol{a}$ konvergiert.

Satz (A1, §4, Satz 7.b))

$\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ ist genau dann ein Häufungswert der Folge $(\boldsymbol{a}_k)_{k\geq 1}$, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ gilt: $\#\{k \in \mathbb{N} \mid \|\boldsymbol{a}_k - \boldsymbol{a}\| < \varepsilon\} = \infty$.

Satz (A1, §4, Satz 8.b))

Jede beschränkte Folge $(\boldsymbol{a}_k)_{k\geq 1}$ in $\mathbb{R}^n$ besitzt Häufungswerte.

Satz (A1, §4, Satz 9)

Eine Folge $(\boldsymbol{a}_k)_{k\geq 1}$ in $\mathbb{R}^n$ konvergiert genau dann, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, sodass für alle $k, l \geq N$ gilt:

$$\|\boldsymbol{a}_k - \boldsymbol{a}_l\| < \varepsilon \, .$$

Definition (A1, §4, Def.5)

$\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ heißt ein *Häufungswert* der Folge $(\boldsymbol{a}_k)_{k\geq 1}$, wenn es eine Teilfolge $(\boldsymbol{a}_{k_i})_{i\in\mathbb{N}}$ dieser Folge gibt, die gegen $\boldsymbol{a}$ konvergiert.

Satz (A1, §4, Satz 7.b))

$\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ ist genau dann ein Häufungswert der Folge $(\boldsymbol{a}_k)_{k\geq 1}$, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ gilt: $\#\{k \in \mathbb{N} \mid \|\boldsymbol{a}_k - \boldsymbol{a}\| < \varepsilon\} = \infty$.

Satz (A1, §4, Satz 8.b))

Jede beschränkte Folge $(\boldsymbol{a}_k)_{k\geq 1}$ in $\mathbb{R}^n$ besitzt Häufungswerte.

Satz (A1, §4, Satz 9)

Eine Folge $(\boldsymbol{a}_k)_{k\geq 1}$ in $\mathbb{R}^n$ konvergiert genau dann, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, sodass für alle $k, l \geq N$ gilt:

$$\|\boldsymbol{a}_k - \boldsymbol{a}_l\| < \varepsilon .$$

Definition (A1, §4, Def.5)

$\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ heißt ein *Häufungswert* der Folge $(\boldsymbol{a}_k)_{k\geq 1}$, wenn es eine Teilfolge $(\boldsymbol{a}_{k_i})_{i\in\mathbb{N}}$ dieser Folge gibt, die gegen $\boldsymbol{a}$ konvergiert.

Satz (A1, §4, Satz 7.b))

$\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ ist genau dann ein Häufungswert der Folge $(\boldsymbol{a}_k)_{k\geq 1}$, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ gilt: $\#\{k \in \mathbb{N} \mid \|\boldsymbol{a}_k - \boldsymbol{a}\| < \varepsilon\} = \infty$.

Satz (A1, §4, Satz 8.b))

Jede beschränkte Folge $(\boldsymbol{a}_k)_{k\geq 1}$ in $\mathbb{R}^n$ besitzt Häufungswerte.

Satz (A1, §4, Satz 9)

Eine Folge $(\boldsymbol{a}_k)_{k\geq 1}$ in $\mathbb{R}^n$ konvergiert genau dann, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, sodass für alle $k, l \geq N$ gilt:

$$\|\boldsymbol{a}_k - \boldsymbol{a}_l\| < \varepsilon\ .$$

Definition (4)

Es seien $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Menge und $M^c = \mathbb{R}^n \setminus M$ ihre *Komplementmenge im $\mathbb{R}^n$*.

a) (Lage eines Punktes bezüglich einer Menge)
Ein Punkt $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ heißt

- *ein innerer Punkt von M*, wenn es ein $\rho > 0$ mit $K_\rho(\boldsymbol{a}) \subset M$ gibt (d.h. alle Punkte, deren Abstand zu $\boldsymbol{a}$ kleiner als ρ ist, gehören zu M; insbesondere gilt: $\boldsymbol{a} \in M$).
- *ein äußerer Punkt von M*, wenn es ein $\rho > 0$ mit $K_\rho(\boldsymbol{a}) \cap M = \emptyset$ gibt (d.h. alle Punkte, deren Abstand zu $\boldsymbol{a}$ kleiner als ρ ist, gehören nicht zu M; insbesondere gilt: $\boldsymbol{a} \notin M$).
  Es gilt: $\boldsymbol{a}$ ist ein äußerer Punkt von $M \iff \boldsymbol{a}$ ist ein innerer Punkt von M^c.

3.4 Topologische Grundbegriffe des $\mathbb{R}^n$

Definition (4)

Es seien $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Menge und $M^c = \mathbb{R}^n \setminus M$ ihre *Komplementmenge im* $\mathbb{R}^n$.

a) (Lage eines Punktes bezüglich einer Menge)
Ein Punkt $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ heißt

- *ein innerer Punkt von M*, wenn es ein $\rho > 0$ mit $K_\rho(\boldsymbol{a}) \subset M$ gibt (d.h. alle Punkte, deren Abstand zu $\boldsymbol{a}$ kleiner als ρ ist, gehören zu M; insbesondere gilt: $\boldsymbol{a} \in M$).
- *ein äußerer Punkt von M*, wenn es ein $\rho > 0$ mit $K_\rho(\boldsymbol{a}) \cap M = \emptyset$ gibt (d.h. alle Punkte, deren Abstand zu $\boldsymbol{a}$ kleiner als ρ ist, gehören nicht zu M; insbesondere gilt: $\boldsymbol{a} \notin M$).
  Es gilt: $\boldsymbol{a}$ ist ein äußerer Punkt von $M \iff \boldsymbol{a}$ ist ein innerer Punkt von M^c.

3.4 Topologische Grundbegriffe des $\mathbb{R}^n$

Definition (4)

Es seien $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Menge und $M^c = \mathbb{R}^n \setminus M$ ihre *Komplementmenge im* $\mathbb{R}^n$.

a) (Lage eines Punktes bezüglich einer Menge)
Ein Punkt $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ heißt

- *ein innerer Punkt von M*, wenn es ein $\rho > 0$ mit $K_\rho(\boldsymbol{a}) \subset M$ gibt (d.h. alle Punkte, deren Abstand zu $\boldsymbol{a}$ kleiner als ρ ist, gehören zu M; insbesondere gilt: $\boldsymbol{a} \in M$).
- *ein äußerer Punkt von M*, wenn es ein $\rho > 0$ mit $K_\rho(\boldsymbol{a}) \cap M = \emptyset$ gibt (d.h. alle Punkte, deren Abstand zu $\boldsymbol{a}$ kleiner als ρ ist, gehören nicht zu M; insbesondere gilt: $\boldsymbol{a} \notin M$).
  Es gilt: $\boldsymbol{a}$ ist ein äußerer Punkt von $M \iff \boldsymbol{a}$ ist ein innerer Punkt von M^c.

Definition (4) (Fortsetzung)

- *ein Randpunkt von M*, wenn für jedes $\rho > 0$ gilt: $K_\rho(\boldsymbol{a}) \cap M \neq \emptyset$ und $K_\rho(\boldsymbol{a}) \cap M^c \neq \emptyset$ (d.h. beliebig nahe an $\boldsymbol{a}$ liegen sowohl Punkte von M als auch Punkte von M^c).
- *ein Berührpunkt von M*, wenn für jedes $\rho > 0$ gilt: $K_\rho(\boldsymbol{a}) \cap M \neq \emptyset$ (d.h. beliebig nahe an $\boldsymbol{a}$ liegen Punkte von M). Ist insbesondere $\boldsymbol{a} \in M$, so ist $\boldsymbol{a}$ ein Berührpunkt von M.
- *ein isolierter Punkt von M*, wenn es ein $\rho > 0$ mit $K_\rho(\boldsymbol{a}) \cap M = \{\boldsymbol{a}\}$ gibt (d.h. $\boldsymbol{a} \in M$, und es gibt keine weiteren Punkte von M, die einen Anstand kleiner als ρ zu $\boldsymbol{a}$ haben). Ein isolierter Punkt ist auch ein Berührpunkt.
- *ein Häufungspunkt von M*, wenn für jedes $\rho > 0$ gilt: $K_\rho(\boldsymbol{a}) \cap M \neq \emptyset$ und $K_\rho(\boldsymbol{a}) \cap M \neq \{\boldsymbol{a}\}$ ($\iff$ $\boldsymbol{a}$ ist ein Berührpunkt von $M \setminus \{\boldsymbol{a}\}$); (d.h. beliebig nahe an $\boldsymbol{a}$ liegen Punkte von M, die ungleich $\boldsymbol{a}$ sind). Ein Häufungspunkt ist auch ein Berührpunkt von M.

Definition (4) (Fortsetzung)

- *ein Randpunkt von M*, wenn für jedes $\rho > 0$ gilt: $K_\rho(\boldsymbol{a}) \cap M \neq \emptyset$ und $K_\rho(\boldsymbol{a}) \cap M^c \neq \emptyset$ (d.h. beliebig nahe an $\boldsymbol{a}$ liegen sowohl Punkte von M als auch Punkte von M^c).
- *ein Berührpunkt von M*, wenn für jedes $\rho > 0$ gilt: $K_\rho(\boldsymbol{a}) \cap M \neq \emptyset$ (d.h. beliebig nahe an $\boldsymbol{a}$ liegen Punkte von M). Ist insbesondere $\boldsymbol{a} \in M$, so ist $\boldsymbol{a}$ ein Berührpunkt von M.
- *ein isolierter Punkt von M*, wenn es ein $\rho > 0$ mit $K_\rho(\boldsymbol{a}) \cap M = \{\boldsymbol{a}\}$ gibt (d.h. $\boldsymbol{a} \in M$, und es gibt keine weiteren Punkte von M, die einen Anstand kleiner als ρ zu $\boldsymbol{a}$ haben). Ein isolierter Punkt ist auch ein Berührpunkt.
- *ein Häufungspunkt von M*, wenn für jedes $\rho > 0$ gilt: $K_\rho(\boldsymbol{a}) \cap M \neq \emptyset$ und $K_\rho(\boldsymbol{a}) \cap M \neq \{\boldsymbol{a}\}$ ($\iff$ $\boldsymbol{a}$ ist ein Berührpunkt von $M \setminus \{\boldsymbol{a}\}$); (d.h. beliebig nahe an $\boldsymbol{a}$ liegen Punkte von M, die ungleich $\boldsymbol{a}$ sind). Ein Häufungspunkt ist auch ein Berührpunkt von M.

Definition (4) (Fortsetzung)

- *ein Randpunkt von M*, wenn für jedes $\rho > 0$ gilt: $K_\rho(\boldsymbol{a}) \cap M \neq \emptyset$ und $K_\rho(\boldsymbol{a}) \cap M^c \neq \emptyset$ (d.h. beliebig nahe an $\boldsymbol{a}$ liegen sowohl Punkte von M als auch Punkte von M^c).
- *ein Berührpunkt von M*, wenn für jedes $\rho > 0$ gilt: $K_\rho(\boldsymbol{a}) \cap M \neq \emptyset$ (d.h. beliebig nahe an $\boldsymbol{a}$ liegen Punkte von M). Ist insbesondere $\boldsymbol{a} \in M$, so ist $\boldsymbol{a}$ ein Berührpunkt von M.
- *ein isolierter Punkt von M*, wenn es ein $\rho > 0$ mit $K_\rho(\boldsymbol{a}) \cap M = \{\boldsymbol{a}\}$ gibt (d.h. $\boldsymbol{a} \in M$, und es gibt keine weiteren Punkte von M, die einen Anstand kleiner als ρ zu $\boldsymbol{a}$ haben). Ein isolierter Punkt ist auch ein Berührpunkt.
- *ein Häufungspunkt von M*, wenn für jedes $\rho > 0$ gilt: $K_\rho(\boldsymbol{a}) \cap M \neq \emptyset$ und $K_\rho(\boldsymbol{a}) \cap M \neq \{\boldsymbol{a}\}$ ($\iff$ $\boldsymbol{a}$ ist ein Berührpunkt von $M \setminus \{\boldsymbol{a}\}$); (d.h. beliebig nahe an $\boldsymbol{a}$ liegen Punkte von M, die ungleich $\boldsymbol{a}$ sind). Ein Häufungspunkt ist auch ein Berührpunkt von M.

Definition (4) (Fortsetzung)

- *ein Randpunkt von M*, wenn für jedes $\rho > 0$ gilt: $K_\rho(\boldsymbol{a}) \cap M \neq \emptyset$ und $K_\rho(\boldsymbol{a}) \cap M^c \neq \emptyset$ (d.h. beliebig nahe an $\boldsymbol{a}$ liegen sowohl Punkte von M als auch Punkte von M^c).
- *ein Berührpunkt von M*, wenn für jedes $\rho > 0$ gilt: $K_\rho(\boldsymbol{a}) \cap M \neq \emptyset$ (d.h. beliebig nahe an $\boldsymbol{a}$ liegen Punkte von M). Ist insbesondere $\boldsymbol{a} \in M$, so ist $\boldsymbol{a}$ ein Berührpunkt von M.
- *ein isolierter Punkt von M*, wenn es ein $\rho > 0$ mit $K_\rho(\boldsymbol{a}) \cap M = \{\boldsymbol{a}\}$ gibt (d.h. $\boldsymbol{a} \in M$, und es gibt keine weiteren Punkte von M, die einen Anstand kleiner als ρ zu $\boldsymbol{a}$ haben). Ein isolierter Punkt ist auch ein Berührpunkt.
- *ein Häufungspunkt von M*, wenn für jedes $\rho > 0$ gilt: $K_\rho(\boldsymbol{a}) \cap M \neq \emptyset$ und $K_\rho(\boldsymbol{a}) \cap M \neq \{\boldsymbol{a}\}$ ($\iff$ $\boldsymbol{a}$ ist ein Berührpunkt von $M \setminus \{\boldsymbol{a}\}$); (d.h. beliebig nahe an $\boldsymbol{a}$ liegen Punkte von M, die ungleich $\boldsymbol{a}$ sind).
  Ein Häufungspunkt ist auch ein Berührpunkt von M.

Definition (4) (Fortsetzung)

b) Die Menge

- $M^\circ := \{\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{a}$ ist innerer Punkt von $M\}$ heißt das *Innere von M* (oder: der *offene Kern von M*);
- $\overline{M} := \{\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{a}$ ist Berührpunkt von $M\}$ heißt die *abgeschlossene Hülle von M* (oder: der *Abschluss von M*).
- $\partial M := \{\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{a}$ ist Randpunkt von $M\}$ heißt der *Rand von M*;
- $M' := \{\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{a}$ ist Häufungspunkt von $M\}$ bezeichnet die Menge aller Häufungspunkte von M.

Definition (4) (Fortsetzung)

b) Die Menge

- $M^\circ := \{\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{a}$ ist innerer Punkt von $M\}$ heißt das *Innere von M* (oder: der *offene Kern von M*);
- $\overline{M} := \{\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{a}$ ist Berührpunkt von $M\}$ heißt die *abgeschlossene Hülle von M* (oder: der *Abschluss von M*).
- $\partial M := \{\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{a}$ ist Randpunkt von $M\}$ heißt der *Rand von M*;
- $M' := \{\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{a}$ ist Häufungspunkt von $M\}$ bezeichnet die Menge aller Häufungspunkte von M.

Definition (4) (Fortsetzung)

b) Die Menge

- *$M^\circ := \{\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{a}$ ist innerer Punkt von $M\}$ heißt das *Innere von M* (oder: der *offene Kern von M*);
- $\overline{M} := \{\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{a}$ ist Berührpunkt von $M\}$ heißt die *abgeschlossene Hülle von M* (oder: der *Abschluss von M*).
- $\partial M := \{\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{a}$ ist Randpunkt von $M\}$ heißt der *Rand von M*;
- $M' := \{\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{a}$ ist Häufungspunkt von $M\}$ bezeichnet die Menge aller Häufungspunkte von M.

Definition (4) (Fortsetzung)

b) Die Menge

- $M^\circ := \{\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{a}$ ist innerer Punkt von $M\}$ heißt das *Innere von M* (oder: der *offene Kern von M*);
- $\overline{M} := \{\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{a}$ ist Berührpunkt von $M\}$ heißt die *abgeschlossene Hülle von M* (oder: der *Abschluss von M*).
- $\partial M := \{\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{a}$ ist Randpunkt von $M\}$ heißt der *Rand von M*;
- $M' := \{\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{a}$ ist Häufungspunkt von $M\}$ bezeichnet die Menge aller Häufungspunkte von M.

Satz (2)

Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$.

a) Für ein $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ *ist genau eine der folgenden 3 Aussagen wahr:*

$\boldsymbol{a}$ ist ein *innerer Punkt* von M

$\boldsymbol{a}$ ist ein *äußerer Punkt* von M

$\boldsymbol{a}$ ist ein *Randpunkt* von M

Insbesondere gilt: $\mathbb{R}^n = M^\circ \,\dot\cup\, \partial M \,\dot\cup\, (M^c)^\circ$

b) $\partial M = \partial(M^c)$, *und jeder Randpunkt von* M *ist sowohl Berührpunkt von* M *als auch Berührpunkt von* M^c.

c) $\overline{M} = M' \,\dot\cup\, \{\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{a} \text{ ist isolierter Punkt von } M\} =$
$= M^\circ \,\dot\cup\, \partial M = M \cup \partial M$,
$M^\circ = M \setminus \partial M$, $\partial M = \overline{M} \setminus M^\circ$, $(\overline{M})^c = (M^c)^\circ$, $(M^\circ)^c = \overline{(M^c)}$

Satz (2) (Fortsetzung)

d) *Für einen Punkt* $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ *gilt:*

$\boldsymbol{a}$ *ist ein Berührpunkt von* M $\iff$ *es existiert eine Folge* $(\boldsymbol{a}_k)_{k\geq 1}$ *mit* $\boldsymbol{a}_k \in M$ *und* $\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{a}_k = \boldsymbol{a}$.

$\boldsymbol{a}$ *ist ein Häufungspunkt von* M $\iff$ *es existiert eine Folge* $(\boldsymbol{a}_k)_{k\geq 1}$ *mit* $\boldsymbol{a}_k \in M$, $\boldsymbol{a}_k \neq \boldsymbol{a}$ *und* $\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{a}_k = \boldsymbol{a}$.

Definition (5) (Eigenschaften von Mengen)

Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt

- *offen*, wenn $M^\circ = M$ gilt (d.h. jeder Punkt von M ist ein innerer Punkt von M).
- *abgeschlossen*, wenn $\overline{M} = M$ gilt (d.h. M enthält alle Berührpunkte von M).
- *beschränkt*, wenn $\{\|\boldsymbol{a}\| \mid \boldsymbol{a} \in M\} \subset \mathbb{R}$ beschränkt ist.
- *kompakt*, wenn M abgeschlossen und beschränkt ist.
- *eine Umgebung des Punktes $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$*, wenn $\boldsymbol{a} \in M^\circ$ ist ($\iff \exists \rho > 0\colon K_\rho(\boldsymbol{a}) \subset M$).

Definition (5) (Eigenschaften von Mengen)

Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt

- *offen*, wenn $M^\circ = M$ gilt (d.h. jeder Punkt von M ist ein innerer Punkt von M).
- *abgeschlossen*, wenn $\overline{M} = M$ gilt (d.h. M enthält alle Berührpunkte von M).
- *beschränkt*, wenn $\{\|\boldsymbol{a}\| \mid \boldsymbol{a} \in M\} \subset \mathbb{R}$ beschränkt ist.
- *kompakt*, wenn M abgeschlossen und beschränkt ist.
- *eine Umgebung des Punktes* $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$, wenn $\boldsymbol{a} \in M^\circ$ ist ($\iff \exists \rho > 0\colon K_\rho(\boldsymbol{a}) \subset M$).

Definition (5) (Eigenschaften von Mengen)

Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt

- *offen*, wenn $M^\circ = M$ gilt (d.h. jeder Punkt von M ist ein innerer Punkt von M).
- *abgeschlossen*, wenn $\overline{M} = M$ gilt (d.h. M enthält alle Berührpunkte von M).
- *beschränkt*, wenn $\{\|\boldsymbol{a}\| \mid \boldsymbol{a} \in M\} \subset \mathbb{R}$ beschränkt ist.
- *kompakt*, wenn M abgeschlossen und beschränkt ist.
- *eine Umgebung des Punktes $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$*, wenn $\boldsymbol{a} \in M^\circ$ ist ($\iff \exists \rho > 0\colon K_\rho(\boldsymbol{a}) \subset M$).

Definition (5) (Eigenschaften von Mengen)

Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt

- *offen*, wenn $M^\circ = M$ gilt (d.h. jeder Punkt von M ist ein innerer Punkt von M).
- *abgeschlossen*, wenn $\overline{M} = M$ gilt (d.h. M enthält alle Berührpunkte von M).
- *beschränkt*, wenn $\{\|\boldsymbol{a}\| \mid \boldsymbol{a} \in M\} \subset \mathbb{R}$ beschränkt ist.
- *kompakt*, wenn M abgeschlossen und beschränkt ist.
- *eine Umgebung des Punktes $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$*, wenn $\boldsymbol{a} \in M^\circ$ ist ($\iff \exists \rho > 0 \colon K_\rho(\boldsymbol{a}) \subset M$).

Definition (5) (Eigenschaften von Mengen)

Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt

- *offen*, wenn $M^\circ = M$ gilt (d.h. jeder Punkt von M ist ein innerer Punkt von M).
- *abgeschlossen*, wenn $\overline{M} = M$ gilt (d.h. M enthält alle Berührpunkte von M).
- *beschränkt*, wenn $\{\|\boldsymbol{a}\| \mid \boldsymbol{a} \in M\} \subset \mathbb{R}$ beschränkt ist.
- *kompakt*, wenn M abgeschlossen und beschränkt ist.
- *eine Umgebung des Punktes $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$*, wenn $\boldsymbol{a} \in M^\circ$ ist ($\iff \exists \rho > 0$: $K_\rho(\boldsymbol{a}) \subset M$).

Satz (3)

a) *Es sei I eine nichtleere (Index-)Menge.*

Sind für alle $i \in I$ $\;M_i \subset \mathbb{R}^n$ offene Mengen, so ist

$$\bigcup_{i \in I} M_i \text{ offen und}$$

$$\text{- falls } I \text{ endlich ist - ist auch } \bigcap_{i \in I} M_i \text{ offen.}$$

Sind für alle $i \in I$ $\;M_i \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossene Mengen, so ist

$$\bigcap_{i \in I} M_i \text{ abgeschlossen und}$$

$$\text{- falls } I \text{ endlich ist - ist auch } \bigcup_{i \in I} M_i \text{ abgeschlossen.}$$

Satz (3) (Fortsetzung)

Für jede Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ gilt:

b) *M° ist eine offene Menge, und für jede offene Menge $U \subset M$ gilt: $U \subset M^\circ$;*
d.h.: M° ist die größte in M enthaltene, offene Menge.

$\overline{M}$ ist eine abgeschlossene Menge, und für jede abgeschlossene Menge $A \supset M$ gilt: $A \supset \overline{M}$;
d.h.: $\overline{M}$ ist die kleinste abgeschlossene Menge, welche M enthält.

c) *M ist genau dann abgeschlossen, wenn für jede konvergente Folge $(\boldsymbol{a}_k)_{k\geq 1}$ mit $\boldsymbol{a}_k \in M$ gilt: $\lim\limits_{k\to\infty} \boldsymbol{a}_k \in M$.*

d) (Bolzano-Weierstraß-Charakterisierung von „kompakt")
M ist genau dann kompakt, wenn jede Folge in M einen Häufungswert in M besitzt.

3.5 Stetige Funktionen

Definition (6)

Es seien $n, m \in \mathbb{N}$, $\|\cdot\|$ bzw. $\|\cdot\|'$ Normen auf $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{R}^m$, $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}^n$ und $f\colon D \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion.

a) f heißt *stetig im Punkt $\boldsymbol{a} \in D$*, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, sodass für alle $\boldsymbol{x} \in D$ mit $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\| < \delta$ gilt:

$$\|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{a})\|' < \varepsilon.$$

b) f heißt *stetig (auf D)*, wenn f in jedem Punkt $\boldsymbol{a} \in D$ stetig ist.

c) f heißt *Lipschitz-stetig*, wenn es ein $L \in [0, \infty)$ gibt, sodass für alle $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}' \in D$ gilt:

$$\|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}')\|' \leq L \cdot \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'\|$$

Satz (4)

Es seien $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}^n$ und $f\colon D \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion.

a) *Für einen Punkt $\boldsymbol{a} \in D$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *f ist stetig in $\boldsymbol{a}$.*

(ii) *Zu jeder Umgebung V von $f(\boldsymbol{a})$ im $\mathbb{R}^m$ gibt es eine Umgebung U von $\boldsymbol{a}$ im $\mathbb{R}^n$ mit $f(U \cap D) \subset V$.*

(iii) *Für jede Folge $(\boldsymbol{x}_k)_{k \geq 1}$ in D mit $\lim\limits_{k\to\infty} \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{a}$ gilt:*

$$\lim_{k\to\infty} f(\boldsymbol{x}_k) = f(\boldsymbol{a})$$

(iv) *Für jedes $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ ist die j-te Komponentenfunktion von f, $f_j : D \to \mathbb{R}$, stetig im Punkt $\boldsymbol{a}$.*

b) Ist f Lipschitz-stetig, so ist f stetig (auf D).

Satz (4)

Es seien $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}^n$ und $f\colon D \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion.

a) *Für einen Punkt $\boldsymbol{a} \in D$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *f ist stetig in $\boldsymbol{a}$.*

(ii) *Zu jeder Umgebung V von $f(\boldsymbol{a})$ im $\mathbb{R}^m$ gibt es eine Umgebung U von $\boldsymbol{a}$ im $\mathbb{R}^n$ mit $f(U \cap D) \subset V$.*

(iii) *Für jede Folge $(\boldsymbol{x}_k)_{k\geq 1}$ in D mit $\lim\limits_{k\to\infty} \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{a}$ gilt:*

$$\lim_{k\to\infty} f(\boldsymbol{x}_k) = f(\boldsymbol{a})$$

(iv) *Für jedes $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ ist die j-te Komponentenfunktion von f, $f_j : D \to \mathbb{R}$, stetig im Punkt $\boldsymbol{a}$.*

b) *Ist f Lipschitz-stetig, so ist f stetig (auf D).*

Die Resultate von A1, §6.1 und §6.4, welche keine „reelle Spezialitäten" benötigen, lassen sich übertragen:

Satz (A1, §6, Satz 2.a)c))

Es seien $f, g : D \to \mathbb{R}^m$ stetig (im Punkt $\boldsymbol{a} \in D$) und $\lambda \in \mathbb{R}$.

a) *Dann sind auch $f \pm g$ und λf stetig (im Punkt $\boldsymbol{a}$).*

b) *Ist $g(D) \subset E$ und $h : E \to \mathbb{R}^p$ stetig (im Punkt $g(\boldsymbol{a})$), so ist auch $h \circ g$ stetig (im Punkt $\boldsymbol{a}$).*

A1, §6.4 Definitionen 4, 5 und Sätze 10, 11:

Definition von $\lim\limits_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{c}$, stetiger Fortsetzbarkeit und (be)hebbarer Unstetigkeitsstelle analog.

Sätze gelten in analoger Version (ohne reelle Spezialitäten).

Satz (5)

Es seien $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}^n$, $f\colon D \to \mathbb{R}^m$ *eine stetige Funktion und* $K \subset D$ *eine kompakte Teilmenge von* D.

a) *Dann ist auch* $f(K)$ *eine kompakte Menge.*
(„das stetige Bild einer kompakten Menge ist kompakt.")

b) *Ist* $m = 1$, *also* $f\colon D \to \mathbb{R}$ *eine stetige Funktion, so existieren* $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in K$ *mit* $f(\boldsymbol{x}_1) = \min f(K)$ *und* $f(\boldsymbol{x}_2) = \max f(K)$.
(„Eine stetige, reellwertige Funktion besitzt auf einer kompakten Menge ein (globales) Minimum und ein (globales) Maximum.")