ANALYSIS 2 für LAK

Kapitel 2: Integralrechnung in einer Variablen

MAB.03022UB Vorlesung im SS 2019

Günter LETTL

Institut für Mathematik und wissenschaftliches Rechnen
Karl-Franzens-Universität Graz

2.1 Das obere und das untere Integral

Definition (1)

Es sei $a < b \in \mathbb{R}$.

a) Eine endliche Menge von nicht ausgearteten, kompakten Intervallen

$$\mathcal{Z} = \{I_1, I_2, \ldots, I_n\}$$

heißt eine *Zerlegung des Intervalls $[a, b]$*, wenn

(Z1) $\bigcup_{j=1}^{n} I_j = [a, b]$ und

(Z2) für alle $1 \leq j < j' \leq n$ gilt: $\#(I_j \cap I_{j'}) \leq 1$.

Ist dies der Fall, so heißt

$$0 < \delta(\mathcal{Z}) = \max\{|I_j| \mid 1 \leq j \leq n\}$$

die *Feinheit der Zerlegung $\mathcal{Z}$*.

Definition (1) (Fortsetzung)

b) Es seien $\mathcal{Z} = \{I_1, I_2, \ldots, I_n\}$ und $\mathcal{Z}' = \{J_1, J_2, \ldots, J_m\}$ Zerlegungen von $[a, b]$.

$\mathcal{Z}'$ heißt *feiner als $\mathcal{Z}$* (Schreibweise: $\mathcal{Z} \prec \mathcal{Z}'$), wenn für alle $1 \leq l \leq m$ gilt: es existiert ein $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ mit $J_l \subset I_k$, d.h.: jedes Intervall von $\mathcal{Z}'$ ist in einem Intervall von $\mathcal{Z}$ enthalten.

Die Zerlegung

$$\mathcal{Z} * \mathcal{Z}' = \{I_k \cap J_l \mid 1 \leq k \leq n, 1 \leq l \leq m \text{ und } \#(I_k \cap J_l) > 1\}$$

heißt *die gemeinsame Verfeinerung von $\mathcal{Z}$ und $\mathcal{Z}'$*.

Definition (1) (Fortsetzung)

c) Es seien $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion und $\mathcal{Z} = \{I_1, I_2, \ldots, I_n\}$ eine Zerlegung von $[a,b]$. Dann heißen

$$\underline{S}(f,\mathcal{Z}) = \sum_{j=1}^{n} \inf\{f(x) \mid x \in I_j\} \cdot |I_j|$$

die (Darboux'sche) Untersumme von f bezüglich $\mathcal{Z}$ und

$$\overline{S}(f,\mathcal{Z}) = \sum_{j=1}^{n} \sup\{f(x) \mid x \in I_j\} \cdot |I_j|$$

die (Darboux'sche) Obersumme von f bezüglich $\mathcal{Z}$.

$$\underline{I}_a^b f = \sup\{\underline{S}(f,\mathcal{Z}) \mid \mathcal{Z} \text{ ist Zerlegung von } [a,b]\}$$

heißt *das untere Integral von f über [a,b]* und

$$\overline{I}_a^b f = \inf\{\overline{S}(f,\mathcal{Z}) \mid \mathcal{Z} \text{ ist Zerlegung von } [a,b]\}$$

heißt *das obere Integral von f über [a,b]*.

Lemma (1)

Es seien $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion und $\mathcal{Z}$, $\mathcal{Z}'$ Zerlegungen von $[a,b]$.

a) *Ist $\mathcal{Z} \prec \mathcal{Z}'$, so gilt:*

$$\underline{S}(f,\mathcal{Z}) \leq \underline{S}(f,\mathcal{Z}') \quad \textit{und} \quad \overline{S}(f,\mathcal{Z}') \leq \overline{S}(f,\mathcal{Z}) \ .$$

b) $\underline{S}(f,\mathcal{Z}) \leq \overline{S}(f,\mathcal{Z}')$.

c) $\underline{I}_a^b f \leq \overline{I}_a^b f$.

Satz (1)

Es seien $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion und $(\mathcal{Z}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zerlegungen von $[a,b]$ mit $\lim_{n\to\infty} \delta(\mathcal{Z}_n) = 0$ (d.h. eine ausgezeichnete Zerlegungsfolge). Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \underline{S}(f,\mathcal{Z}_n) = \underline{I}_a^b f \quad \textit{und} \quad \lim_{n\to\infty} \overline{S}(f,\mathcal{Z}_n) = \overline{I}_a^b f \ .$$

Lemma (1)

Es seien $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion und $\mathcal{Z}$, $\mathcal{Z}'$ Zerlegungen von $[a,b]$.

a) *Ist $\mathcal{Z} \prec \mathcal{Z}'$, so gilt:*

$$\underline{S}(f,\mathcal{Z}) \leq \underline{S}(f,\mathcal{Z}') \quad \text{und} \quad \overline{S}(f,\mathcal{Z}') \leq \overline{S}(f,\mathcal{Z}) \ .$$

b) $\underline{S}(f,\mathcal{Z}) \leq \overline{S}(f,\mathcal{Z}')$.

c) $\underline{I}_a^b f \leq \overline{I}_a^b f$.

Satz (1)

Es seien $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion und $(\mathcal{Z}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zerlegungen von $[a,b]$ mit $\lim_{n\to\infty} \delta(\mathcal{Z}_n) = 0$ (d.h. eine ausgezeichnete Zerlegungsfolge). Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \underline{S}(f,\mathcal{Z}_n) = \underline{I}_a^b f \qquad \text{und} \qquad \lim_{n\to\infty} \overline{S}(f,\mathcal{Z}_n) = \overline{I}_a^b f \ .$$

Lemma (2)

Es seien $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkte Funktionen. Dann gilt:

a) *Für alle $\lambda > 0$ ist* $\underline{I}_a^b(\lambda f) = \lambda \cdot \underline{I}_a^b f$ *und* $\overline{I}_a^b(\lambda f) = \lambda \cdot \overline{I}_a^b f$.

b) $\underline{I}_a^b(-f) = -\overline{I}_a^b f$ *und* $\overline{I}_a^b(-f) = -\underline{I}_a^b f$.

c) *Ist $f \le g$ auf $[a,b]$, d.h.: $\forall x \in [a,b] : f(x) \le g(x)$, so folgt*

$$\underline{I}_a^b f \le \underline{I}_a^b g \quad \text{und} \quad \overline{I}_a^b f \le \overline{I}_a^b g \ .$$

d) *Für $c \in \mathbb{R}$ mit $a < c < b$ gilt:*

$$\underline{I}_a^b f = \underline{I}_a^c f + \underline{I}_c^b f \quad \text{und} \quad \overline{I}_a^b f = \overline{I}_a^c f + \overline{I}_c^b f \ .$$

e)

$$\underline{I}_a^b f + \underline{I}_a^b g \le \underline{I}_a^b (f+g) \le \left\{ \begin{matrix} \underline{I}_a^b f + \overline{I}_a^b g \\ \overline{I}_a^b f + \underline{I}_a^b g \end{matrix} \right\} \le \overline{I}_a^b (f+g) \le \overline{I}_a^b f + \overline{I}_a^b g \ .$$

2.2 Das Riemann-Integral

Definition (2)

Es sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion.

a) Es sei $\mathcal{Z} = \{I_1, I_2, \ldots, I_n\}$ eine Zerlegung von $[a,b]$.
Dann heißen $B = \{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$, wobei für alle $1 \leq j \leq n \quad t_j \in I_j$, eine *Belegung zur Zerlegung $\mathcal{Z}$*, und

$$S(f, \mathcal{Z}, B) = \sum_{j=1}^{n} f(t_j) \cdot |I_j|$$

die *Riemann'sche Summe von f bezüglich $\mathcal{Z}$ zur Belegung B*.

b) f heißt *(Riemann-)integrierbar über $[a,b]$*, wenn

$$\underline{I}_a^b f = \overline{I}_a^b f$$

gilt.

Definition (2) (Fortsetzung)

Ist f integrierbar über $[a,b]$, so heißt

$$\int_a^b f = \int_a^b f(x)dx = \underline{I}_a^b f = \overline{I}_a^b f$$

das (Riemann-)Integral von f von a bis b (oder: *über $[a,b]$*).

$\mathcal{R}(a,b)$ bezeichne die Menge aller beschränkten Funktionen $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, welche (Riemann-)integrierbar über $[a,b]$ sind.

c) Ist $f \in \mathcal{R}(a,b)$, so definiert man

$$\int_b^a f = -\int_a^b f \quad \text{und} \quad \int_a^a f = 0 \, .$$

Satz (2) (Charakterisierung von integrierbaren Funktionen)

Es sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *eine beschränkte Funktion.*
Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

a) $f \in \mathcal{R}(a,b)$.

b) *Es existiert eine Folge von Zerlegungen* $(\mathcal{Z}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *von* $[a,b]$ *mit* $\lim_{n\to\infty} \delta(\mathcal{Z}_n) = 0$, *und es existiert ein* $A \in \mathbb{R}$, *sodass für jede beliebige Wahl von Belegungen* B_n *zu* $\mathcal{Z}_n$ *gilt:*

$$\lim_{n\to\infty} S(f,\mathcal{Z}_n,B_n) = A\ .$$

c) *Zu jedem* $\varepsilon > 0$ *existiert eine Zerlegung* $\mathcal{Z}$ *von* $[a,b]$ *mit*

$$\overline{S}(f,\mathcal{Z}) - \underline{S}(f,\mathcal{Z}) < \varepsilon$$

d) *Für alle* $c,d \in [a,b]$ *mit* $a \le c < d \le d$ *gilt:* $f \in \mathcal{R}(c,d)$.

Satz (2) (Fortsetzung)

e) (ohne Beweis) *Die Menge*

$$M_u = \{x \in [a, b] \mid f \text{ ist unstetig im Punkt } x\}$$

ist eine „Lebesgue-Nullmenge",
d.h. zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert eine Folge von offenen Intervallen $(J_n = (c_n, d_n))_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$M_u \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} |J_n| = \sum_{n=1}^{\infty} (d_n - c_n) < \varepsilon \ .$$

Satz (3) (Rechenregeln für das Integral)

Es sei $J \subset \mathbb{R}$ ein (beliebiges) Intervall und $f, g\colon J \to \mathbb{R}$ Funktionen, die über jedes kompakte Intervall $I \subset J$ integrierbar sind.
Dann gilt für alle $a, b, c \in J$ und für jedes kompakte Intervall $I \subset J$:

a) $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.

b) *Mit beliebigem $\alpha \in \mathbb{R}$ sind αf und $f + g$ integrierbar über I, und es gilt*

$$\int_a^b (\alpha f) = \alpha \int_a^b f \quad \text{und} \quad \int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g \,.$$

c) *f^2, $|f|$ und fg sind integrierbar über I.*

Satz (3) (Fortsetzung)

d) *Es sei* $a \leq b$.

i) *Gilt für alle* $x \in [a, b]$ $\ f(x) \leq g(x)$, *so ist* $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.

ii) *Mit* $i = \inf\{f(x) \mid a \leq x \leq b\}$ *und*
$s = \sup\{f(x) \mid a \leq x \leq b\}$ *gilt:*

$$i(b-a) \leq \int_a^b f \leq s(b-a), \quad \textit{und}$$

$$\exists\, c \in \mathbb{R} \quad \textit{mit } i \leq c \leq s \quad \textit{und} \quad \int_a^b f = c\,(b-a).$$

iii) $\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f| \leq (b-a) \cdot \sup\{|f(x)| \mid a \leq x \leq b\}$.

Korollar (1) (1. Mittelwertsatz der Integralrechnung)

Es seien $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *reelle Funktionen,* f *sei stetig auf* $[a,b]$*,* $g \in \mathcal{R}(a,b)$ *und* $g \geq 0$*.*

Dann existiert ein $\xi \in [a,b]$ *mit*

$$\int_a^b fg = f(\xi) \cdot \int_a^b g$$

Insbesondere gilt (mit $g = 1$*):*

es existiert ein $\xi \in [a,b]$ *mit* $\int_a^b f = f(\xi) \cdot (b-a)$

Satz (4)

Es sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *integrierbar.*

a) *Ist* $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *eine weitere Funktion und ist*

$$M = \{x \mid a \le x \le b \text{ und } f(x) \neq g(x)\}$$

endlich, so folgt $g \in \mathcal{R}(a,b)$ *und* $\int_a^b g = \int_a^b f$.

b) *Es sei* $f \ge 0$ *auf* $[a,b]$ *und* $\int_a^b f = 0$.
Ist f *stetig in* $x_0 \in [a,b]$, *so folgt* $f(x_0) = 0$.

Definition (3)

Es sei $J \subset \mathbb{R}$ ein (beliebiges) Intervall, $f\colon J \to \mathbb{R}$ sei auf jedem kompakten Intervall $I \subset J$ integrierbar und $c \in J$.
Dann heißt die Funktion

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_c(f)\colon J &\to \mathbb{R}\\ x &\mapsto \int_c^x f\end{aligned}$$

eine Integralfunktion von f.

Satz (5)

Es sei $J \subset \mathbb{R}$ ein (beliebiges) Intervall, $f\colon J \to \mathbb{R}$ sei auf jedem kompakten Intervall $I \subset J$ integrierbar und $c \in J$. Dann gilt:

a) *$\mathcal{I}_c(f)\colon J \to \mathbb{R}$ ist stetig auf J.*

b) (1. Version Hauptsatz)
Ist f stetig im Punkt $x_0 \in J$, so ist $\mathcal{I}_c(f)$ in x_0 differenzierbar, und es gilt

$$\mathcal{I}_c(f)'(x_0) = f(x_0).$$

c) *Für alle $a, b \in J$ gilt:*

$$\int_a^b f(x)dx = \mathcal{I}_c(f)(b) - \mathcal{I}_c(f)(a) \ .$$

Definition (4)

Es seien $D \subset \mathbb{R}$ mit $D \subset D'$, d.h. D besteht nur aus Häufungspunkten, und $f, F\colon D \to \mathbb{R}$ Funktionen.
Die Funktion F heißt *eine Stammfunktion von f (auf D)*, wenn F auf D differenzierbar ist und für alle $x \in D$ gilt:

$$F'(x) = f(x) \qquad \text{(Schreibweise: } F = \int f\text{)} .$$

Satz (6)

Es sei $J \subset \mathbb{R}$ ein (beliebiges) Intervall, $f, F, F_1\colon J \to \mathbb{R}$ Funktionen, und F sei eine Stammfunktion von f auf J. Dann gilt:

a) *F_1 ist eine Stammfunktion von f auf J genau dann, wenn es ein $c \in \mathbb{R}$ mit $F_1 = F + c$ gibt.*

b) (2. Version Hauptsatz)
Ist f integrierbar über $[a, b] \subset J$, so gilt

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) .$$

Definition (4)

Es seien $D \subset \mathbb{R}$ mit $D \subset D'$, d.h. D besteht nur aus Häufungspunkten, und $f, F\colon D \to \mathbb{R}$ Funktionen.
Die Funktion F heißt *eine Stammfunktion von f (auf D)*, wenn F auf D differenzierbar ist und für alle $x \in D$ gilt:

$$F'(x) = f(x) \qquad \text{(Schreibweise: } F = \int f) \; .$$

Satz (6)

Es sei $J \subset \mathbb{R}$ ein (beliebiges) Intervall, $f, F, F_1\colon J \to \mathbb{R}$ Funktionen, und F sei eine Stammfunktion von f auf J. Dann gilt:

a) *F_1 ist eine Stammfunktion von f auf J genau dann, wenn es ein $c \in \mathbb{R}$ mit $F_1 = F + c$ gibt.*

b) (2. Version Hauptsatz)
Ist f integrierbar über $[a, b] \subset J$, so gilt

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \; .$$

Satz (7) (Integration analytischer Funktionen)

Es seien $P = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *eine (komplexe) Potenzreihe mit Konvergenzradius* $\rho = \rho_P > 0$ *und*

$$P^* = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} \, z^{n+1} \ .$$

a) *Es gilt:* $\rho_{P^*} = \rho$.

b) *Ist* $z_0 \in \mathbb{C}$, $f\colon K_\rho(z_0) \to \mathbb{C}$ *definiert durch* $f(x) = P(x - z_0)$ *und* $c \in \mathbb{C}$, *so gibt es genau eine Funktion* $F\colon K_\rho(z_0) \to \mathbb{C}$ *mit* $F' = f$ *und* $F(z_0) = c$, *nämlich:*

$$F(x) = c + P^*(x - z_0)\,.$$

Satz (8) (Partielle Integration)

Es seien $f, g \colon D \to \mathbb{R}$ C^1*-Funktionen. Dann gilt:*

$$\int f'g = fg - \int fg' \ .$$

Insbesondere gilt für alle $[a, b] \subset D$*:*

$$\int_a^b f'g = fg(b) - fg(a) - \int_a^b fg'$$

Satz (9) (Substitutionsregel)

Es seien $t\colon D \to E \subset \mathbb{R}$ *eine* C^1*-Funktion,* $f, F\colon E \to \mathbb{R}$*,* F *sei eine Stammfunktion von* f *auf* E *und* f *sei stetig. Dann gilt:*

$$\int (f \circ t) \cdot t' = F \circ t$$

d.h. $F \circ t$ *ist eine Stammfunktion von* $(f \circ t)\, t'$ *auf* D*,*

und für alle $[a, b] \subset D$ *gilt:*

$$\int_a^b f(t(x)) \cdot t'(x) dx = F(t(b)) - F(t(a)) = \int_{t(a)}^{t(b)} f(t) dt \ .$$

Satz (10) (Integralform des Restglieds der Taylorentwicklung)

Es seien die Bezeichnungen und Voraussetzungen so wie in §1, Satz 3, und f sei eine C^{n+1}-Funktion.
Dann gilt:

$$R_n f(x_0; a) = \frac{1}{n!} \int_a^{x_0} (x_0 - t)^n f^{(n+1)}(t) dt \ .$$

2.5 Uneigentliche Integrale

Definition (5)

Es seien $a < b \in \overline{\mathbb{R}}$, J ein halboffenes oder offenes Intervall mit Randpunkten a, b und $f\colon J \to \mathbb{R}$ sei über jedes kompakte Teilintervall $I \subset J$ integrierbar.
Dann heißt (das Symbol) $\int_a^b f$ oder $\int_a^b f(x)dx$ ein *uneigentliches Integral*.

a) Es sei $J = [a, b)$. Existiert $\lim\limits_{\beta \nearrow b} \int_a^\beta f \in \mathbb{R}$ (bzw. $\in \{-\infty, \infty\}$), so heißt das uneigentliche Integral $\int_a^b f$ *konvergent* (bzw. *bestimmt divergent*), und man setzt

$$\int_a^b f = \lim_{\beta \nearrow b} \int_a^\beta f \in \overline{\mathbb{R}}\,.$$

Existiert obiger Grenzwert in $\overline{\mathbb{R}}$ nicht, so heißt $\int_a^b f$ *(unbestimmt) divergent* (Sprechweise: $\int_a^b f$ *existiert nicht*).

Definition (5) (Fortsetzung)

b) Es sei $J = (a, b]$. Existiert $\lim\limits_{\alpha \searrow a} \int_\alpha^b f \in \mathbb{R}$ (bzw. $\in \{-\infty, \infty\}$), so heißt das uneigentliche Integral $\int_a^b f$ *konvergent* (bzw. *bestimmt divergent*), und man setzt

$$\int_a^b f = \lim_{\alpha \searrow a} \int_\alpha^b f \in \overline{\mathbb{R}} \,.$$

Existiert obiger Grenzwert in $\overline{\mathbb{R}}$ nicht, so heißt $\int_a^b f$ *(unbestimmt) divergent* (Sprechweise: $\int_a^b f$ *existiert nicht*).

c) Es sei $J = (a, b)$. In diesem Fall definiert man mit einem $c \in J$

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f \,,$$

und man setzt $\int_a^b f = \lim\limits_{\alpha \searrow a} \int_\alpha^c f + \lim\limits_{\beta \nearrow b} \int_c^\beta f$, falls beide Limiten sowie deren Summe in $\overline{\mathbb{R}}$ existieren.

d) Das uneigentliche Integral $\int_a^b f$ heißt *absolut konvergent*, wenn $\int_a^b |f|$ konvergiert.

Satz (11)

Es seien $J = [a,b) \subset \mathbb{R}$ und $f, g\colon J \to \mathbb{R}$ seien auf jedem kompakten Intervall $I \subset J$ integrierbar.

a) *Ist $f \geq 0$, so existiert das uneigentliche Integral $\int_a^b f$, und es gilt*

$$\int_a^b f = \sup\left\{ \int_a^\beta f \;\middle|\; \beta \in [a,b) \right\} \in [0,\infty] \ .$$

b) (Majorantenkriterium)

Ist $|g| \leq f$ und $\int_a^b f < \infty$, so ist $\int_a^b g$ konvergent.

Insbesondere gilt:

Ist $\int_a^b g$ absolut konvergent, so ist $\int_a^b g$ auch konvergent.

Satz (12) (Integralkriterium für unendliche Reihen)

Es sei $f\colon [1,\infty) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ *eine monoton fallende und für alle kompakten Intervalle* $I \subset [1,\infty)$ *integrierbare Funktion.*
Dann gilt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k) < \infty \iff \int_1^{\infty} f < \infty \ .$$