ANALYSIS 2 für LAK

Kapitel 1: Differentialrechnung in einer Variablen (2. Teil)

MAB.03022UB Vorlesung im SS 2019

Günter LETTL

Institut für Mathematik und wissenschaftliches Rechnen
Karl-Franzens-Universität Graz

1.1 Wiederholung und Ergänzungen zur Analysis 1

Definition (1)

Es sei $M \subset \mathbb{C}$.

a) Ein Punkt $a \in \mathbb{C}$ heißt *ein Berührpunkt von M*, wenn es eine Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ mit $a_n \in M$ und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ gibt.
$\overline{M} = \{a \in \mathbb{C} \mid a \text{ ist ein Berührpunkt von } M\}$ heißt *der Abschluss* (oder: *die abgeschlossene Hülle*) *von M*.

b) Ein Punkt $a \in \mathbb{C}$ heißt *ein Häufungspunkt von M*, wenn es eine Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ mit $a_n \in M$, $\forall n \geq 1$: $a_n \neq a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ gibt.
$M' = \{a \in \mathbb{C} \mid a \text{ ist ein Häufungspunkt von } M\}$.

c) Ein Punkt $a \in M$ heißt *ein isolierter Punkt von M*, wenn $a \notin M'$.

Lemma (1)

Es sei $M \subset \mathbb{C}$.
Für einen Punkt $a \in \mathbb{C}$ sind folgende Aussagen äquivalent:

a) *a ist ein Häufungspunkt von M ($\iff a \in M'$).*

b) *a ist ein Berührpunkt von $M \setminus \{a\}$ ($\iff a \in \overline{M \setminus \{a\}}$).*

c) *Für jedes $\varepsilon > 0$ gilt: $\#\{x \in M \mid |x - a| < \varepsilon\} = \infty$.*

Definition (2)

Es seien $D \subset \mathbb{C}$, $f\colon D \to \mathbb{C}$ und $z_0 \in D'$ ein Häufungspunkt von D.

Die Funktion f heißt *im Punkt z_0 analytisch*, wenn es ein $\rho > 0$ und eine Potenzreihe $P = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ mit Konvergenzradius $\rho_P \geq \rho$ gibt, sodass für alle $x \in K_\rho(z_0) \cap D$ gilt:

$$f(x) = P(x - z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - z_0)^n \ .$$

f heißt *analytisch auf D*, wenn f in jedem Punkt $z_0 \in D$ analytisch ist.

Satz (1)

Es seien $P = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *eine Potenzreihe mit Konvergenzradius* $\rho > 0,\ z_0 \in \mathbb{C}$ *und*

$$\begin{aligned} f : K_\rho(z_0) &\to \mathbb{C} \\ x &\mapsto P(x - z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - z_0)^n \end{aligned}$$

die durch P *auf* $K_\rho(z_0)$ *definierte, analytische Funktion.*

Dann ist f *auf ganz* $K_\rho(z_0)$ *differenzierbar, und für jedes* $z \in K_\rho(z_0)$ *gilt:*

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n\, (z - z_0)^{n-1}.$$

1.2 Höhere Ableitungen und Taylorentwicklung

Definition (3)

Es sei $D \subset \mathbb{C}$ eine nicht leere Menge, die nur aus Häufungspunkten bestehe (d. h.: $\emptyset \neq D \subset D'$), $f : D \to \mathbb{C}$ eine Funktion und $n \in \mathbb{N}_0$.

a) f heißt (*auf* D) *n-mal differenzierbar*, wenn es Funktionen $f^{(0)} = f, f^{(1)}, f^{(2)}, \dots, f^{(n)} : D \to \mathbb{C}$ gibt, sodass für jedes j mit $0 \leq j < n$ gilt:

$f^{(j)}$ ist differenzierbar auf D und $f^{(j)\prime} = f^{(j+1)}$.

$f^{(j)}$ heißt die *j-te Ableitung von f*.

b) f heißt (*auf* D) *n-mal stetig differenzierbar* (oder: eine *C^n-Funktion auf D*), wenn f n-mal differenzierbar und $f^{(n)} : D \to \mathbb{C}$ stetig ist.

f heißt eine *C^∞-Funktion auf D* (oder: *beliebig oft differenzierbar*), wenn f für alle $n \in \mathbb{N}$ eine C^n-Funktion ist.

Definition (4)

Es sei $\emptyset \neq D \subset \mathbb{C}$ mit $D \subset D'$, $a \in D$, $f\colon D \to \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}_0$.

a) Ist f auf D n-mal differenzierbar, so heißt

$$T_n f(x; a) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(a)}{j!} (x-a)^j$$

das *n-te Taylorpolynom von f in a* (bzw. *im Entwicklungspunkt a*), und

$$R_n f(x; a) = f(x) - T_n f(x; a)$$

heißt das *n-te Restglied der Taylorentwicklung von f in a*.

Definition (4) (Fortsetzung)

b) Ist f eine C^∞-Funktion auf D, so heißt

$$Tf(x;a) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}(a)}{j!}(x-a)^j$$

die *Taylorsche Reihe von f in a*.

Gibt es ein $\rho > 0$, sodass für alle $x \in D \cap K_\rho(a)$ gilt:

$$f(x) = Tf(x;a) \ ,$$

so sagt man: *f wird in einer Umgebung von a durch seine Taylorreihe dargestellt* ($\Longleftrightarrow \forall x \in D \cap K_\rho(a) : \lim_{n\to\infty} R_n f(x;a) = 0$).

Satz (2)

Eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{C}$ wird in einer Umgebung von $z_0 \in D$ genau dann durch ihre Taylorreihe dargestellt, wenn f im Punkt z_0 analytisch ist.

Satz (3) (Restglied von Lagrange)

Es seien $c < d \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$, $f\colon [c,d] \to \mathbb{R}$ eine C^n-Funktion und $f^{(n)}$ sei auf (c,d) differenzierbar. Weiters seien $a, x_0 \in [c,d]$ mit $a \neq x_0$ und $I \subset [c,d]$ sei das offene Intervall mit Randpunkten a und x_0.

Dann existiert ein $\xi \in I$ mit

$$R_n f(x_0; a) = \frac{(x_0 - a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$$

Satz (2)

Eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{C}$ *wird in einer Umgebung von* $z_0 \in D$ *genau dann durch ihre Taylorreihe dargestellt, wenn* f *im Punkt* z_0 *analytisch ist.*

Satz (3) (Restglied von Lagrange)

Es seien $c < d \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$, $f\colon [c,d] \to \mathbb{R}$ *eine* C^n*-Funktion und* $f^{(n)}$ *sei auf* (c,d) *differenzierbar. Weiters seien* $a, x_0 \in [c,d]$ *mit* $a \neq x_0$ *und* $I \subset [c,d]$ *sei das offene Intervall mit Randpunkten* a *und* x_0.

Dann existiert ein $\xi \in I$ *mit*

$$R_n f(x_0; a) = \frac{(x_0 - a)^{n+1}}{(n+1)!}\, f^{(n+1)}(\xi)$$

1.3 Kurvendiskussion reeller Funktionen

Im gesamten Abschnitt sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall mit Randpunkten $a, b \in \overline{\mathbb{R}},\ a < b$.

Satz (4)

Es sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) differenzierbar. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

a) *f ist konvex auf I.*

b) *f' ist auf (a, b) monoton wachsend.*

c) *Für alle $x_0 \in (a, b)$ und für alle $x \in I$ gilt:*

$$f(x) \geq f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0).$$

Ist f auf (a, b) 2-mal differenzierbar, so ist eine weitere zu **a)**, **b)**, **c)** *äquivalente Aussage:*

d) *Für alle $x_0 \in (a, b)$ gilt: $f''(x_0) \geq 0$.*

Definition (5)

Eine Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ hat an der Stelle $x_0 \in (a,b)$ einen *Wendepunkt*, wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt, sodass
f konvex auf $(x_0-\varepsilon, x_0]$ und konkav auf $[x_0, x_0+\varepsilon)$ ist, oder
f konkav auf $(x_0-\varepsilon, x_0]$ und konvex auf $[x_0, x_0+\varepsilon)$ ist.

Satz (5)

Es sei $n \in \mathbb{N}$, $f\colon I \to \mathbb{R}$ sei eine C^n-Funktion (d. h.: n-mal stetig differenzierbar) und $x_0 \in (a,b)$.

a) *Ist $n \geq 2$ und x_0 ein Wendepunkt von f, so gilt $f''(x_0) = 0$.*

b) *Ist $n \geq 3$, $\quad 0 = f''(x_0) = f^{(3)}(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0)$ und $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, so gilt:*

x_0 ist ein Wendepunkt von f genau dann, wenn n ungerade ist.

Definition (5)

Eine Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ hat an der Stelle $x_0 \in (a, b)$ einen *Wendepunkt*, wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt, sodass
f konvex auf $(x_0 - \varepsilon, x_0]$ und konkav auf $[x_0, x_0 + \varepsilon)$ ist, oder
f konkav auf $(x_0 - \varepsilon, x_0]$ und konvex auf $[x_0, x_0 + \varepsilon)$ ist.

Satz (5)

Es sei $n \in \mathbb{N}$, $f\colon I \to \mathbb{R}$ sei eine C^n-Funktion (d. h.: n-mal stetig differenzierbar) und $x_0 \in (a, b)$.

a) *Ist $n \geq 2$ und x_0 ein Wendepunkt von f, so gilt $f''(x_0) = 0$.*

b) *Ist $n \geq 3$, $\quad 0 = f''(x_0) = f^{(3)}(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0)$ und $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, so gilt:*

x_0 ist ein Wendepunkt von f genau dann, wenn n ungerade ist.

Satz (6) (Hinreichendes Kriterium für lokale Extrema)

Es seien $n \in \mathbb{N}$, $f : I \to \mathbb{R}$ *n-mal stetig differenzierbar, und für* $x_0 \in (a, b)$ *sei*

$$0 = f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) \quad \text{und} \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0 \; .$$

Dann gilt:

f *hat an* x_0 *ein lokales* $\left\{ \begin{matrix} \text{Maximum} \\ \text{Minimum} \end{matrix} \right\}$ *genau dann, wenn* n *gerade und* $f^{(n)}(x_0) \begin{cases} < 0 \\ > 0 \end{cases}$ *ist.*