Skriptum zur ANALYSIS 2 für LAK

Günter Lettl SS 2019

§1. Differentialrechnung in einer Variablen (2. Teil)

1.1 Wiederholung und Ergänzungen zur Analysis 1

Definition 1. Es sei $M \subset \mathbb{C}$.

a) Ein Punkt $a \in \mathbb{C}$ heißt ein *Berührpunkt von* M, wenn es eine Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ mit $a_n \in M$ und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ gibt.

$\overline{M} = \{a \in \mathbb{C} \mid a$ ist ein Berührpunkt von $M\}$ heißt der *Abschluss* (oder: die *abgeschlossene Hülle*) *von* M.

b) Ein Punkt $a \in \mathbb{C}$ heißt ein *Häufungspunkt von* M, wenn es eine Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ mit $a_n \in M$, $\forall n \geq 1$: $a_n \neq a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ gibt.

$M' = \{a \in \mathbb{C} \mid a$ ist ein Häufungspunkt von $M\}$.

c) Ein Punkt $a \in M$ heißt ein *isolierter Punkt von* M, wenn $a \notin M'$.

Lemma 1. *Es sei $M \subset \mathbb{C}$. Für einen Punkt $a \in \mathbb{C}$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

a) *a ist ein Häufungspunkt von M ($\iff a \in M'$).*

b) *a ist ein Berührpunkt von $M \setminus \{a\}$ ($\iff a \in \overline{M \setminus \{a\}}$).*

c) *Für jedes $\varepsilon > 0$ gilt: $\#\{x \in M \mid |x-a| < \varepsilon\} = \infty$.*

Beispiel 1: Es sei $M = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$. Zeigen Sie: jeder Punkt von M ist ein Berührpunkt und ein isolierter Punkt von M. 0 ist ein Häufungspunkt von M, und $\overline{M} = M \cup \{0\}$.

Beispiel 2: Bestimmen Sie alle Berührpunket, Häufungspunkte und isolierten Punkte der Intervalle $[3,5)$ und $(10,+\infty)$.

Definition 2. Es seien $D \subset \mathbb{C}$, $f \colon D \to \mathbb{C}$ und $z_0 \in D'$ ein Häufungspunkt von D.
Die Funktion f heißt *im Punkt z_0 analytisch*, wenn es ein $\rho > 0$ und eine Potenzreihe $P = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ mit Konvergenzradius $\rho_P \geq \rho$ gibt, sodass für alle $x \in K_\rho(z_0) \cap D$ gilt:

$$f(x) = P(x - z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - z_0)^n \ .$$

f heißt *analytisch auf* D, wenn f in jedem Punkt $z_0 \in D$ analytisch ist.

Satz 1. *Es seien* $P = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *eine Potenzreihe mit Konvergenzradius* $\rho > 0,\ z_0 \in \mathbb{C}$ *und*

$$\begin{aligned} f : K_\rho(z_0) &\to \mathbb{C} \\ x &\mapsto P(x - z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - z_0)^n \end{aligned}$$

die durch P *auf* $K_\rho(z_0)$ *definierte, analytische Funktion.*
Dann ist f *auf ganz* $K_\rho(z_0)$ *differenzierbar, und für jedes* $z \in K_\rho(z_0)$ *gilt:*

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n\, (z - z_0)^{n-1}.$$

Beispiel 3: Verwenden Sie Satz 1 *und die Potenzreihendarstellungen für* exp, sin *und* cos, *um die Ableitungen dieser 3 Funktionen zu bestimmen!*

1.2 Höhere Ableitungen und Taylorentwicklung

Definition 3. Es sei $D \subset \mathbb{C}$ eine nicht leere Menge, die nur aus Häufungspunkten bestehe (d. h.: $\phi \neq D \subset D'$), $f : D \to \mathbb{C}$ eine Funktion und $n \in \mathbb{N}_0$.

a) f heißt (*auf* D) *n-mal differenzierbar*, wenn es Funktionen $f^{(0)} = f, f^{(1)}, f^{(2)}, \ldots, f^{(n)} : D \to \mathbb{C}$ gibt, sodass für jedes j mit $0 \leq j < n$ gilt:
$f^{(j)}$ ist differenzierbar auf D und $f^{(j)'} = f^{(j+1)}$. $f^{(j)}$ heißt die *j-te Ableitung von f*.

b) f heißt (*auf* D) *n-mal stetig differenzierbar* (oder: eine *C^n-Funktion auf* D), wenn f n-mal differenzierbar und $f^{(n)} : D \to \mathbb{C}$ stetig ist.
f heißt eine *C^∞-Funktion auf* D (oder: *beliebig oft differenzierbar*), wenn f für alle $n \in \mathbb{N}$ eine C^n-Funktion ist.

Beispiel 4: Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *sei gegeben durch* $f(x) = |x|^5$.
Zeigen Sie: f *ist auf* $\mathbb{R}$ *eine* C^4*-Funktion, aber keine* C^5*-Funktion. An welcher Stelle ist* $f^{(4)}$ *nicht differenzierbar?*

Definition 4. Es sei $\phi \neq D \subset \mathbb{C}$ mit $D \subset D',\ a \in D,\ f\colon D \to \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}_0$.

a) Ist f auf D n-mal differenzierbar, so heißt

$$T_n f(x; a) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(a)}{j!}\,(x - a)^j$$

das *n-te Taylorpolynom von f in a* (bzw. *im Entwicklungspunkt a*), und

$$R_n f(x; a) = f(x) - T_n f(x; a)$$

heißt das *n-te Restglied der Taylorentwicklung von f in a*.

b) Ist f eine C^∞-Funktion auf D, so heißt

$$Tf(x;a) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}(a)}{j!}\,(x-a)^j$$

die *Taylorsche Reihe von f in a.*
Gibt es ein $\rho > 0$, sodass für alle $x \in D \cap K_\rho(a)$ gilt: $f(x) = Tf(x;a)$, so sagt man:
f wird in einer Umgebung von a durch seine Taylorreihe dargestellt
$(\Longleftrightarrow \forall x \in D \cap K_\rho(a) : \lim\limits_{n\to\infty} R_n f(x;a) = 0)$.

Satz 2. *Eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{C}$ wird in einer Umgebung von $z_0 \in D$ genau dann durch ihre Taylorreihe dargestellt, wenn f im Punkt z_0 analytisch ist.*

Beispiel 5: Geben Sie für die rationale Funktion $f(x) = \frac{1}{x+1}$ alle Ableitungen $f^{(n)}$ an sowie die Taylorreihe $Tf(x;2)$ im Entwicklungspunkt $a = 2$.
Welchen Konvergenzradius hat $Tf(x;2)$?

Satz 3 (Restglied von Lagrange).
Es seien $c < d \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$, $f : [c,d] \to \mathbb{R}$ eine C^n-Funktion und $f^{(n)}$ sei auf (c,d) differenzierbar. Weiters seien $a, x_0 \in [c,d]$ mit $a \neq x_0$ und $I \subset [c,d]$ sei das offene Intervall mit Randpunkten a und x_0.
Dann existiert ein $\xi \in I$ mit

$$R_n f(x_0;a) = \frac{(x_0-a)^{n+1}}{(n+1)!}\, f^{(n+1)}(\xi)$$

Beispiel 6: Geben Sie für die Taylorentwicklung in Beispiel 5 *das n-te Restglied $R_n f(x_0;2)$ an, und zeigen Sie, dass für $x_0 \in [1,3]$ gilt: $|R_n f(x_0;2)| \leq 2^{-(n+2)}$.*

1.3 Kurvendiskussion reeller Funktionen

Im gesamten Abschnitt sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall mit Randpunkten $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$.

Satz 4. *Es sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a,b) differenzierbar. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

a) *f ist konvex auf I.*
b) *f' ist auf (a,b) monoton wachsend.*
c) *Für alle $x_0 \in (a,b)$ und für alle $x \in I$ gilt:*

$$f(x) \geq f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0).$$

Ist f auf (a,b) 2-mal differenzierbar, so ist eine weitere zu **a)**, **b)**, **c)** *äquivalente Aussage:*

d) *Für alle $x_0 \in (a,b)$ gilt: $f''(x_0) \geq 0$.*

Beispiel 7: Formulieren Sie den zu Satz 4 *analogen Satz für „konkav"!*

Beispiel 8: Stellen Sie fest, auf welchen Intervallen die Sinusfunktion monoton wächst bzw. fällt vgl. Analysis 1 bzw. auf welchen Intervallen sie konvex bzw. konkav ist!

Definition 5. Eine Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ hat an der Stelle $x_0 \in (a,b)$ einen *Wendepunkt*, wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt, sodass
f konvex auf $(x_0 - \varepsilon, x_0]$ und konkav auf $[x_0, x_0 + \varepsilon)$ ist, oder
f konkav auf $(x_0 - \varepsilon, x_0]$ und konvex auf $[x_0, x_0 + \varepsilon)$ ist.

Satz 5. *Es sei $n \in \mathbb{N}$, $f\colon I \to \mathbb{R}$ sei eine C^n-Funktion (d. h.: n-mal stetig differenzierbar) und $x_0 \in (a,b)$.*

a) *Ist $n \geq 2$ und x_0 ein Wendepunkt von f, so gilt $f''(x_0) = 0$.*

b) *Ist $n \geq 3$, $0 = f''(x_0) = f^{(3)}(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0)$ und $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, so gilt:*
x_0 ist ein Wendepunkt von f genau dann, wenn n ungerade ist.

Beispiel 9: Wählen Sie eine beliebige Polynomfunktion 3. Grades und bestimmen Sie alle Wendepunkte dieser Funktion!
Muss jede reelle Polynomfunktion 3. Grades einen Wendepunkt besitzen? Kann sie mehrere besitzen?
Beweisen Sie: Eine reelle Polynomfunktion 3. Grades besitzt auf $\mathbb{R}$ genau einen Wendepunkt!

Beispiel 10: Es sei $g = f'$ die Ableitung der Funktion aus Beispiel 4. *Wieso lässt sich mit* Satz 5 **nicht** *zeigen, dass 0 ein Wendepunkt von g ist?*
Können Sie mit Definition 5 *und* Satz 4 *zeigen, dass 0 ein Wendepunkt von g ist?*

Satz 6 (Hinreichendes Kriterium für lokale Extrema).
Es seien $n \in \mathbb{N}$, $f : I \to \mathbb{R}$ n-mal stetig differenzierbar, und für $x_0 \in (a,b)$ sei $0 = f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0)$ und $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Dann gilt:

$$f \text{ hat an } x_0 \text{ ein lokales } \left\{ \begin{array}{c} \textit{Maximum} \\ \textit{Minimum} \end{array} \right\} \text{ genau dann, wenn } n \text{ gerade und } f^{(n)}(x_0) \begin{cases} < 0 \\ > 0 \end{cases}$$

ist.

Beispiel 11: Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \frac{x}{2} + \sin x$. Bestimmen Sie alle Nullstellen, Extremwerte und Wendepunkte von f sowie die Steigungen der Tangenten in den Wendepunkten! Skizzieren Sie Graph(f)!

Beispiel 12: Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = x + \sin x$. Bestimmen Sie alle Nullstellen, Extremwerte und Wendepunkte von f sowie die Steigungen der Tangenten in den Wendepunkten! Skizzieren Sie Graph(f)!