ANALYSIS 1

Kapitel 8:
Differentialrechnung in einer Variablen (1. Teil)

MAB.01012UB MAT.101UB   Vorlesung im WS 2017/18

Günter LETTL

Institut für Mathematik und wissenschaftliches Rechnen
Karl-Franzens-Universität Graz

8.1 Die Ableitung einer Funktion

Definition (1)

Es sei $\emptyset \neq D \subset \mathbb{C}$ und $f : D \to \mathbb{C}$ eine Funktion.

a) Ist $x_0 \in D$ ein Häufungspunkt von D (d. h.: $x_0 \in D \cap D'$), so heißt die Funktion f *differenzierbar in x_0*, wenn der Grenzwert

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{C}$$

existiert.

Falls dieser Grenzwert existiert, heißt er *Ableitung* (oder: *Differentialquotient*) *von f in x_0*.

Schreibweise: $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0)$.

Definition (1) (Fortsetzung)

b) Besteht D nur aus Häufungspunkten (d.h: $D \subset D'$), so heißt f *differenzierbar auf D*, wenn f in jedem Punkt $x_0 \in D$ differenzierbar ist. Ist dies der Fall, so heißt

$$\begin{aligned} f'\colon D &\to \mathbb{C} \\ x &\mapsto f'(x) \end{aligned} \quad \text{die } \textit{Ableitung(sfunktion) von } f.$$

c) Ist f auf D differenzierbar und die Ableitung $f'\colon D \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion, so heißt f *stetig differenzierbar auf D*.

Lemma (1)

Ist $f\colon D \to \mathbb{C}$ in $x_0 \in D'$ differenzierbar, so ist f auch stetig in x_0.

Satz (1)

Es sei $P = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine (komplexe) Potenzreihe in z mit Konvergenzradius $\rho > 0$, $z_0 \in \mathbb{C}$ und

$$f : K_\rho(z_0) \to \mathbb{C}$$

$$x \mapsto P(x - z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - z_0)^n$$

die durch P auf $K_\rho(z_0)$ definierte, analytische Funktion.

Dann ist f auf ganz $K_\rho(z_0)$ differenzierbar, und es gilt für jedes $z \in K_\rho(z_0)$:

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n\, (z - z_0)^{n-1}.$$

Lemma (1)

Ist $f\colon D \to \mathbb{C}$ in $x_0 \in D'$ differenzierbar, so ist f auch stetig in x_0.

Satz (1)

Es sei $P = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine (komplexe) Potenzreihe in z mit Konvergenzradius $\rho > 0$, $z_0 \in \mathbb{C}$ und

$$f : K_\rho(z_0) \to \mathbb{C}$$

$$x \mapsto P(x - z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - z_0)^n$$

die durch P auf $K_\rho(z_0)$ definierte, analytische Funktion.

Dann ist f auf ganz $K_\rho(z_0)$ differenzierbar, und es gilt für jedes $z \in K_\rho(z_0)$:

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n\, (z - z_0)^{n-1}.$$

Korollar

Ist $f\colon D \to \mathbb{C}$ eine auf D analytische Funktion, so ist f auf D stetig differenzierbar und $f'\colon D \to \mathbb{C}$ ist wieder eine analytische Funktion.

Satz (2) (Rechenregeln für die Ableitung)

Es seien $D \subset \mathbb{C}$, $x_0 \in D \cap D'$, und $f, g : D \to \mathbb{C}$ seien differenzierbar in x_0. Dann gilt:

a) *Für $\lambda \in \mathbb{C}$ ist λf differenzierbar in x_0 und*

$$(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0).$$

b) *$f + g$, $f - g$, fg sind differenzierbar in x_0, und es gilt:*

$$(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$$

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0) \qquad \text{(Produktregel).}$$

Korollar

Ist $f\colon D \to \mathbb{C}$ eine auf D analytische Funktion, so ist f auf D stetig differenzierbar und $f'\colon D \to \mathbb{C}$ ist wieder eine analytische Funktion.

Satz (2) (Rechenregeln für die Ableitung)

Es seien $D \subset \mathbb{C}$, $x_0 \in D \cap D'$, und $f, g : D \to \mathbb{C}$ seien differenzierbar in x_0. Dann gilt:

a) *Für $\lambda \in \mathbb{C}$ ist λf differenzierbar in x_0 und*

$$(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0).$$

b) *$f + g$, $f - g$, fg sind differenzierbar in x_0, und es gilt:*

$$(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$$

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0) \qquad \textit{(Produktregel).}$$

Satz (2) (Fortsetzung)

c) *Ist* $g(x) \neq 0$ *für alle* $x \in D$*, so ist* $\frac{f}{g} : D \to \mathbb{C}$ *differenzierbar in* x_0 *und*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2} \qquad (\textit{Quotientenregel}).$$

Insbesondere gilt: $\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = \frac{-g'(x_0)}{g(x_0)^2}.$

Satz (3) (Kettenregel)

Es seien $D, E \subset \mathbb{C}$, $f : D \to \mathbb{C}$, $g : E \to \mathbb{C}$ *und* $f(D) \subset E$.
Ist f *im Punkt* $x_0 \in D$ *differenzierbar und* g *im Punkt* $y_0 = f(x_0) \in E$ *differenzierbar, so ist* $(g \circ f) : D \to \mathbb{C}$ *in* x_0 *differenzierbar und*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))\ f'(x_0)\ .$$

Satz (4) (Differentiation der Umkehrfunktion)

Es sei $f : D \to \mathbb{C}$ *injektiv, im Punkt* $x_0 \in D$ *differenzierbar und* $f'(x_0) \neq 0$.
Die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(D) \to D$ *sei im Punkt* $y_0 = f(x_0)$ *stetig. Dann gilt:*
y_0 *ist ein Häufungspunkt von* $f(D)$, f^{-1} *ist differenzierbar in* y_0 *und*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}\ .$$

Satz (3) (Kettenregel)

Es seien $D, E \subset \mathbb{C}$, $f : D \to \mathbb{C}$, $g : E \to \mathbb{C}$ *und* $f(D) \subset E$.
Ist f *im Punkt* $x_0 \in D$ *differenzierbar und* g *im Punkt* $y_0 = f(x_0) \in E$ *differenzierbar, so ist* $(g \circ f) : D \to \mathbb{C}$ *in* x_0 *differenzierbar und*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))\, f'(x_0)\ .$$

Satz (4) (Differentiation der Umkehrfunktion)

Es sei $f : D \to \mathbb{C}$ *injektiv, im Punkt* $x_0 \in D$ *differenzierbar und* $f'(x_0) \neq 0$.
Die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(D) \to D$ *sei im Punkt* $y_0 = f(x_0)$ *stetig. Dann gilt:*
y_0 *ist ein Häufungspunkt von* $f(D)$, f^{-1} *ist differenzierbar in* y_0 *und*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}\ .$$

Im gesamten Abschnitt sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall mit Randpunkten $a < b, \;\; a, b \in \overline{\mathbb{R}}$.

Definition (2)

Es sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion und $x_0 \in I$. Man sagt:

a) *f besitzt in x_0* ein *lokales* [bzw. *strenges lokales*] $\left\{ \begin{matrix} \textit{Maximum} \\ \textit{Minimum} \end{matrix} \right\}$,

wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt, sodass für alle $x \in I \cap (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ mit $x \neq x_0$ gilt:

$$\left\{ \begin{matrix} f(x) \leq f(x_0) \\ f(x) \geq f(x_0) \end{matrix} \right\} \quad \left[\text{bzw.} \left\{ \begin{matrix} f(x) < f(x_0) \\ f(x) > f(x_0) \end{matrix} \right\}\right].$$

Definition (2) (Fortsetzung)

b) f besitzt in x_0 ein *globales* $\left\{\begin{array}{c} \textit{Maximum} \\ \textit{Minimum} \end{array}\right\}$, wenn die entsprechende obige Ungleichung für alle $x \in I$ erfüllt ist

$$\left(\iff f(x_0) = \left\{\begin{array}{c} \max f(I) \\ \min f(I) \end{array}\right\}\right).$$

c) f besitzt in x_0 ein *lokales* bzw. *strenges lokales* bzw. *globales Extremum*, wenn f in x_0 ein ebensolches Maximum oder Minimum besitzt.

Lemma (2) (Notwendige Bedingung für lokale Extrema)

Es sei $x_0 \in (a, b)$ und $f\colon I \to \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar. Besitzt f in x_0 ein lokales Extremum, so gilt $f'(x_0) = 0$.

Definition (2) (Fortsetzung)

b) f besitzt in x_0 ein *globales* $\left\{\begin{matrix} \textit{Maximum} \\ \textit{Minimum} \end{matrix}\right\}$, wenn die entsprechende obige Ungleichung für alle $x \in I$ erfüllt ist

$$\left(\iff f(x_0) = \left\{\begin{matrix} \max f(I) \\ \min f(I) \end{matrix}\right\} \right).$$

c) f besitzt in x_0 ein *lokales* bzw. *strenges lokales* bzw. *globales Extremum*, wenn f in x_0 ein ebensolches Maximum oder Minimum besitzt.

Lemma (2) (Notwendige Bedingung für lokale Extrema)

Es sei $x_0 \in (a, b)$ und $f\colon I \to \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar. Besitzt f in x_0 ein lokales Extremum, so gilt $f'(x_0) = 0$.

Satz (5)

Es sei $I = [a, b]$ kompakt, $f\colon I \to \mathbb{R}$ stetig und für alle $x_0 \in (a, b)$ sei f differenzierbar in x_0.

a) (Satz von Rolle)
Ist $f(a) = f(b)$, so gibt es ein $\xi \in (a, b)$ mit $f'(\xi) = 0$.

b) (1. MWS = Mittelwertsatz der Differentialrechnung)
Es gibt ein $\xi \in (a, b)$ mit

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)\,.$$

Korollar

Es sei $f : I \to \mathbb{R}$ *stetig und differenzierbar auf* (a, b). *Dann gilt:*

f ist monoton $\begin{Bmatrix} \textit{wachsend} \\ \textit{fallend} \end{Bmatrix}$ *genau dann, wenn für jedes* $x_0 \in (a, b)$ *gilt:* $\begin{cases} f'(x_0) \geq 0 \\ f'(x_0) \leq 0 \end{cases}$.

Satz (6) (2. MWS = Verallgemeinerter MWS der Differentialrechnung)

Es sei $I = [a, b]$ *kompakt,* $f, g : I \to \mathbb{R}$ *stetige Funktionen, die auf* (a, b) *differenzierbar sind, und* $g'(x) \neq 0$ *für alle* $x \in (a, b)$. *Dann gilt* $g(a) \neq g(b)$, *und es existiert ein* $\xi \in (a, b)$ *mit*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Korollar

Es sei $f : I \to \mathbb{R}$ *stetig und differenzierbar auf* (a, b). *Dann gilt:*

$$f \text{ ist monoton } \begin{Bmatrix} \text{wachsend} \\ \text{fallend} \end{Bmatrix} \text{ genau dann, wenn für jedes } x_0 \in (a, b)$$

$$\text{gilt: } \begin{cases} f'(x_0) \geq 0 \\ f'(x_0) \leq 0 \end{cases}.$$

Satz (6) (2. MWS = Verallgemeinerter MWS der Differentialrechnung)

Es sei $I = [a, b]$ *kompakt,* $f, g : I \to \mathbb{R}$ *stetige Funktionen, die auf* (a, b) *differenzierbar sind, und* $g'(x) \neq 0$ *für alle* $x \in (a, b)$.
Dann gilt $g(a) \neq g(b)$, *und es existiert ein* $\xi \in (a, b)$ *mit*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} .$$

Satz (7) (Regel von de l'Hospital)

Es seien $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ *auf* (a, b) *differenzierbare Funktionen, für alle* $x \in (a, b)$ *sei* $g'(x) \neq 0$, *und weiters sei* $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ *(auch* $a = -\infty$ *möglich). Ist entweder*

(I) $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$ *oder* ***(II)*** $\lim_{x \to a} g(x) = \pm\infty$

erfüllt, so gilt:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \alpha \ .$$

Zusatz: *Der Satz gilt auch, wenn alle* $\lim_{x \to a}$ *durch* $\lim_{x \to b}$ *(auch* $b = +\infty$ *möglich) ersetzt werden.*