

§8. Differentialrechnung in einer Variablen, 1. Teil [Kö §9]

8.1 Die Ableitung einer Funktion

Definition 1. Es sei $\emptyset \neq D \subset \mathbb{C}$ und $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion.

a) Ist $x_0 \in D$ ein Häufungspunkt von D (d. h.: $x_0 \in D \cap D'$), so heißt die Funktion f *differenzierbar in x_0* , wenn der Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{C}$$

existiert. Falls dieser Grenzwert existiert, heißt er *Ableitung* (oder: *Differentialquotient*) von f in x_0 .

Schreibweise: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0)$.

b) Besteht D nur aus Häufungspunkten (d.h: $D \subset D'$), so heißt f *differenzierbar auf D* , wenn f in jedem Punkt $x_0 \in D$ differenzierbar ist. Ist dies der Fall, so heißt

$$\begin{aligned} f': D &\rightarrow \mathbb{C} \\ x &\mapsto f'(x) \end{aligned} \quad \text{die Ableitung(sfunktion) von } f.$$

c) Ist f auf D differenzierbar und die Ableitung $f': D \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Funktion, so heißt f *stetig differenzierbar auf D* .

Beispiel 91: Bestimmen Sie nur mit Hilfe von Definition 1.a) die Ableitung der Polynomfunktion $f(x) = x^2 - 3x + 7$ an der Stelle $x_0 = 0$. Gelingt Ihnen dasselbe für die Stelle $x_0 = 2$ bzw. $x_0 = i \in \mathbb{C}$? Können Sie die Ableitung an einer beliebigen Stelle $x_0 \in \mathbb{C}$ ebenfalls nur mit Definition 1.a) berechnen?

Beispiel 92: Zeigen Sie, dass die Funktion $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x}$, an der Stelle $x_0 = 0$ nicht differenzierbar ist. Skizzieren Sie $\text{Graph}(f)$ und deuten Sie das Ergebnis geometrisch!

Berechnen Sie die Ableitung von f an einer beliebigen Stelle $x_0 > 0$

(Tip: $(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = a - b$)

Lemma 1. Ist $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ in $x_0 \in D'$ differenzierbar, so ist f auch stetig in x_0 .

Satz 1. Es sei $P = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine (komplexe) Potenzreihe in z mit Konvergenzradius $\rho > 0$, $z_0 \in \mathbb{C}$ und

$$f: K_\rho(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$$

$$x \mapsto P(x - z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - z_0)^n$$

die durch P auf $K_\rho(z_0)$ definierte, analytische Funktion.

Dann ist f auf ganz $K_\rho(z_0)$ differenzierbar, und es gilt für jedes $z \in K_\rho(z_0)$:

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}.$$

Korollar. Ist $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ eine auf D analytische Funktion, so ist f auf D stetig differenzierbar und $f': D \rightarrow \mathbb{C}$ ist wieder eine analytische Funktion.

Satz 2 (Rechenregeln für die Ableitung).

Es seien $D \subset \mathbb{C}$, $x_0 \in D \cap D'$, und $f, g: D \rightarrow \mathbb{C}$ seien differenzierbar in x_0 . Dann gilt:

a) Für $\lambda \in \mathbb{C}$ ist λf differenzierbar in x_0 und $(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0)$.

b) $f + g$, $f - g$, fg sind differenzierbar in x_0 , und es gilt:

$$(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$$

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0) \quad (\text{Produktregel}).$$

c) Ist $g(x) \neq 0$ für alle $x \in D$, so ist $\frac{f}{g}: D \rightarrow \mathbb{C}$ differenzierbar in x_0 und

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2} \quad (\text{Quotientenregel}).$$

$$\text{Insbesondere gilt: } \left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = \frac{-g'(x_0)}{g(x_0)^2}.$$

Beispiel 93: Stellen Sie die rationale Funktion $f(x) = \frac{1}{1-x}$ im Entwicklungspunkt 0 als Potenzreihe dar und berechnen Sie $f'(x)$ auf 2 verschiedene Arten. Geben Sie damit Potenzreihendarstellungen für $\frac{1}{(1-x)^2}$ und $\frac{1}{(1+x)^2}$ an!

Satz 3 (Kettenregel).

Es seien $D, E \subset \mathbb{C}$, $f: D \rightarrow \mathbb{C}$, $g: E \rightarrow \mathbb{C}$ und $f(D) \subset E$.

Ist f im Punkt $x_0 \in D$ differenzierbar und g im Punkt $y_0 = f(x_0) \in E$ differenzierbar, so ist $(g \circ f): D \rightarrow \mathbb{C}$ in x_0 differenzierbar und

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) f'(x_0).$$

Satz 4 (Differentiation der Umkehrfunktion).

Es sei $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ injektiv, im Punkt $x_0 \in D$ differenzierbar und $f'(x_0) \neq 0$. Die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(D) \rightarrow D$ sei im Punkt $y_0 = f(x_0)$ stetig.

Dann gilt: y_0 ist ein Häufungspunkt von $f(D)$, f^{-1} ist differenzierbar in y_0 und

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Beispiel 94: Suchen Sie in Ihrem AHS/BHS-Lehrbuch die Kapitel über Differenzierbarkeit und lösen Sie diverse Übungsbeispiele zum Differenzieren (welche Ableitungsregeln verwenden Sie dabei?)

Beispiel 95: Wenden sie Satz 4 auf den konkreten Fall $f = f' = \exp$ und $D = \mathbb{R}$ an. Zeigen Sie auf diese Weise, dass \ln differenzierbar ist und bestimmen Sie nochmals \ln'

8.2 Differentialrechnung reeller Funktionen

Im gesamten Abschnitt sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall mit Randpunkten $a < b$, $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$.

Definition 2. Es sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine reelle Funktion und $x_0 \in I$. Man sagt:

a) f besitzt in x_0 ein lokales [bzw. strenges lokales] $\left\{ \begin{matrix} \text{Maximum} \\ \text{Minimum} \end{matrix} \right\}$, wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt, sodass für alle $x \in I \cap (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ mit $x \neq x_0$ gilt:

$$\left\{ \begin{matrix} f(x) \leq f(x_0) \\ f(x) \geq f(x_0) \end{matrix} \right\} \quad [\text{bzw.} \quad \left\{ \begin{matrix} f(x) < f(x_0) \\ f(x) > f(x_0) \end{matrix} \right\}].$$

b) f besitzt in x_0 ein globales $\left\{ \begin{matrix} \text{Maximum} \\ \text{Minimum} \end{matrix} \right\}$, wenn die entsprechende obige Ungleichung für alle $x \in I$ erfüllt ist ($\iff f(x_0) = \left\{ \begin{matrix} \max f(I) \\ \min f(I) \end{matrix} \right\}$).

c) f besitzt in x_0 ein lokales bzw. strenges lokales bzw. globales Extremum, wenn f in x_0 ein ebensolches Maximum oder Minimum besitzt.

Lemma 2 (Notwendige Bedingung für lokale Extrema).

Es sei $x_0 \in (a, b)$ und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar. Besitzt f in x_0 ein lokales Extremum, so gilt $f'(x_0) = 0$.

Beispiel 96: Die Funktion $f : [0, 5] \rightarrow \mathbb{R}$ sei gegeben durch $f(x) = |x - 2|$. Verwenden Sie Lemma 2 um festzustellen, an welchen Stellen $x_0 \in [0, 5]$ f **kein** lokales Extremum besitzen kann. Welche Stellen bleiben übrig?

Bestimmen Sie alle lokalen (bzw. globalen) Extrema der Funktion f auf $[0, 5]$!

Satz 5. Es sei $I = [a, b]$ kompakt, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und für alle $x_0 \in (a, b)$ sei f differenzierbar in x_0 .

a) (**Satz von Rolle**) Ist $f(a) = f(b)$, so gibt es ein $\xi \in (a, b)$ mit $f'(\xi) = 0$.

b) (**1. MWS = Mittelwertsatz der Differentialrechnung**)

Es gibt ein $\xi \in (a, b)$ mit

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi).$$

Beispiel 97: Zeigen Sie, dass der 1. MWS für die Funktion aus Beispiel 96 falsch ist (wieso?)!

Korollar. Es sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar auf (a, b) . Dann gilt:

f ist monoton $\left\{ \begin{array}{l} \text{wachsend} \\ \text{fallend} \end{array} \right\}$ genau dann, wenn für jedes $x_0 \in (a, b)$ gilt: $\left\{ \begin{array}{l} f'(x_0) \geq 0 \\ f'(x_0) \leq 0 \end{array} \right.$.

Beispiel 98: Wählen Sie sich eine reelle Polynomfunktion 3. Grades und bestimmen Sie deren lokale Extrema. Auf welchen Intervallen ist diese Funktion monoton wachsend bzw. fallend?

Satz 6 (2. MWS = Verallgemeinerter MWS der Differentialrechnung).

Es sei $I = [a, b]$ kompakt, $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen, die auf (a, b) differenzierbar sind, und $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$.

Dann gilt $g(a) \neq g(b)$, und es existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Satz 7 (Regel von de l'Hospital).

Es seien $f, g: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ auf (a, b) differenzierbare Funktionen, für alle $x \in (a, b)$ sei $g'(x) \neq 0$, und weiters sei $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ (auch $a = -\infty$ möglich). Ist entweder

(I) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ oder (II) $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty$ erfüllt, so gilt:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \alpha.$$

Zusatz: Der Satz gilt auch, wenn alle $\lim_{x \rightarrow a}$ durch $\lim_{x \rightarrow b}$ (auch $b = +\infty$ möglich) ersetzt werden.

Beispiel 99: Zeigen Sie mit Hilfe der Regel von de l'Hospital, dass für $n \in \mathbb{N}$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$ und

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt[n]{x}} = 0$ gilt.