ANALYSIS 1

Kapitel 7:
Einige Typen von speziellen Funktionen

MAB.01012UB MAT.101UB   Vorlesung im WS 2017/18

Günter LETTL

Institut für Mathematik und wissenschaftliches Rechnen
Karl-Franzens-Universität Graz

7.1 Analytische Funktionen

Definition (1)

Es sei $D \subset \mathbb{C}$, $f \colon D \to \mathbb{C}$ und $z_0 \in D'$ ein Häufungspunkt von D.

Die Funktion f heißt *im Punkt z_0 analytisch*, wenn es ein $\rho > 0$ und eine Potenzreihe $P = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ mit Konvergenzradius $\rho_P \geq \rho$ gibt, sodass für alle $x \in K_\rho(z_0) \cap D$ gilt:

$$f(x) = P(x - z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - z_0)^n \,.$$

f heißt *analytisch auf D*, wenn f in jedem Punkt $z_0 \in D$ analytisch ist.

Satz (1)

a) *Ist* $f\colon D \to \mathbb{C}$ *analytisch im Punkt* $z_0 \in D$*, so ist* f *stetig in* z_0*.*

b) *Es sei* $P = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *eine Potenzreihe mit Konvergenzradius* $\rho = \rho_P \in (0, \infty]$ *und* $z_0 \in \mathbb{C}$*.*
Dann ist die Funktion

$$\begin{aligned} f\colon K_\rho(z_0) &\to \mathbb{C} \\ x &\mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - z_0)^n \end{aligned}$$

auf ganz $K_\rho(z_0)$ *analytisch.*

Satz (2)

a) *Es seien* $f, g\colon D \to \mathbb{C}$ *analytisch im Punkt* $z_0 \in D$.
Dann sind auch $f + g$, $f - g$ *und* fg *analytisch im Punkt* z_0.
Ist $g(z_0) \neq 0$, *so ist auch* $\frac{f}{g}$ *analytisch im Punkt* z_0.

b) *Ist* $f\colon D \to \mathbb{C}$ *analytisch im Punkt* $z_0 \in D$, $f(z_0) = w_0 \in \mathbb{C}$, $f(D) \subset E \subset \mathbb{C}$ *und ist* $g\colon E \to \mathbb{C}$ *analytisch im Punkt* w_0, *so ist auch* $g \circ f$ *analytisch im Punkt* z_0.

7.2 Exponentialfunktion und Logarithmus

Definition (2)

Die *Exponentialfunktion* $\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ wird definiert durch

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \,.$$

exp ist auf ganz $\mathbb{C}$ analytisch und somit auch auf ganz $\mathbb{C}$ stetig.

$$e := \exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 2{,}718281828459045235 36\ldots$$

heißt die *Eulersche Zahl*.

Satz (3)

a) (Fundamentallemma) *Es sei* $(z_n)_{n\geq 1}$ *eine konvergente Folge komplexer Zahlen mit* $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z \in \mathbb{C}$.

Dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z_n}{n}\right)^n = \exp(z)\ .$$

b) (Restgliedabschätzung für die exp-***Reihe)***

Für $z \in \mathbb{C}$ *mit* $|z| \leq 1$ *und* $N \in \mathbb{N}_0$ *gilt:*

$$\left|\exp(z) - \sum_{n=0}^{N} \frac{z^n}{n!}\right| \leq (e-1)\,\frac{|z|^{N+1}}{(N+1)!} \leq 2\,\frac{|z|^{N+1}}{(N+1)!} \leq \frac{2}{(N+1)!}\ .$$

Satz (4) (Eigenschaften von exp)

a) *Für beliebige $z, w \in \mathbb{C}$ und $x \in \mathbb{R}$ gilt:*

- ***(i)*** $\exp(z) \cdot \exp(w) = \exp(z + w)$
  Funktionalgleichung der Exponentialfunktion
- ***(ii)*** $\exp(z) \cdot \exp(-z) = \exp(0) = 1$;
  insbesondere ist $\exp(z) \neq 0$ *für alle* $z \in \mathbb{C}$.
- ***(iii)*** $\exp(x) \in \mathbb{R}_+$
- ***(iv)*** $|\exp(z)| = \exp(\Re(z))$; *insbesondere ist* $|\exp(ix)| = 1$.
- ***(v)*** $\displaystyle\lim_{z \to 0} \frac{\exp(z) - 1}{z} = 1$

b) *Für* $r \in \mathbb{Q}$ *gilt:* $\exp(r) = e^r$
(Schreibweise für $z \in \mathbb{C}$: $\exp(z) = e^z$ *)*

Reelle Spezialitäten der Exponentialfunktion

Satz (5)

a) *Die Funktion* $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ *ist streng monoton wachsend, analytisch (also auch stetig) und bijektiv.*

Definition: *Die Umkehrfunktion von* exp *heißt natürlicher Logarithmus:*

$$\exp^{-1} = \ln\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \ln(x).$$

b) (Wachstum von exp**)** *Für jedes* $n \in \mathbb{N}_0$ *gilt:*

$$\lim_{x\to-\infty} x^n e^x = 0 \quad \textit{und} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty\ ;$$

Insbesondere für $n = 0$*:* $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ *und* $\lim_{x\to\infty} e^x = \infty.$

Satz (6)

e ist irrational.

Definition (3)

Für $x \in \mathbb{R}_+$ und $z \in \mathbb{C}$ definiert man $x^z := \exp(z \ln(x))$.

Für reelles, positives $a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$ heißt die Funktion

$$\begin{aligned} a^z : \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto a^z \end{aligned}$$

die *allgemeine Exponentialfunktion zur Basis a*.

Für komplexes $b \in \mathbb{C}$ heißt die Funktion

$$\begin{aligned} x^b : \mathbb{R}_+ &\to \mathbb{C} \\ x &\mapsto x^b \end{aligned}$$

die *Potenzfunktion zum Exponenten b*.

Speziell gilt für $b \in \mathbb{R}$: $x^b : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ (*reelle Exponentialfunktion*)

Satz (6)

e ist irrational.

Definition (3)

Für $x \in \mathbb{R}_+$ und $z \in \mathbb{C}$ definiert man $x^z := \exp(z \ln(x))$.

Für reelles, positives $a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$ heißt die Funktion

$$\begin{aligned} a^z : \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto a^z \end{aligned}$$

die *allgemeine Exponentialfunktion zur Basis a*.

Für komplexes $b \in \mathbb{C}$ heißt die Funktion

$$\begin{aligned} x^b : \mathbb{R}_+ &\to \mathbb{C} \\ x &\mapsto x^b \end{aligned}$$

die *Potenzfunktion zum Exponenten b*.

Speziell gilt für $b \in \mathbb{R}$: $x^b : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ (*reelle Exponentialfunktion*)

Binomialreihe und Logarithmusreihe

Satz (7)

Für alle $x \in (-1, 1)$ *und alle* $s \in \mathbb{C}$ *gilt:*

$$(1+x)^s = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{s}{n} x^n =$$

$$= 1 + sx + \frac{s(s-1)}{2}x^2 + \frac{s(s-1)(s-2)}{6}x^3 + \ldots$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n =$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^7}{7} - \ldots$$

7.3 Trigonometrische Funktionen

Definition (4)

Für $z \in \mathbb{C}$ definiert man die *Cosinus-* bzw. *Sinusfunktion* durch

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad \text{bzw.} \quad \sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \ .$$

Für $z \in \mathbb{C}$ mit $\cos(z) \neq 0$ bzw. $\sin(z) \neq 0$ definiert man die *Tangens-* bzw. *Cotangensfunktion* durch

$$\tan(z) = \frac{\sin(z)}{\cos(z)} \quad \text{bzw.} \quad \cot(z) = \frac{\cos(z)}{\sin(z)} \ .$$

Satz (8)

Für beliebige $w, z \in \mathbb{C}$ gilt:

a) $e^{\pm iz} = \cos z \pm i \sin z$ *(Eulersche Formel)* *und*
$\cos^2 z + \sin^2 z = 1$.

b) $\cos(z+w) = \cos z \, \cos w - \sin z \, \sin w$
$\sin(z+w) = \sin z \, \cos w + \cos z \, \sin w$

c) $$\lim_{z \to 0} \frac{\sin z}{z} = 1$$

d) $$\cos z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \frac{z^8}{8!} - \dots$$

$$\sin z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \frac{z^9}{9!} - \dots$$

Reelle Spezialitäten der trigonometrischen Funktionen

1. Schritt: $\cos, \sin : \mathbb{R} \to [-1, 1]$

2. Schritt: Für $x \in (0, \sqrt{6}]$ gilt:

$$1 - \frac{x^2}{2} < \cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \quad \text{und} \quad 0 \leq x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x$$

3. Schritt: cos ist auf dem Intervall $[0, \sqrt{6}]$ streng monoton fallend und besitzt genau eine Nullstelle x_0 in diesem Intervall: $\cos(x_0) = 0$.

Die Zahl $2x_0 =: \pi$ wird mit Pi bezeichnet (*Definition von* π); es gilt also: $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$.

4. Schritt: (Spezielle Funktionswerte)

x	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
e^{ix}	i	-1	$-i$	1
$\sin x = \Im(e^{ix})$	1	0	-1	0
$\cos x = \Re(e^{ix})$	0	-1	0	1

5. Schritt: (Periodizität) Für jedes $z \in \mathbb{C}$ gilt:

$$e^{z+i\frac{\pi}{2}} = i\, e^z \qquad e^{z+i\pi} = -e^z \qquad e^{z+2\pi i} = e^z$$

$$\cos\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin z \qquad \cos(z+\pi) = -\cos z \qquad \cos(z+2\pi) = \cos z$$

$$\sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = \cos z \qquad \sin(z+\pi) = -\sin z \qquad \sin(z+2\pi) = \sin z$$

6. Schritt: (Nullstellen von $\exp - 1$, $\sin$ **und** $\cos$**)**

$$\{z \in \mathbb{C} \mid \exp(z) = 1\} = \{2k\pi i \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\{z \in \mathbb{C} \mid \cos(z) = 0\} = \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \middle| k \in \mathbb{Z}\right\}$$

$$\{z \in \mathbb{C} \mid \sin(z) = 0\} = \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

7. Schritt: Die Funktionen

$$\tan\colon \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R} \quad \cos\colon [0, \pi] \to [-1, 1] \quad \sin\colon \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$$

sind bijektiv.

Definition (5)

Die Umkehrfunktionen der Funktionen aus Schritt 7. heißen die *(Hauptzweige der) Arcusfunktionen*:

$$\arctan\colon \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$x \mapsto y = \arctan(x) \dots \text{ ist die Zahl } y \text{ mit } x = \tan(y).$$

$$\arccos\colon [-1, 1] \to [0, \pi]$$

$$\arcsin\colon [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Satz (9) (Polarkoordinaten komplexer Zahlen)

Jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ besitzt eine Darstellung

$$z = r \cdot e^{i\varphi} = r\cos\varphi + i\, r\sin\varphi$$

mit $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $\varphi \in \mathbb{R}$.

Ist $z \neq 0$, so ist $r \in \mathbb{R}_{+}$ eindeutig bestimmt, und φ ist bis auf ganzzahlige Vielfache von 2π eindeutig bestimmt.

***Definition**: Das Paar (r, φ) heißt Polarkoordinaten für z; r heißt der Betrag von z und φ heißt ein Argument für z.*

Korollar

a) (Parametrisierung des komplexen Einheitskreises)
Die Abbildung

$$
\begin{aligned}
f : [0, 2\pi) &\to S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} \\
\varphi &\mapsto e^{i\varphi}
\end{aligned}
$$

ist stetig und bijektiv.

b) (n-te Einheitswurzeln)
Für $n \in \mathbb{N}$ besitzt die Polynomfunktion $z^n - 1$ genau die n (paarweise verschiedenen) Nullstellen $e^{\frac{2\pi i k}{n}}$, $k \in \mathbb{N}$ und $1 \leq k \leq n$.

c) (Existenz von „n-ten Wurzeln" aus komplexen Zahlen)
Für $n \in \mathbb{N}$ und $c = r\, e^{i\varphi} \in \mathbb{C}$ besitzt die Polynomfunktion $z^n - c$ genau die Nullstellen

$$
\sqrt[n]{r}\, e^{i\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)}, \; 1 \leq k \leq n \, .
$$