§7. Einige Typen von speziellen Funktionen [Kö §8]

7.1 Analytische Funktionen [Kö §§7.3, 14.2]

Definition 1. Es sei $D \subset \mathbb{C}$, $f\colon D \to \mathbb{C}$ und $z_0 \in D'$ ein Häufungspunkt von D.
Die Funktion f heißt *im Punkt z_0 analytisch*, wenn es ein $\rho > 0$ und eine Potenzreihe $P = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ mit Konvergenzradius $\rho_P \geq \rho$ gibt, sodass für alle $x \in K_\rho(z_0) \cap D$ gilt:

$$f(x) = P(x - z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - z_0)^n \ .$$

f heißt *analytisch auf* D, wenn f in jedem Punkt $z_0 \in D$ analytisch ist.

Satz 1. a) *Ist $f\colon D \to \mathbb{C}$ analytisch im Punkt $z_0 \in D$, so ist f stetig in z_0.*

b) *Es sei $P = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $\rho = \rho_P \in (0, \infty]$ und $z_0 \in \mathbb{C}$. Dann ist die Funktion*

$$\begin{aligned} f\colon K_\rho(z_0) &\to \mathbb{C} \\ x &\mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - z_0)^n \end{aligned}$$

auf ganz $K_\rho(z_0)$ analytisch.

Beispiel 80: Stellen Sie die Polynomfunktion $f(x) = x^3 - 8$ als „Potenzreihe um den Punkt $z_0 = 2$” dar, d. h.: bestimmen Sie Koeffizienten a_i, sodass $f(x) = a_0 + a_1(x-2) + a_2(x-2)^2 + a_3(x-2)^3 + \dots$ gilt!

Beispiel 81: Geben Sie analog zum Beweis von Satz 1 *die „Umentwicklung der geometrischen Reihe in den Punkt $z_1 = 5$” an: $\frac{1}{1-x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n = b_0 + b_1(x-5) + b_2(x-5)^2 + b_3(x-5)^3 + \dots$*
Berechnen Sie einige der Koeffizienten b_i explizit!

Satz 2.

a) *Es seien $f, g\colon D \to \mathbb{C}$ analytisch im Punkt $z_0 \in D$. Dann sind auch $f + g$, $f - g$ und fg analytisch im Punkt z_0.*
Ist $g(z_0) \neq 0$, so ist auch $\frac{f}{g}$ analytisch im Punkt z_0.

b) *Ist $f\colon D \to \mathbb{C}$ analytisch im Punkt $z_0 \in D$, $f(D) \subset E \subset \mathbb{C}$ und ist $g\colon E \to \mathbb{C}$ analytisch im Punkt $w_0 = f(z_0) \in \mathbb{C}$, so ist auch $g \circ f$ analytisch im Punkt z_0.*

Beispiel 82: Lösen Sie Beispiel 81 *analog zum Beweis des Hilfslemmas zu* Satz 2*:*

$$\frac{1}{1-x} = \frac{1}{-4-(x-5)} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x-5}{-4}} = \dots$$

Geben Sie eine allgemeine Formel für die Koeffizienten b_i aus Beispiel 81 *an und überprüfen Sie damit Ihre frühere Rechnung!*

7.2 Exponentialfunktion und Logarithmus [Kö §§8.1-8.5]

Definition 2. Die *Exponentialfunktion* exp: $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ wird definiert durch

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \; .$$

exp ist auf ganz $\mathbb{C}$ analytisch und somit auch auf ganz $\mathbb{C}$ stetig.
$e := \exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 2,71828182845904523536\ldots$ heißt die *Eulersche Zahl.*

Satz 3. a) (Fundamentallemma) *Es sei $(z_n)_{n\geq 1}$ eine konvergente Folge komplexer Zahlen mit $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z \in \mathbb{C}$. Dann gilt:*

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z_n}{n}\right)^n = \exp(z) \; .$$

b) (Restgliedabschätzung für die exp**-Reihe)**
Für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \leq 1$ und $N \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\left| \exp(z) - \sum_{n=0}^{N} \frac{z^n}{n!} \right| \leq (e-1) \cdot \frac{|z|^{N+1}}{(N+1)!} \leq 2 \cdot \frac{|z|^{N+1}}{(N+1)!} \leq \frac{2}{(N+1)!} \; .$$

Satz 4. (Eigenschaften von exp**)**

a) *Für beliebige $z, w \in \mathbb{C}$ und $x \in \mathbb{R}$ gilt:*

- **(i)** $\exp(z) \cdot \exp(w) = \exp(z+w)$ *Funktionalgleichung der Exponentialfunktion*
- **(ii)** $\exp(z) \cdot \exp(-z) = \exp(0) = 1$; *insbesondere ist* $\exp(z) \neq 0$ *für alle* $z \in \mathbb{C}$.
- **(iii)** $\exp(x) \in \mathbb{R}_+$
- **(iv)** $|\exp(z)| = \exp(\Re(z))$; *insbesondere ist* $|\exp(ix)| = 1$.
- **(v)** $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{\exp(z)-1}{z} = 1$

b) *Für $r \in \mathbb{Q}$ gilt:* $\exp(r) = e^r$ *(Schreibweise auch für $z \in \mathbb{C}$: $\exp(z) = e^z$)*

Beispiel 83: Beweisen Sie, ausgehend von Satz 4.a)(i)(ii), mittels vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ und $z \in \mathbb{C}$ gilt: $\exp(-nz) = \frac{1}{(\exp(z))^n}$.

Reelle Spezialitäten der Exponentialfunktion

Satz 5. a) *Die Funktion* $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ *ist streng monoton wachsend, analytisch (also auch stetig) und bijektiv.*

Definition: Die Umkehrfunktion von exp heißt *natürlicher Logarithmus:*

$$\begin{aligned} \exp^{-1} = \ln\colon \mathbb{R}_+ &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \ln(x) \end{aligned} .$$

b) (Wachstum von $\exp$**)** *Für jedes* $n \in \mathbb{N}_0$ *gilt:*

$$\lim_{x \to -\infty} x^n e^x = 0 \qquad \textit{und} \qquad \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty \ ;$$

Insbesondere für $n = 0$*:* $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$ *und* $\lim_{x \to \infty} e^x = \infty$.

Beispiel 84: Fertigen Sie eine möglichst genaue Zeichnung des Graphen von $\exp\big|_{[-2,\,2]} : [-2, 2] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \exp(x)$*, an!*

Satz 6. e *ist irrational.*

Definition 3. Für $x \in \mathbb{R}_+$ und $z \in \mathbb{C}$ definiert man $x^z := \exp(z \ln(x))$.

Für reelles, positives $a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$ heißt die Funktion

$$\begin{aligned} a^z\colon \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto a^z \end{aligned}$$

die *allgemeine Exponentialfunktion zur Basis* a.

Für komplexes $b \in \mathbb{C}$ heißt die Funktion

$$\begin{aligned} x^b\colon \mathbb{R}_+ &\to \mathbb{C} \\ x &\mapsto x^b \end{aligned}$$

die *Potenzfunktion zum Exponenten* b.

Speziell gilt für $b \in \mathbb{R}$: $x^b\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *(reelle Exponentialfunktion)*

Beispiel 85: Für welche Basen a *ist die reelle Einschränkung der allgemeinen Exponentialfunktion* $a^z\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *monoton wachsend bzw. monoton fallend? Können Sie auch einen möglichst detaillierten Beweis für Ihre Antwort geben?*

Binomialreihe und Logarithmusreihe

Satz 7. *Für alle $x \in (-1, 1)$ und alle $s \in \mathbb{C}$ gilt:*

$$(1+x)^s = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{s}{n} x^n = 1 + sx + \frac{s(s-1)}{2!}x^2 + \frac{s(s-1)(s-2)}{3!}x^3 + \dots$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \dots$$

Beispiel 86: Welchen Wert hat die Binomialreihe $B_{\frac{1}{4}}\left(-\frac{369}{625}\right)$? Berechnen Sie die Partialsumme der ersten 3 (bzw. 4 bzw. 5) Summanden dieser Reihe. Wie gut ist die Approximation?

7.3 Trigonometrische Funktionen [Kö §§8.6-8.9]

Definition 4. Für $z \in \mathbb{C}$ definiert man die *Cosinus-* bzw. *Sinusfunktion* durch

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad \text{bzw.} \quad \sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} .$$

Für $z \in \mathbb{C}$ mit $\cos(z) \neq 0$ bzw. $\sin(z) \neq 0$ definiert man die *Tangens-* bzw. *Cotangensfunktion* durch

$$\tan(z) = \frac{\sin(z)}{\cos(z)} \quad \text{bzw.} \quad \cot(z) = \frac{\cos(z)}{\sin(z)} .$$

Satz 8. *Für beliebige $w, z \in \mathbb{C}$ gilt:*

a) $e^{\pm iz} = \cos z \pm i \sin z$ *(Eulersche Formel)* *und* $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$.

b) $\cos(z+w) = \cos z \, \cos w - \sin z \, \sin w$

$\sin(z+w) = \sin z \, \cos w + \cos z \, \sin w$

c) $\lim\limits_{z \to 0} \dfrac{\sin z}{z} = 1$

d) $\cos z = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \dfrac{z^{2k}}{(2k)!} = 1 - \dfrac{z^2}{2!} + \dfrac{z^4}{4!} - \dfrac{z^6}{6!} + \dfrac{z^8}{8!} - \dfrac{z^{10}}{10!} + \dots$

$\sin z = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \dfrac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = z - \dfrac{z^3}{3!} + \dfrac{z^5}{5!} - \dfrac{z^7}{7!} + \dfrac{z^9}{9!} - \dfrac{z^{11}}{11!} + \dots$

Reelle Spezialitäten der trigonometrischen Funktionen

1. Schritt: $\cos, \sin : \mathbb{R} \to [-1, 1]$

2. Schritt: Für $x \in (0, \sqrt{6}]$ gilt:

$$1 - \frac{x^2}{2} < \cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \quad \text{und} \quad 0 \le x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x$$

3. Schritt: cos ist auf dem Intervall $[0, \sqrt{6}]$ streng monoton fallend und besitzt genau eine Nullstelle x_0 in diesem Intervall: $\cos(x_0) = 0$.
Die Zahl $2x_0 =: \pi$ wird mit Pi bezeichnet (*Definition von* π); es gilt also: $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$.

4. Schritt: (Spezielle Funktionswerte)

x	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
e^{ix}	i	-1	$-i$	1
$\sin x = \Im(e^{ix})$	1	0	-1	0
$\cos x = \Re(e^{ix})$	0	-1	0	1

5. Schritt: (Periodizität) Für jedes $z \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\begin{array}{ccc} e^{z+i\frac{\pi}{2}} = i\, e^z & e^{z+i\pi} = -e^z & e^{z+2\pi i} = e^z \\ \cos\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin z & \cos(z+\pi) = -\cos z & \cos(z+2\pi) = \cos z \\ \sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = \cos z & \sin(z+\pi) = -\sin z & \sin(z+2\pi) = \sin z \end{array}$$

6. Schritt: (Nullstellen von $\exp - 1$**,** sin **und** cos**)**

$$\begin{aligned} \{z \in \mathbb{C} \mid \exp(z) = 1\} &= \{2k\pi i \mid k \in \mathbb{Z}\} \\ \{z \in \mathbb{C} \mid \cos(z) = 0\} &= \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \middle| k \in \mathbb{Z}\right\} \\ \{z \in \mathbb{C} \mid \sin(z) = 0\} &= \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

7. Schritt: Die Funktionen

$$\tan\colon \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R} \qquad \cos\colon [0, \pi] \to [-1, 1] \qquad \sin\colon \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$$

sind bijektiv.

Beispiel 87: Berechnen Sie aus Schritt 4. mit Hilfe von Satz 8.b) *die Werte* $\cos(\frac{\pi}{4})$ *und* $\sin(\frac{\pi}{4})$. *Wie können Sie mit Schritt 5. daraus die Werte* $\cos(\frac{k\pi}{4})$ *und* $\sin(\frac{k\pi}{4})$ *für* $k \in \{3, 5, 7\}$ *gewinnen? Machen Sie eine „Skizze am Einheitskreis"!*

Definition 5. Die Umkehrfunktionen der Funktionen aus Schritt 7. heißen die (*Hauptzweige der*) *Arcusfunktionen*:

$$\arctan\colon \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$x \mapsto y = \arctan(x) \;\ldots\ldots\; \text{ist die Zahl } y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \text{ mit } x = \tan(y).$$

$$\arccos\colon [-1,1] \to [0,\pi]$$

$$\arcsin\colon [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Satz 9. (Polarkoordinaten komplexer Zahlen)
Jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ besitzt eine Darstellung

$$z = r \cdot e^{i\varphi} = r\cos\varphi + i\, r\sin\varphi$$

mit $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $\varphi \in \mathbb{R}$.
Ist $z \neq 0$, so ist $r \in \mathbb{R}_+$ eindeutig bestimmt, und φ ist bis auf ganzzahlige Vielfache von 2π eindeutig bestimmt.
Definition: Das Paar (r,φ) heißt *Polarkoordinaten* für z; r heißt der *Betrag* von z und φ heißt ein *Argument* für z.

Beispiel 88: Wählen Sie einige konkrete komplexe Zahlen und geben Sie deren Polarkoordinaten an! Geben Sie auch die Polarkoordinaten für einige Produkte, Quadrate und Quotienten dieser Zahlen an!

Beispiel 89: Versuchen Sie, die Potenzfunktion zum Exponenten $i \in \mathbb{C}$, $x \mapsto x^i$ (vgl. Definition 3*) zu skizzieren!*

Korollar. a) (Parametrisierung des komplexen Einheitskreises) Die Abbildung

$$f : [0,2\pi) \to S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$$
$$\varphi \mapsto e^{i\varphi}$$

ist stetig und bijektiv.

b) (n-te Einheitswurzeln) Für $n \in \mathbb{N}$ besitzt die Polynomfunktion $z^n - 1$ genau die n (paarweise verschiedenen) Nullstellen $e^{\frac{2\pi i k}{n}}$, $k \in \mathbb{N}$ und $1 \leq k \leq n$.

c) (Existenz von „n-ten Wurzeln" aus komplexen Zahlen) Für $n \in \mathbb{N}$ und $c = r\, e^{i\varphi} \in \mathbb{C}$ besitzt die Polynomfunktion $z^n - c$ genau die Nullstellen

$$\sqrt[n]{r}\, e^{i(\frac{\varphi+2k\pi}{n})},\ 1 \leq k \leq n\ .$$

Beispiel 90: Geben Sie alle komplexen Nullstellen der Polynomfunktionen $z^6 - 2$, $z^4 + 81$ bzw. $z^8 - 256$ an, und skizzieren Sie diese in der komplexen Ebene!