ANALYSIS 1

Kapitel 6: Stetige Funktionen

MAB.01012UB MAT.101UB Vorlesung im WS 2017/18

Günter LETTL

Institut für Mathematik und wissenschaftliches Rechnen
Karl-Franzens-Universität Graz

6.1 Grundbegriffe der Stetigkeit

Definition (1)

Es sei $\emptyset \neq D \subset \mathbb{C}$ und $x_0 \in D$.

a) Eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{C}$ heißt *stetig im Punkt x_0*, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit folgender Eigenschaft gibt:

$$\text{für jedes } x \in D \text{ mit } |x - x_0| < \delta \text{ gilt: } \ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \ ;$$

andernfalls heißt f *unstetig im Punkt* x_0.

f heißt *stetig in D*, wenn f in jedem Punkt $x_0 \in D$ stetig ist.

b) Eine Teilmenge $U \subset D$ mit $x_0 \in U$ heißt *Umgebung von x_0 relativ zu D* (oder: *in D*), wenn es ein $\varepsilon > 0$ mit

$$K_\varepsilon(x_0) \cap D \subset U$$

gibt.

Satz (1)

Für eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{C}$ und ein $x_0 \in D$ sind folgende Aussagen äquivalent:

a) (ε-δ-Definition) *f ist stetig im Punkt x_0.*

b) (topologische Definition) *Zu jeder Umgebung V von $f(x_0)$ in $\mathbb{C}$ gibt es eine Umgebung U von x_0 in D mit*

$$f(U) \subset V \ .$$

c) (Definition mit Grenzwerten)
Für jede Folge $(x_n)_{n\geq 1}$ mit $x_n \in D$ und $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0) \ .$$

Satz (2)

Es seien $f, g\colon D \to \mathbb{C}$ Funktionen, die im Punkt $x_0 \in D$ stetig sind. Dann gilt:

a) *$f+g$, $f-g$ und fg sind im Punkt x_0 stetig.*

b) *Ist $g(x_0) \neq 0$, so ist $\frac{f}{g}$ in einer Umgebung von x_0 in D definiert und im Punkt x_0 stetig.*

*Hilfslemma zum Beweis von **b)**: Ist $g(x_0) \neq a \in \mathbb{C}$, so existiert ein $\delta > 0$ derart, dass für alle $x \in K_\delta(x_0) \cap D$ gilt: $g(x) \neq a$.*

c) *Ist $E \supset g(D)$ und $h\colon E \to \mathbb{C}$ stetig im Punkt $g(x_0)$, so ist $h \circ g$ stetig im Punkt x_0.*

Satz (3)

Es seien $a < b \in \mathbb{R}$, $f\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ *stetig und injektiv, und* $B = f([a,b])$.

Dann ist auch die Umkehrfunktion $f^{-1}\colon B \to [a,b]$ *stetig.*

Satz (4) (Zwischenwertsatz)

Es sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *eine stetige Funktion und* $\gamma \in \mathbb{R}$ *eine reelle Zahl zwischen* $f(a)$ *und* $f(b)$.

Dann gibt es ein $c \in [a,b]$ *mit* $f(c) = \gamma$.

6.2 Stetige reelle Funktionen

Satz (3)

Es seien $a < b \in \mathbb{R}$, $f\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ *stetig und injektiv, und* $B = f([a,b])$.

Dann ist auch die Umkehrfunktion $f^{-1}\colon B \to [a,b]$ *stetig.*

Satz (4) (Zwischenwertsatz)

Es sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *eine stetige Funktion und* $\gamma \in \mathbb{R}$ *eine reelle Zahl zwischen* $f(a)$ *und* $f(b)$.

Dann gibt es ein $c \in [a,b]$ *mit* $f(c) = \gamma$.

Korollar (1) (Fixpunktsatz)

Ist $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und $f([a, b]) \subset [a, b]$, so existiert ein $x_0 \in [a, b]$ mit

$$f(x_0) = x_0 \ .$$

(x_0 heißt dann ein Fixpunkt der Funktion f.)

Korollar (2) (Satz von der Intervalltreue)

Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$ stetig und nicht konstant. Dann ist $f(I)$ ein Intervall mit Randpunkten $c = \inf(f(I))$ und $d = \sup(f(I))$.

Korollar (3)

Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt:
f ist genau dann injektiv, wenn f streng monoton ist.

Korollar (1) (Fixpunktsatz)

Ist $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $f([a,b]) \subset [a,b]$, so existiert ein $x_0 \in [a,b]$ mit

$$f(x_0) = x_0 \ .$$

(x_0 heißt dann ein Fixpunkt der Funktion f.)

Korollar (2) (Satz von der Intervalltreue)

Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$ stetig und nicht konstant. Dann ist $f(I)$ ein Intervall mit Randpunkten $c = \inf(f(I))$ und $d = \sup(f(I))$.

Korollar (3)

Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt: f ist genau dann injektiv, wenn f streng monoton ist.

Korollar (1) (Fixpunktsatz)

Ist $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $f([a,b]) \subset [a,b]$, so existiert ein $x_0 \in [a,b]$ mit

$$f(x_0) = x_0 \ .$$

(x_0 heißt dann ein ***Fixpunkt*** *der Funktion f.)*

Korollar (2) (Satz von der Intervalltreue)

Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$ stetig und nicht konstant. Dann ist $f(I)$ ein Intervall mit Randpunkten $c = \inf(f(I))$ und $d = \sup(f(I))$.

Korollar (3)

Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt:
f ist genau dann injektiv, wenn f streng monoton ist.

6.3 Stetige Funktionen auf kompakten Mengen

Definition (2)

a) Ein Punkt $b \in \mathbb{C}$ heißt *Berührpunkt der Menge $B \subset \mathbb{C}$*, wenn es eine gegen b konvergente Folge $(b_n)_{n \geq 1}$ in B gibt
(d. h.: es gibt $b_n \in B$ mit $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = b$).

$\overline{B} := \{b \mid b \text{ ist Berührpunkt von } B\}$ heißt die *abgeschlossene Hülle von B*.

b) Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{C}$ heißt *abgeschlossen*, wenn für jede konvergente Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ in A gilt: $\lim\limits_{n \to \infty} a_n \in A$.

c) Eine Teilmenge $K \subset \mathbb{C}$ heißt *kompakt*, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist.

Satz (5)

a) *Die Vereinigung von endlich vielen abgeschlossenen [bzw. kompakten] Teilmengen von $\mathbb{C}$ ist abgeschlossen [bzw. kompakt].*

b) *Der Durchschnitt von (beliebig vielen) abgeschlossenen [bzw. kompakten] Teilmengen von $\mathbb{C}$ ist abgeschlossen [bzw. kompakt].*

c) *Ist $K \subset \mathbb{C}$ kompakt und $A \subset \mathbb{C}$ abgeschlossen, so ist $A \cap K$ kompakt.*

Satz (6) (Bolzano-Weierstraß-Charakterisierung von kompakt)

*Eine Teilmenge $K \subset \mathbb{C}$ ist genau dann kompakt, wenn jede Folge in K einen Häufungswert in K besitzt
(d. h.: eine Teilfolge besitzt, die gegen einen Punkt von K konvergiert).*

Satz (5)

a) *Die Vereinigung von endlich vielen abgeschlossenen [bzw. kompakten] Teilmengen von $\mathbb{C}$ ist abgeschlossen [bzw. kompakt].*

b) *Der Durchschnitt von (beliebig vielen) abgeschlossenen [bzw. kompakten] Teilmengen von $\mathbb{C}$ ist abgeschlossen [bzw. kompakt].*

c) *Ist $K \subset \mathbb{C}$ kompakt und $A \subset \mathbb{C}$ abgeschlossen, so ist $A \cap K$ kompakt.*

Satz (6) (Bolzano-Weierstraß-Charakterisierung von kompakt)

Eine Teilmenge $K \subset \mathbb{C}$ ist genau dann kompakt, wenn jede Folge in K einen Häufungswert in K besitzt
(d. h.: eine Teilfolge besitzt, die gegen einen Punkt von K konvergiert).

Satz (7)

Es sei $\emptyset \neq K \subset \mathbb{C}$ eine kompakte Menge, $f\colon K \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion und $B = f(K)$. Dann gilt:

a) *B ist kompakt.*

b) (Verallgemeinerung von Satz 3)
Ist f injektiv, so ist auch die Umkehrfunktion $f^{-1}\colon B \to K$ stetig.

Korollar (4) (Satz vom Minimum und Maximum reellwertiger Funktionen)

Ist $\emptyset \neq K \subset \mathbb{C}$ kompakt und $f\colon K \to \mathbb{R}$ stetig, so existieren $x_1, x_2 \in K$ mit

$$f(x_1) = \min f(K) \quad \textit{und} \quad f(x_2) = \max f(K)\,.$$

Satz (7)

Es sei $\emptyset \neq K \subset \mathbb{C}$ *eine kompakte Menge,* $f\colon K \to \mathbb{C}$ *eine stetige Funktion und* $B = f(K)$*. Dann gilt:*

a) *B ist kompakt.*

b) (Verallgemeinerung von Satz 3)
Ist f *injektiv, so ist auch die Umkehrfunktion* $f^{-1}\colon B \to K$ *stetig.*

Korollar (4) (Satz vom Minimum und Maximum reellwertiger Funktionen)

Ist $\emptyset \neq K \subset \mathbb{C}$ *kompakt und* $f\colon K \to \mathbb{R}$ *stetig, so existieren* $x_1, x_2 \in K$ *mit*

$$f(x_1) = \min f(K) \quad \text{und} \quad f(x_2) = \max f(K)\ .$$

Satz (8)

Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $f(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$ eine (komplexe, nicht konstante) Polynomfunktion. Dann gilt:

a) *Die Funktion $|f|$ besitzt auf $\mathbb{C}$ ein Minimum.*

b) *Für $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $f(z_0) \neq 0$ ist $|f(z_0)|$ kein Minimum von $|f|$.*

Korollar (5) (Fundamentalsatz der Algebra)

Jede nicht konstante Polynomfunktion f besitzt eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.

Satz (8)

Es sei $n \in \mathbb{N}$ *und* $f(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$ *eine (komplexe, nicht konstante) Polynomfunktion. Dann gilt:*

a) *Die Funktion* $|f|$ *besitzt auf* $\mathbb{C}$ *ein Minimum.*

b) *Für* $z_0 \in \mathbb{C}$ *mit* $f(z_0) \neq 0$ *ist* $|f(z_0)|$ *kein Minimum von* $|f|$.

Korollar (5) (Fundamentalsatz der Algebra)

Jede nicht konstante Polynomfunktion f *besitzt eine Nullstelle in* $\mathbb{C}$.

Definition (3)

Es sei $A \subset \mathbb{C}$.
Ein Punkt $a \in \mathbb{C}$ heißt *Häufungspunkt der Menge* A, wenn a ein Berührpunkt der Menge $A \setminus \{a\}$ ist (also $a \in \overline{A \setminus \{a\}} \iff$ $\exists$ Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ mit $a \neq a_n \in A$ und $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$).

$A' := \{a \in \mathbb{C} \mid a \text{ ist Häufungspunkt von } A\} \ldots$ die Menge aller Häufungspunkte von A.

Ein Punkt $a \in A$ heißt *isolierter Punkt von* A, wenn $a \notin A'$ gilt.

Satz (9)

Es sei $A \subset \mathbb{C}$ und $a \in \mathbb{C}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

a) *a ist ein Häufungspunkt der Menge A.*

b) *Jede Umgebung von a (in $\mathbb{C}$) enthält unendlich viele Elemente von A.*

c) *Für jedes $\varepsilon > 0$ gilt: $\#\{x \in A \mid |x - a| < \varepsilon\} = \infty$.*

Definition (4)

Es sei $D \subset \mathbb{C}$, $f \colon D \to \mathbb{C}$ eine Funktion, $a \in D'$ ein Häufungspunkt von D und $c \in \mathbb{C}$. Gilt für jede Folge $(x_n)_{n\geq 1}$ in $D \setminus \{a\}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, dass $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = c$ ist, so sagt man:

f hat bei Annäherung an a den Grenzwert c.

Schreibweise: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = c$

Satz (9)

Es sei $A \subset \mathbb{C}$ und $a \in \mathbb{C}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

a) *a ist ein Häufungspunkt der Menge A.*

b) *Jede Umgebung von a (in $\mathbb{C}$) enthält unendlich viele Elemente von A.*

c) *Für jedes $\varepsilon > 0$ gilt: $\#\{x \in A \mid |x - a| < \varepsilon\} = \infty$.*

Definition (4)

Es sei $D \subset \mathbb{C}$, $f \colon D \to \mathbb{C}$ eine Funktion, $a \in D'$ ein Häufungspunkt von D und $c \in \mathbb{C}$. Gilt für jede Folge $(x_n)_{n \geq 1}$ in $D \setminus \{a\}$ mit $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$, dass $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = c$ ist, so sagt man:

f hat bei Annäherung an a den Grenzwert c.

Schreibweise: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = c$

Definition (5) (Stetige Fortsetzbarkeit)

Es sei $f\colon D \to \mathbb{C}$ eine Funktion und $x_0 \in \mathbb{C}$.

a) Eine Funktion $g\colon D \cup \{x_0\} \to \mathbb{C}$ heißt *stetige Fortsetzung von f in den Punkt x_0*, wenn g im Punkt x_0 stetig ist und auf $D \setminus \{x_0\}$ mit f übereinstimmt (d. h.: für alle $x \in D \setminus \{x_0\}$: $f(x) = g(x)$).

b) Ist $x_0 \in D$, f im Punkt x_0 unstetig und existiert eine stetige Fortsetzung von f in den Punkt x_0, so heißt x_0 eine *„(be)hebbare Unstetigkeitsstelle von f"*.

Satz (10)

Für eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{C}$ und ein $x_0 \in D'$ gilt:
es existiert eine stetige Fortsetzung von f in den Punkt x_0 genau dann, wenn $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existiert.

Ist dies der Fall, so ist die stetige Fortsetzung von f in den Punkt x_0 eindeutig bestimmt.

Definition (5) (Stetige Fortsetzbarkeit)

Es sei $f\colon D \to \mathbb{C}$ eine Funktion und $x_0 \in \mathbb{C}$.

a) Eine Funktion $g\colon D \cup \{x_0\} \to \mathbb{C}$ heißt *stetige Fortsetzung von f in den Punkt x_0*, wenn g im Punkt x_0 stetig ist und auf $D \setminus \{x_0\}$ mit f übereinstimmt (d. h.: für alle $x \in D \setminus \{x_0\}$: $f(x) = g(x)$).

b) Ist $x_0 \in D$, f im Punkt x_0 unstetig und existiert eine stetige Fortsetzung von f in den Punkt x_0, so heißt x_0 eine „*(be)hebbare Unstetigkeitsstelle von f*".

Satz (10)

Für eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{C}$ und ein $x_0 \in D'$ gilt:
es existiert eine stetige Fortsetzung von f in den Punkt x_0 genau dann, wenn $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existiert.

Ist dies der Fall, so ist die stetige Fortsetzung von f in den Punkt x_0 eindeutig bestimmt.

Satz (11) (Rechenregeln für Grenzwerte)

Es seien $f, g\colon D \to \mathbb{C}$ Funktionen, $x_0 \in D'$ ein Häufungspunkt von D, und es sei $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$ und $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = b$ mit $a, b \in \mathbb{C}$.
Dann gilt:

a) $\lim\limits_{x \to x_0} (f \pm g)(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = a \pm b$ *und*

$\lim\limits_{x \to x_0} (fg)(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = ab$

b) *Falls $b \neq 0$, ist* $\lim\limits_{x \to x_0} (\frac{f}{g})(x) = \frac{a}{b}$

c) *Sind f, g reellwertig und gibt es eine Umgebung U von x_0 in $D \cup \{x_0\}$, sodass für alle $x \in U \setminus \{x_0\}$ $f(x) \leq g(x)$ gilt, so folgt $a \leq b$.*

d) *Es sei $h\colon E \to \mathbb{C}$ eine weitere Funktion mit $b \in E'$ und es gebe eine Umgebung U von x_0 in D mit $b \notin g(U \setminus \{x_0\})$.*
Existiert dann $\lim\limits_{y \to b} h(y) = c \in \mathbb{C}$, so gilt: $\lim\limits_{x \to x_0} (h \circ g)(x) = c$.

Reelle Spezialitäten für Grenzwerte von Funktionen

Definition (6)

a) (Grenzwerte in $\pm\infty$)

Es sei $D \subset \mathbb{R}$, $f\colon D \to \mathbb{C}$ eine Funktion und $c \in \mathbb{C}$.

Ist D nach $\begin{cases} \text{oben} \\ \text{unten} \end{cases}$ unbeschränkt und gilt für jede Folge $(x_n)_{n\geq 1}$ in D mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \begin{cases} \infty \\ -\infty \end{cases}$, dass $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = c$ ist, so sagt man:

f hat bei Annäherung an $\begin{cases} \infty \\ -\infty \end{cases}$ den Grenzwert c.

Schreibweise: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = c$ bzw. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = c$.

Definition (6) (Fortsetzung)

b) (Uneigentliche Grenzwerte)

Es sei $D \subset \mathbb{C}$, $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine reellwertige Funktion, $c \in \{-\infty, \infty\} \subset \overline{\mathbb{R}}$ und $x_0 \in D'$

(oder $x_0 = \begin{cases} \infty \\ -\infty \end{cases}$, falls $D \subset \mathbb{R}$ nach $\begin{cases} \text{oben} \\ \text{unten} \end{cases}$ unbeschränkt ist).

Gilt für jede Folge $(x_n)_{n\geq 1}$ in $D \setminus \{x_0\}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$, dass $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = c$ ist, so sagt man:

f strebt bei Annäherung an x_0 gegen $c \in \{-\infty, \infty\}$.

Definition (7) (Einseitige Grenzwerte, auch uneigentliche)

Es seien $D \subset \mathbb{R}$, $f \colon D \to \mathbb{C}$ und $x_0 \in D'$.
Weiters seien $D_l = D \cap (-\infty, x_0)$ und $D_r = D \cap (x_0, \infty)$.

a) Ist $x_0 \in \begin{cases} D_l' \\ D_r' \end{cases}$ und existiert $\left\{ \begin{matrix} \lim\limits_{x \to x_0} f|_{D_l}(x) = a_l \\ \lim\limits_{x \to x_0} f|_{D_r}(x) = a_r \end{matrix} \right\} \in \mathbb{C}$ oder $\overline{\mathbb{R}}$

[falls f reellwertig ist], so heißt dieser Wert der $\begin{cases} \textit{linksseitige} \\ \textit{rechtsseitige} \end{cases}$

Grenzwert von f in x_0.

Schreibweise:

$$\lim_{x \nearrow x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = a_l \quad \text{bzw.} \quad \lim_{x \searrow x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = a_r$$

Definition (7) (Fortsetzung)

b) Ist $x_0 \in D$ und gilt $\left\{\begin{array}{l} x_0 \notin D_l' \text{ oder } \lim\limits_{x \nearrow x_0} f(x) = f(x_0) \\ x_0 \notin D_r' \text{ oder } \lim\limits_{x \searrow x_0} f(x) = f(x_0) \end{array}\right\}$,

so heißt f $\left\{\begin{array}{l} \textit{linksseitig} \\ \textit{rechtsseitig} \end{array}\right.$ *stetig in* x_0.

x_0 heißt eine *Sprungstelle von* f, wenn f in x_0 unstetig ist, aber $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ und $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ existieren und endlich sind.