# §6. Stetige Funktionen [Kö §7]

## 6.1 Grundbegriffe der Stetigkeit [Kö §§7.1-7.2]

**Definition 1.** Es sei $\phi \neq D \subset \mathbb{C}$ und $x_0 \in D$.

**a)** Eine Funktion $f: D \to \mathbb{C}$ heißt *stetig im Punkt* $x_0$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit folgender Eigenschaft gibt:

$$\text{für jedes } x \in D \text{ mit } |x - x_0| < \delta \text{ gilt: } |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \text{ ;}$$

andernfalls heißt $f$ *unstetig im Punkt* $x_0$.
$f$ heißt *stetig in* $D$, wenn $f$ in jedem Punkt $x_0 \in D$ stetig ist.

**b)** Eine Teilmenge $U \subset D$ mit $x_0 \in U$ heißt *Umgebung von* $x_0$ *relativ zu* $D$ (oder: *in* $D$), wenn es ein $\varepsilon > 0$ mit $K_\varepsilon(x_0) \cap D \subset U$ gibt.

*Beispiel 62: Die Funktion $f: [-2, 2] \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$ (vgl. §2, Def. 2). Zeigen Sie, dass $f$ an der Stelle $x_0 = 0$ unstetig ist, an allen anderen Stellen $x_0 \in [-2, 2] \setminus \{0\}$ jedoch stetig ist. (Versuchen Sie,* Beispiel 1. *und* 2. *aus der Vorlesung nachzuahmen!)*

**Satz 1.** *Für eine Funktion $f: D \to \mathbb{C}$ und ein $x_0 \in D$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

**a) ($\varepsilon$-$\delta$-Definition)** *$f$ ist stetig im Punkt $x_0$.*

**b) (topologische Definition)** *Zu jeder Umgebung $V$ von $f(x_0)$ in $\mathbb{C}$ gibt es eine Umgebung $U$ von $x_0$ in $D$ mit $f(U) \subset V$.*

**c) (Definition mit Grenzwerten)**
*Für jede Folge $(x_n)_{n \geq 1}$ mit $x_n \in D$ und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$*

*Beispiel 63: Lösen Sie* Beispiel 62, *indem Sie die Stetigkeitsdefinition mit Grenzwerten (*Satz 1.c) *verwenden. Welche Lösungsmethode ist Ihnen sympathischer bzw. ist „schneller"?*

*Beispiel 64: Gegeben ist die Funktion $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ durch $f(z) = z^2$.*
*a) Berechnen Sie $w_0 = f(2 + i)$!*
*b) Es sei $V$ die Menge aller komplexen Zahlen, deren Abstand zu $w_0$ nicht größer als 1 ist. Geben Sie die Menge $V$ in mathematischer Schreibweise an. Ist $V$ eine Umgebung von $w_0$?*
*c) Geben Sie eine Umgebung $U$ von $2 + i$ an, für die $f(U) \subset V$ gilt.*
*Tipp: Wählen Sie für $U$ eine „genügend kleine" Kreisscheibe um $2 + i$.*

**Satz 2.** *Es seien $f, g: D \to \mathbb{C}$ Funktionen, die im Punkt $x_0 \in D$ stetig sind. Dann gilt:*

**a)** *$f + g$, $f - g$ und $fg$ sind im Punkt $x_0$ stetig.*

**b)** *Ist $g(x_0) \neq 0$, so ist $\frac{f}{g}$ in einer Umgebung von $x_0$ in $D$ definiert und im Punkt $x_0$ stetig.*

Hilfslemma zum Beweis von **b)**: *Ist $g(x_0) \neq a \in \mathbb{C}$, so existiert ein $\delta > 0$ derart, dass für alle $x \in K_\delta(x_0) \cap D$ gilt: $g(x) \neq a$.*

**c)** *Ist $E \supset g(D)$ und $h: E \to \mathbb{C}$ stetig im Punkt $g(x_0)$, so ist $h \circ g$ stetig im Punkt $x_0$.*

*Beispiel 65: a) Zeigen Sie mit Hilfe von Satz 1.c), dass die Identität ($z \mapsto z$) sowie jede konstante Funktion ($z \mapsto c$ für ein beliebig gewähltes $c \in \mathbb{C}$) als Funktion von $\mathbb{C}$ nach $\mathbb{C}$ stetig sind.*
*b) Verwenden Sie Teil a) und Satz 2 um zu zeigen, dass folgende Funktionen stetig sind:*

$$f_1 : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \qquad f_2 : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C} \qquad f_3 : \mathbb{C} \setminus \{1,3\} \to \mathbb{C}$$

$$z \mapsto z^2 - 3z + \tfrac{1}{2} \qquad z \mapsto z^4 - z^{-2} \qquad z \mapsto \frac{iz^2 - 7i + 2}{z^2 - 4z + 3}$$

## 6.2 Stetige reelle Funktionen [Kö §7.4]

**Satz 3.** *Es seien $a < b \in \mathbb{R}$, $f\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ stetig und injektiv, und $B = f([a,b])$. Dann ist auch die Umkehrfunktion $f^{-1}\colon B \to [a,b]$ stetig.*

*Beispiel 66: Gegeben ist die Funktion $f\colon [-1,1] \to \mathbb{C}$ mit $f(x) = (1+ix)^2$.*
*a) Überlegen Sie sich, wieso $f$ stetig ist.*
*b) Skizzieren Sie* Graph$(f)$ *und zeigen Sie, dass $f$ injektiv ist. Welche Information liefert* Satz 3 *für $f$?*
*c) Versuchen Sie, die Umkehrfunktion von $f$ anzugeben (schwierig?!).*

**Satz 4 (Zwischenwertsatz).**
*Es sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $\gamma \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl zwischen $f(a)$ und $f(b)$. Dann gibt es ein $c \in [a,b]$ mit $f(c) = \gamma$.*

*Beispiel 67: Für die Funktion aus* Beispiel 62 *sind sowohl die Voraussetzungen als auch die Behauptung des Zwischenwertsatzes (ZWS) falsch (machen Sie sich dies klar!).*
*Können Sie eine reelle Funktion angeben, die zwar die Voraussetzungen des ZWS nicht erfüllt, für die aber die Behauptung des ZWS wahr ist?*

**Korollar 1 (Fixpunktsatz).** Ist $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $f([a,b]) \subset [a,b]$, so existiert ein $x_0 \in [a,b]$ mit $f(x_0) = x_0$. ($x_0$ heißt dann ein *Fixpunkt* der Funktion $f$.)

**Korollar 2 (Satz von der Intervalltreue).**
Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$ stetig und nicht konstant. Dann ist $f(I)$ ein Intervall mit Randpunkten $c = \inf(f(I))$ und $d = \sup(f(I))$.

*Beispiel 68: Geben Sie eine konkrete (nicht konstante) reelle Funktion an, die die Voraussetzungen des Fixpunktsatzes erfüllt. Können Sie einen Fixpunkt dieser Funktion bestimmen? Weisen Sie nach, dass für diese Funktion auch die Aussage des Satzes von der Intervalltreue richtig ist!*

**Korollar 3.** Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt: $f$ ist genau dann injektiv, wenn $f$ streng monoton ist.

### 6.3 Stetige Funktionen auf kompakten Mengen [Kö §§7.5-7.6]

**Definition 2.**

**a)** Ein Punkt $b \in \mathbb{C}$ heißt *Berührpunkt der Menge* $B \subset \mathbb{C}$, wenn es eine gegen $b$ konvergente Folge $(b_n)_{n\geq 1}$ in $B$ gibt (d. h.: es gibt $b_n \in B$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$).

$\overline{B} := \{b \mid b$ ist Berührpunkt von $B\}$ heißt die *abgeschlossene Hülle von* $B$.

**b)** Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{C}$ heißt *abgeschlossen*, wenn für jede konvergente Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ in $A$ gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \in A$.

**c)** Eine Teilmenge $K \subset \mathbb{C}$ heißt *kompakt*, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist.

*Beispiel 69: Überlegen Sie sich, dass die Menge* $A = \{z \in \mathbb{C} \mid |\Re(z)| + |\Im(z)| < 1\}$ *ein Quadrat „ohne Randlinie" ist. Zeigen Sie, dass* $A$ *eine beschränkte Teilmenge von* $\mathbb{C}$ *ist.*
*Zeigen Sie, dass* $i$ *ein Berührpunkt von* $A$ *ist; ebenso* $-1, \frac{1}{2} - \frac{i}{2}, \ldots$
*Können Sie beweisen, dass für* $\overline{A}$*, die Menge aller Berührpunkte von* $A$*, gilt:*

$$\overline{A} = \{z \in \mathbb{C} \mid |\Re(z)| + |\Im(z)| \leq 1\} \ ?$$

*Wieso ist* $A$ *nicht kompakt,* $\overline{A}$ *jedoch schon?*

**Satz 5. a)** *Die Vereinigung von endlich vielen abgeschlossenen [bzw. kompakten] Teilmengen von* $\mathbb{C}$ *ist abgeschlossen [bzw. kompakt].*

**b)** *Der Durchschnitt von (beliebig vielen) abgeschlossenen [bzw. kompakten] Teilmengen von* $\mathbb{C}$ *ist abgeschlossen [bzw. kompakt].*

**c)** *Ist* $K \subset \mathbb{C}$ *kompakt und* $A \subset \mathbb{C}$ *abgeschlossen, so ist* $A \cap K$ *kompakt.*

*Beispiel 70: Können Sie eine Familie von abgeschlossenen Intervallen* $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *angeben, für die* $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n = (0,2)$ *[ bzw.* $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n = (0,2)$ *] gilt?*

**Satz 6 (Bolzano-Weierstraß-Charakterisierung von „kompakt").**
*Eine Teilmenge* $K \subset \mathbb{C}$ *ist genau dann kompakt, wenn jede Folge in* $K$ *einen Häufungswert in* $K$ *besitzt (d. h.: eine Teilfolge besitzt, die gegen einen Punkt von* $K$ *konvergiert).*

**Satz 7.** *Es sei* $\emptyset \neq K \subset \mathbb{C}$ *eine kompakte Menge,* $f\colon K \to \mathbb{C}$ *eine stetige Funktion und* $B = f(K)$*. Dann gilt:*

**a)** $B$ *ist kompakt.*

**b)** (Verallgemeinerung von Satz 3) *Ist* $f$ *injektiv, so ist auch die Umkehrfunktion* $f^{-1}\colon B \to K$ *stetig.*

**Korollar 4 (Satz vom Minimum und Maximum reellwertiger Funktionen).**
Ist $\emptyset \neq K \subset \mathbb{C}$ kompakt und $f\colon K \to \mathbb{R}$ stetig, so existieren $x_1, x_2 \in K$ mit

$$f(x_1) = \min f(K) \quad \text{ und } \quad f(x_2) = \max f(K)\ .$$

*Beispiel 71: Es sei* $A = \{(\frac{1}{3})^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.
*a) Warum ist die Menge* $A$ *nicht kompakt, die Menge* $B = A \cup [-1, 0]$ *jedoch schon?*
*b) Die reelle Funktion* $f\colon A \to \mathbb{R}$ *sei gegeben durch* $f(x) = \frac{1}{x}$. *Überlegen Sie sich, wieso* $f$ *in jedem Punkt von* $A$ *stetig ist.*
*Zeigen Sie, dass* $f(A)$ *nicht kompakt ist! (Wieso ist dies kein Widerspruch zu Satz 7.a)?)*
*Zeigen Sie, dass* $f$ *kein Maximum besitzt! (Wieso ist dies kein Widerspruch zu Korollar 4?)*

*Beispiel 72: Gegeben seien* $A = \overline{K_1(0)} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ *und die reellwertige Funktion* $f\colon A \to \mathbb{R}$, *definiert durch* $f(z) = \sqrt{\Re(z)^2 + \Im(z)^2}$.
*Erinnern Sie sich, dass in der Vorlesung gezeigt wurde, dass* $A$ *kompakt bzw.* $f$ *stetig ist?*
*Welche Information über die Funktion* $f$ *liefert Korollar 4?*
*Können Sie* $\min f(A)$ *bzw.* $\max f(A)$ *bestimmen?*

**Satz 8.** *Es sei* $n \in \mathbb{N}$ *und* $f(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$ *eine (komplexe, nicht konstante) Polynomfunktion. Dann gilt:*

- **a)** *Die Funktion* $|f|$ *besitzt auf* $\mathbb{C}$ *ein Minimum.*
- **b)** *Für* $z_0 \in \mathbb{C}$ *mit* $f(z_0) \neq 0$ *ist* $|f(z_0)|$ *kein Minimum von* $|f|$.

**Korollar 5 (Fundamentalsatz der Algebra).**
Jede nicht konstante Polynomfunktion $f$ besitzt eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.

### 6.4 Grenzwerte von Funktionen [Kö §§7.7-7.8]

**Definition 3.** Es sei $A \subset \mathbb{C}$. Ein Punkt $a \in \mathbb{C}$ heißt *Häufungspunkt der Menge* $A$, wenn $a$ ein Berührpunkt der Menge $A \setminus \{a\}$ ist
($\Longleftrightarrow a \in \overline{A \setminus \{a\}} \Longleftrightarrow \exists$ Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ mit $a \neq a_n \in A$ und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$).

$A' := \{a \in \mathbb{C} \mid a$ ist Häufungspunkt von $A\} \ldots$ die Menge aller Häufungspunkte von $A$.

Ein Punkt $a \in A$ heißt *isolierter Punkt von* $A$, wenn $a \notin A'$ gilt.

**Satz 9.** *Es sei* $A \subset \mathbb{C}$ *und* $a \in \mathbb{C}$. *Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

- **a)** $a$ *ist ein Häufungspunkt der Menge* $A$.
- **b)** *Jede Umgebung von* $a$ *(in* $\mathbb{C}$*) enthält unendlich viele Elemente von* $A$.
- **c)** *Für jedes* $\varepsilon > 0$ *gilt:* $\#\{x \in A \mid |x - a| < \varepsilon\} = \infty$.

*Beispiel 73: a) Die Menge $A$ sei gegeben wie in Beispiel 69. Überlegen Sie sich, dass jeder Berührpunkt von $A$ auch ein Häufungspunkt von $A$ ist. Bestimmen Sie $A'$, die Menge aller Häufungspunkte von $A$.*
*b) Jetzt sei die Menge $A$ so gegeben wie in Beispiel 71. Zeigen Sie, dass jeder Punkt von $A$ ein isolierter Punkt ist und dass der einzige Häufungspunkt von $A$ die Zahl 0 ist.*
*Welche der Mengen $A$, $A'$, $\overline{A}$ sind ineinander enthalten, welche nicht?*
*c) Die kompakte Menge $B$ sei so gegeben wie in Beispiel 71.a). Bestimmen Sie die Menge $B'$ aller Häufungspunkte von $B$. Überlegen Sie sich, dass $B' \subsetneqq B = \overline{B}$ gilt.*

**Definition 4.** Es sei $D \subset \mathbb{C}$, $f\colon D \to \mathbb{C}$ eine Funktion, $a \in D'$ ein Häufungspunkt von $D$ und $c \in \mathbb{C}$.

Gilt für jede Folge $(x_n)_{n\geq 1}$ in $D \setminus \{a\}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, dass $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = c$ ist,

so sagt man: *$f$ hat bei Annäherung an $a$ den Grenzwert $c$.*
Schreibweise: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = c$

*Beispiel 74: Die reelle Funktion $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch $f(x) = 2^k$, wobei $k \in \mathbb{Z}$ so gewählt sei, dass $2^k \leq x < 2^{k+1}$ (d. h.: $f(x)$ ist die größte (ganzzahlige) Potenz von 2, die nicht größer als $x$ ist).*
*Ist $f$ auf diese Weise sinnvoll definiert? Skizzieren Sie Graph($f$) bzw. machen Sie eine genaue Zeichnung des Graphen für $x \in [0,1;1,2]$ in einem geeigneten (großen) Maßstab.*
*Beschreiben Sie den Graphen von $f$ auch in Worten, und verwenden Sie dabei die linearen Funktionen $g_1(x) = x$ und $g_2(x) = x/2$.*
*Bestimmen Sie $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$!*

**Definition 5 (Stetige Fortsetzbarkeit).** Es sei $f\colon D \to \mathbb{C}$ eine Funktion und $x_0 \in \mathbb{C}$.

**a)** Eine Funktion $g\colon D \cup \{x_0\} \to \mathbb{C}$ heißt *stetige Fortsetzung von $f$ in den Punkt $x_0$*, wenn $g$ im Punkt $x_0$ stetig ist und auf $D \setminus \{x_0\}$ mit $f$ übereinstimmt (d. h.: für alle $x \in D \setminus \{x_0\}$: $f(x) = g(x)$).

**b)** Ist $x_0 \in D$, $f$ im Punkt $x_0$ unstetig und existiert eine stetige Fortsetzung von $f$ in den Punkt $x_0$, so heißt $x_0$ eine „*(be)hebbare Unstetigkeitsstelle von $f$*".

**Satz 10.** *Für eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{C}$ und ein $x_0 \in D'$ gilt: es existiert eine stetige Fortsetzung von $f$ in den Punkt $x_0$ genau dann, wenn $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ existiert.*
*Ist dies der Fall, so ist die stetige Fortsetzung von $f$ in den Punkt $x_0$ eindeutig bestimmt.*

*Beispiel 75: $f$ sei gegeben wie in §6, Beispiel 2 der Vorlesung. Zeigen Sie, dass $x_0 = 1$ eine hebbare Unstetigkeitsstelle von $f$ ist, und geben Sie die stetige Fortsetzung von $f$ in den Punkt $x_0 = 1$ an. Ist die so erhaltene Funktion auf ganz $D = \{-1\} \cup [0,1]$ stetig?*

*Beispiel 76: Es sei $f$ wie in Beispiel 74 gegeben. Geben Sie die stetige Fortsetzung von $f$ in den Punkt $x_0 = 0$ an!*
*(Beachte: dies ist möglich, obwohl $f$ unendlich viele Unstetigkeitsstellen hat!)*

**Satz 11** (**Rechenregeln für Grenzwerte**).

*Es seien $f, g : D \to \mathbb{C}$ Funktionen, $x_0 \in D'$ ein Häufungspunkt von $D$, und es sei $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$ und $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = b$ mit $a, b \in \mathbb{C}$. Dann gilt:*

**a)** $\lim\limits_{x\to x_0} (f \pm g)(x) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = a \pm b$ *und*
$\lim\limits_{x\to x_0} (fg)(x) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = ab$

**b)** *Falls $b \neq 0$, ist $\lim\limits_{x\to x_0} (\frac{f}{g})(x) = \frac{a}{b}$*

**c)** *Sind $f, g$ reellwertig und gibt es eine Umgebung $U$ von $x_0$ in $D \cup \{x_0\}$, sodass für alle $x \in U \setminus \{x_0\}$ $f(x) \leq g(x)$ gilt, so folgt $a \leq b$.*

**d)** *Es sei $h\colon E \to \mathbb{C}$ eine weitere Funktion mit $b \in E'$ und es gebe eine Umgebung $U$ von $x_0$ in $D$ mit $b \notin g(U \setminus \{x_0\})$. Existiert dann $\lim\limits_{y\to b} h(y) = c \in \mathbb{C}$, so gilt: $\lim\limits_{x\to x_0} (h \circ g)(x) = c$.*

**Reelle Spezialitäten für Grenzwerte von Funktionen:**

**Definition 6. a) (Grenzwerte in $\pm\infty$)**

Es sei $D \subset \mathbb{R}$, $f\colon D \to \mathbb{C}$ eine Funktion und $c \in \mathbb{C}$.

Ist $D$ nach $\begin{cases}\text{oben}\\ \text{unten}\end{cases}$ unbeschränkt und gilt für jede Folge $(x_n)_{n\geq 1}$ in $D$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \begin{cases}\infty\\ -\infty\end{cases}$,

dass $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = c$ ist, so sagt man: *$f$ hat bei Annäherung an $\begin{cases}\infty\\ -\infty\end{cases}$ den Grenzwert $c$.*

Schreibweise: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = c$ bzw. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = c$.

**b) (Uneigentliche Grenzwerte)**

Es sei $D \subset \mathbb{C}$, $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine reellwertige Funktion, $c \in \{-\infty, \infty\} \subset \overline{\mathbb{R}}$ und $x_0 \in D'$

(oder $x_0 = \begin{cases}\infty\\ -\infty\end{cases}$, falls $D \subset \mathbb{R}$ nach $\begin{cases}\text{oben}\\ \text{unten}\end{cases}$ unbeschränkt ist).

Gilt für jede Folge $(x_n)_{n\geq 1}$ in $D \setminus \{x_0\}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, dass $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = c$ ist, so sagt man: *$f$ strebt bei Annäherung an $x_0$ gegen $c \in \{-\infty, \infty\}$.*

*Beispiel 77: Bestimmen Sie für die Funktion $f$ aus Beispiel 71.b) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.*
*Läßt sich $f$ in den Punkt $x_0 = 0$ stetig fortsetzen?*

**Definition 7** (**Einseitige Grenzwerte, auch uneigentliche**).
Es seien $D \subset \mathbb{R}$, $f\colon D \to \mathbb{C}$ und $x_0 \in D'$. Weiters seien $D_l = D \cap (-\infty, x_0)$ und $D_r = D \cap (x_0, \infty)$.

**a)** Ist $x_0 \in \begin{cases} D_l' \\ D_r' \end{cases}$ und existiert $\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to x_0} f|_{D_l}(x) = a_l \\ \lim\limits_{x\to x_0} f|_{D_r}(x) = a_r \end{array}\right\} \in \mathbb{C}$ oder $\overline{\mathbb{R}}$ [falls $f$ reellwertig],

so heißt dieser Wert der $\begin{cases} \textit{linksseitige} \\ \textit{rechtsseitige} \end{cases}$ *Grenzwert von $f$ in $x_0$.*

Schreibweise: $\lim\limits_{x\nearrow x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = a_l$ bzw. $\lim\limits_{x\searrow x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = a_r$

**b)** Ist $x_0 \in D$ und gilt $\left\{\begin{array}{l} x_0 \notin D_l' \text{ oder } \lim\limits_{x\nearrow x_0} f(x) = f(x_0) \\ x_0 \notin D_r' \text{ oder } \lim\limits_{x\searrow x_0} f(x) = f(x_0) \end{array}\right\}$, so heißt $f$ $\begin{cases} \textit{linksseitig} \\ \textit{rechtsseitig} \end{cases}$ *stetig in $x_0$*.

$x_0$ heißt eine *Sprungstelle von $f$*, wenn $f$ in $x_0$ unstetig ist, aber $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ und $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ existieren und endlich sind.

*Beispiel 78: Gegeben sei die rationale Funktion* $f(x) = \dfrac{-3x^2 + 2x}{x^2 - 1}$.
*a) Geben Sie die größtmögliche reelle Definitionsmenge $D \subset \mathbb{R}$ für $f$ an.*
*b) Bestimmen Sie* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, *sowie die links- und rechtsseitigen Grenzwerte von $f(x)$ in den Punkten $x_0 = 1$ bzw. $x_0 = -1$.*
*c) Bestimmen Sie alle Nullstellen von $f$ sowie die Funktionswerte an einigen weiteren Stellen und skizzieren Sie Graph$(f)$!*

*Beispiel 79: Gegeben sei die reelle Funktion $f$ wie in Beispiel 74.*
*a) Bestimmen Sie* $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.
*b) Bestimmen Sie* $\lim\limits_{x\nearrow 2} f(x)$ *und* $\lim\limits_{x\searrow 2} f(x)$, *bzw. für beliebiges $k \in \mathbb{Z}$* $\lim\limits_{x\nearrow 2^k} f(x)$ *und* $\lim\limits_{x\searrow 2^k} f(x)$.
*c) Geben Sie alle Unstetigkeitsstellen von $f$ an! Ist jede Unstetigkeitsstelle eine Sprungstelle?*