ANALYSIS 1

Kapitel 5: Unendliche Reihen

MAB.01012UB MAT.101UB Vorlesung im WS 2017/18

Günter LETTL

Institut für Mathematik und wissenschaftliches Rechnen
Karl-Franzens-Universität Graz

5.1 Grundbegriffe

Definition (1)

Es sei $k \in \mathbb{Z}$ und $(a_i)_{i \geq k}$ eine (komplexe) Folge. Unter der *unendlichen Reihe* $\sum_{i=k}^{\infty} a_i$ versteht man die Folge $\left(s_n := \sum_{i=k}^{n} a_i\right)_{n \geq k}$ der *Partialsummen* s_n.

Die unendliche Reihe $\sum_{i=k}^{\infty} a_i$ heißt *konvergent* [bzw. *divergent* bzw. *bestimmt divergent gegen* $\pm\infty$], wenn die Folge $(s_n)_{n \geq k}$ die entsprechende Eigenschaft besitzt.

Im Falle $(s_n)_{n \geq k} \to a \in \mathbb{C} \cup \overline{\mathbb{R}}$ nennt man a die *Summe* der Reihe.
Schreibweise: $a = \sum_{i=k}^{\infty} a_i = \lim_{n \to \infty} s_n$.

Die Reihe $\sum_{i=k}^{\infty} a_i$ heißt *absolut konvergent*, wenn $\sum_{i=k}^{\infty} |a_i|$ konvergiert.

5.1 Grundbegriffe

Definition (1)

Es sei $k \in \mathbb{Z}$ und $(a_i)_{i \geq k}$ eine (komplexe) Folge. Unter der *unendlichen Reihe* $\sum\limits_{i=k}^{\infty} a_i$ versteht man die Folge $\left(s_n := \sum\limits_{i=k}^{n} a_i\right)_{n \geq k}$ der *Partialsummen* s_n.

Die unendliche Reihe $\sum\limits_{i=k}^{\infty} a_i$ heißt *konvergent* [bzw. *divergent* bzw. *bestimmt divergent gegen* $\pm\infty$], wenn die Folge $(s_n)_{n \geq k}$ die entsprechende Eigenschaft besitzt.

Im Falle $(s_n)_{n \geq k} \to a \in \mathbb{C} \cup \overline{\mathbb{R}}$ nennt man a die *Summe* der Reihe. Schreibweise: $a = \sum\limits_{i=k}^{\infty} a_i = \lim\limits_{n \to \infty} s_n$.

Die Reihe $\sum\limits_{i=k}^{\infty} a_i$ heißt *absolut konvergent*, wenn $\sum\limits_{i=k}^{\infty} |a_i|$ konvergiert.

Satz (1)

Es seien $\sum_{i=k}^{\infty} a_i = a$ *und* $\sum_{i=k}^{\infty} b_i = b$ *konvergente Reihen. Dann gilt:*

a) *Für alle* $m \geq k$ *ist die Reihe* $\sum_{i=m}^{\infty} a_i$ *konvergent und es gilt:*

$$\sum_{i=m}^{\infty} a_i = a - \sum_{i=k}^{m-1} a_i \ .$$

b) *Für alle* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ *gilt:* $\sum_{i=k}^{\infty} (\alpha a_i + \beta b_i) = \alpha a + \beta b.$

c) $\sum_{i=k}^{\infty} \overline{a_i} = \overline{a}.$

Satz (2) (Cauchysches Konvergenzkriterium)

Die Reihe $\sum\limits_{i=k}^{\infty} a_i$ *konvergiert genau dann, wenn es zu jedem* $\varepsilon > 0$ *ein* $N \in \mathbb{N}$ *gibt, sodass für alle* $n, m \in \mathbb{N}$ *mit* $n > m \geq N$ *gilt:*

$$\left| \sum_{i=m+1}^{n} a_i \right| < \varepsilon \ .$$

Korollar

a) Ist die Reihe $\sum\limits_{i=k}^{\infty} a_i$ *absolut konvergent, so ist sie auch konvergent.*

b) Ist die Reihe $\sum\limits_{i=k}^{\infty} a_i$ *konvergent, so gilt* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Satz (2) (Cauchysches Konvergenzkriterium)

Die Reihe $\sum_{i=k}^{\infty} a_i$ *konvergiert genau dann, wenn es zu jedem* $\varepsilon > 0$ *ein* $N \in \mathbb{N}$ *gibt, sodass für alle* $n, m \in \mathbb{N}$ *mit* $n > m \geq N$ *gilt:*

$$\left| \sum_{i=m+1}^{n} a_i \right| < \varepsilon \ .$$

Korollar

a) *Ist die Reihe* $\sum_{i=k}^{\infty} a_i$ *absolut konvergent, so ist sie auch konvergent.*

b) *Ist die Reihe* $\sum_{i=k}^{\infty} a_i$ *konvergent, so gilt* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Alternierende Reihen:

Eine Reihe mit reellen Summanden und „abwechselnden Vorzeichen" (d. h.: $0 \neq \mathrm{sgn}(a_i) = -\mathrm{sgn}(a_{i+1})$) heißt *alternierend*.

Satz (3) (Leibnizkriterium)

Es sei $(a_i)_{i\geq 0}$ eine monoton fallende Nullfolge. Dann ist die Reihe

$$\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i a_i = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots$$

konvergent, und für ihre Summe a gilt:

$$\left|a - \sum_{i=0}^{n}(-1)^i a_i\right| \leq a_{n+1} \; .$$

Reihen mit nicht-negativen Gliedern: $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ mit $0 \leq a_i \in \mathbb{R}$.

Für solche Reihen gilt: die Folge der Partialsummen $(s_n)_{n\geq 1}$ ist (nicht negativ und) monoton wachsend. Nach §4 (Sätze 5, 6 und Definition 4) gilt daher: es existiert $\lim_{n\to\infty} s_n \in [0, \infty]$.

Satz (4) (Vergleichskriterium)

Es seien $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ *und* $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ *Reihen und* $k \in \mathbb{N}$ *so, dass für alle* $i \geq k$ *gilt:* $|a_i| \leq b_i$. *Dann gilt:*

$$\sum_{i=k}^{\infty} |a_i| \leq \sum_{i=k}^{\infty} b_i \ .$$

Satz (4) (Vergleichskriterium) (Fortsetzung)

Insbesondere gilt:

a) *Konvergiert* $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$, *so ist* $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ *absolut konvergent (also auch konvergent), und* $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ *heißt (konvergente) Majorante für* $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$.

b) *Ist* $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ *divergent, so divergiert auch* $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$, *und* $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ *heißt (divergente) Minorante für* $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$.

Satz (5) (Quotientenkriterium)

Es sei $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ *eine Reihe mit* $a_i \neq 0$ *für fast alle* $i \in \mathbb{N}$.

a) *Gibt es ein* $q \in (0,1)$ *und ein* $N \in \mathbb{N}$ *derart, dass für alle* $n \geq N$ *gilt:*

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q \ ,$$

so ist $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ *absolut konvergent.*

b) *Gibt es ein* $N \in \mathbb{N}$, *sodass für alle* $n \geq N$ *gilt:*

$$1 \leq \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \ ,$$

so ist $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ *divergent.*

Satz (6) (Wurzelkriterium)

Es sei $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ *eine Reihe und* $s = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. *Dann gilt:*

a) *Ist* $s < 1$, *so ist* $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ *absolut konvergent.*

b) *Gibt es unendlich viele* $n \in \mathbb{N}$ *mit* $1 \leq \sqrt[n]{|a_n|}$, *so ist* $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ *divergent.*

5.4 Umordnung und Produkt von Reihen

Satz (7)

Es sei $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ *eine absolut konvergente Reihe und* $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *eine bijektive Funktion (= eine Umordnung der Indices).*

Dann konvergiert auch $\sum_{i=1}^{\infty} a_{\varphi(i)}$ *absolut, und es gilt*

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = \sum_{i=1}^{\infty} a_{\varphi(i)} \ .$$

Definition (2)

Es seien $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ und $\sum_{i=0}^{\infty} b_i$ Reihen, und für alle $k \in \mathbb{N}_0$ sei

$$d_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + a_2 b_{k-2} + \ldots + a_k b_0 \ .$$

Dann heißt die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} d_k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} \right)$$

das *Cauchyprodukt der Reihen* $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ und $\sum_{i=0}^{\infty} b_i$.

Satz (8)

Es seien $a = \sum_{i=0}^{\infty} a_i$ *und* $b = \sum_{i=0}^{\infty} b_i$ *absolut konvergente Reihen.*

Dann konvergiert auch das Cauchyprodukt der beiden Reihen absolut, und es gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} d_k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} \right) = a \cdot b \ .$$

Additionssatz der Binomialreihen:

Für $s, t \in \mathbb{C}$ und $z \in K_1(0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ gilt:

$$B_s(z) \cdot B_t(z) = B_{s+t}(z) \ .$$

Satz (8)

Es seien $a = \sum_{i=0}^{\infty} a_i$ *und* $b = \sum_{i=0}^{\infty} b_i$ *absolut konvergente Reihen.*

Dann konvergiert auch das Cauchyprodukt der beiden Reihen absolut, und es gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} d_k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} \right) = a \cdot b \ .$$

Additionssatz der Binomialreihen:

Für $s, t \in \mathbb{C}$ und $z \in K_1(0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ gilt:

$$B_{s}(z) \cdot B_{t}(z) = B_{s+t}(z) \ .$$

Definition (3)

Es sei $(a_n)_{n\geq 0}$ eine Folge in $\mathbb{C}$ und $z \in \mathbb{C}$. Dann heißt die unendliche Reihe

$$P = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots$$

die *Potenzreihe in z mit Koeffizientenfolge $(a_n)_{n\geq 0}$*.

Die Menge $D_P = \{z \in \mathbb{C} \mid P \text{ konvergiert für } z\} \ni 0$ heißt *Konvergenzbereich* von P, und die (ebenfalls mit P bezeichnete) Funktion

$$P: \; D_P \to \mathbb{C}$$
$$z \mapsto P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

heißt die *durch die Potenzreihe P dargestellte Funktion*.

$\rho_P = \sup\{r \in \mathbb{R} \mid P(r) \text{ konvergiert}\} \in [0, \infty]$ heißt der *Konvergenzradius* von P.

5.5 Potenzreihen

Definition (3)

Es sei $(a_n)_{n\geq 0}$ eine Folge in $\mathbb{C}$ und $z \in \mathbb{C}$. Dann heißt die unendliche Reihe

$$P = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots$$

die *Potenzreihe in z mit Koeffizientenfolge $(a_n)_{n\geq 0}$*.

Die Menge $D_P = \{z \in \mathbb{C} \mid P \text{ konvergiert für } z\} \ni 0$ heißt *Konvergenzbereich* von P, und die (ebenfalls mit P bezeichnete) Funktion

$$\begin{aligned} P :\ & D_P \to \mathbb{C} \\ & z \mapsto P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \end{aligned}$$

heißt die *durch die Potenzreihe P dargestellte Funktion*.

$\rho_P = \sup\{r \in \mathbb{R} \mid P(r) \text{ konvergiert}\} \in [0, \infty]$ heißt der *Konvergenzradius* von P.

Definition (3)

Es sei $(a_n)_{n\geq 0}$ eine Folge in $\mathbb{C}$ und $z \in \mathbb{C}$. Dann heißt die unendliche Reihe

$$P = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots$$

die *Potenzreihe in z mit Koeffizientenfolge $(a_n)_{n\geq 0}$*.

Die Menge $D_P = \{z \in \mathbb{C} \mid P \text{ konvergiert für } z\} \ni 0$ heißt *Konvergenzbereich* von P, und die (ebenfalls mit P bezeichnete) Funktion

$$\begin{aligned} P:\ D_P &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \end{aligned}$$

heißt die *durch die Potenzreihe P dargestellte Funktion*.

$\rho_P = \sup\{r \in \mathbb{R} \mid P(r) \text{ konvergiert}\} \in [0, \infty]$ heißt der *Konvergenzradius* von P.

Satz (9)

Es sei $P = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *eine Potenzreihe.*

a) *Konvergiert* P *in einem Punkt* $z_0 \in \mathbb{C}$, *so ist* P *absolut konvergent für alle* $z \in \mathbb{C}$ *mit* $|z| < |z_0|$.

b) P *ist für alle* $z \in \mathbb{C}$ *mit* $|z| < \rho_P$ *absolut konvergent und für alle* $z \in \mathbb{C}$ *mit* $|z| > \rho_P$ *divergent; d. h.:*

$$K_{\rho_P}(0) \subset D_P \subset \overline{K_{\rho_P}}(0) =: \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq \rho_P\}$$

c) *Es gilt*

$$\rho_P = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \qquad \text{[Cauchy-Hadamard]}$$

bzw.

$$\rho_P = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \qquad \text{[Euler]},$$

falls die Folge $\left(\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|\right)_{n\geq 0}$ *konvergiert oder bestimmt divergiert.*

Satz (9)

Es sei $P = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *eine Potenzreihe.*

a) *Konvergiert* P *in einem Punkt* $z_0 \in \mathbb{C}$*, so ist* P *absolut konvergent für alle* $z \in \mathbb{C}$ *mit* $|z| < |z_0|$.

b) P *ist für alle* $z \in \mathbb{C}$ *mit* $|z| < \rho_P$ *absolut konvergent und für alle* $z \in \mathbb{C}$ *mit* $|z| > \rho_P$ *divergent; d. h.:*

$$K_{\rho_P}(0) \subset D_P \subset \overline{K_{\rho_P}}(0) =: \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq \rho_P\}$$

c) *Es gilt*

$$\rho_P = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \qquad \textit{[Cauchy-Hadamard]}$$

bzw.

$$\rho_P = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \qquad \textit{[Euler]},$$

falls die Folge $\left(\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|\right)_{n\geq 0}$ *konvergiert oder bestimmt divergiert.*

Definition (4)

Es seien $P = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ und $Q = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ Potenzreihen in z und $c \in \mathbb{C}$. Dann definiert man:

$$P \pm Q = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) z^n \qquad c \cdot P = \sum_{n=0}^{\infty} c\, a_n z^n \qquad \text{und}$$

$$P \cdot Q = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i} \right) z^n .$$

Satz (10)

Sind $P = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *und* $Q = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ *Potenzreihen in* z *mit Konvergenzradien* $\rho_P, \rho_Q > 0$, *so gilt mit* $\rho = \min\{\rho_P, \rho_Q\}$:

Jede der Potenzreihen $P \pm Q$, $P \cdot Q$ *und* $c \cdot P$ $(c \in \mathbb{C})$ *hat einen Konvergenzradius* $\geq \rho$, *und für alle* $z \in K_\rho(0)$ *gilt:*

$$(P \pm Q)(z) = P(z) \pm Q(z) \quad (P \cdot Q)(z) = P(z)\, Q(z)$$

$$\text{und} \quad (c \cdot P)(z) = c\, P(z) \; .$$

Satz (11)

Es sei $P = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *eine Potenzreihe in* z *mit Konvergenzradius* $\rho = \rho_P > 0$. *Dann gilt:*

a) [Approximationssatz]

<u>Variante 1:</u>
Für jedes r *mit* $0 < r < \rho$ *und jedes* $N \in \mathbb{N}$ *gibt es ein (von* r *und* N *abhängiges!)* $c \in \mathbb{R}$, *sodass für alle* $z \in \mathbb{C}$ *mit* $|z| \leq r$ *gilt:*

$$\left| P(z) - \sum_{n=0}^{N-1} a_n z^n \right| = \left| \sum_{n=N}^{\infty} a_n z^n \right| \leq c\,|z|^N$$

Satz (11) (Fortsetzung)

Variante 2:
Ist $0 < r < \overline{r} < \rho$, *so gibt es ein* $N_0 \in \mathbb{N}$, *sodass für alle* $N \geq N_0$ *und für alle* $z \in \mathbb{C}$ *mit* $|z| \leq r$ *gilt:*

$$\left| P(z) - \sum_{n=0}^{N-1} a_n z^n \right| \leq \frac{\overline{r}}{\overline{r} - r} \left(\frac{r}{\overline{r}} \right)^N$$

b) *Sind nicht alle* $a_n = 0$, *so gibt es ein* $r > 0$, *sodass für alle* $z \in K_r(0) \setminus \{0\}$ *gilt:*

$$P(z) \neq 0 \; .$$

Korollar (Identitätssatz für Potenzreihen)

Sind $P = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *und* $Q = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ *Potenzreihen mit Konvergenzradien* $\rho_P, \rho_Q > 0$, $\rho = \min\{\rho_P, \rho_Q\}$, *und gibt es eine Nullfolge* $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *in* $K_\rho(0)$ *mit* $z_k \neq 0$ *und*

$$P(z_k) = Q(z_k) \quad \text{für alle} \quad k \in \mathbb{N} \ ,$$

so gilt:

$$\text{für alle } n \in \mathbb{N}_0 \ \text{ ist } \ a_n = b_n \quad (\text{d. h.: } P = Q) \ .$$

Satz (12) (Einsetzen von Potenzreihen in Potenzreihen)

Es seien $P = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *und* $Q = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ *Potenzreihen mit Konvergenzradien* $\rho_P, \rho_Q > 0$. *Für* $n \in \mathbb{N}_0$ *sei*

$$Q^n = \underbrace{Q \cdot Q \cdot \ldots \cdot Q}_{n} = \sum_{k=0}^{\infty} b_k^{(n)} z^k$$

das $(n-1)$*-fache Cauchyprodukt von* Q *mit sich.*

Ist $|b_0| < \rho_P$, *so existiert ein* $\rho > 0$, *sodass für alle* $z \in K_\rho(0)$ *gilt:* $|Q(z)| < \rho_P$ *und*

$$P(Q(z)) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k^{(n)} z^k \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_k^{(n)} \right) z^k \ .$$

Diese Potenzreihe bezeichnet man mit $P(Q)$.