§5. Unendliche Reihen [Kö §6]

5.1 Grundbegriffe

Definition 1. Es sei $k \in \mathbb{Z}$ und $(a_i)_{i \geq k}$ eine (komplexe) Folge. Unter der *unendlichen Reihe* $\sum\limits_{i=k}^{\infty} a_i$ versteht man die Folge $(s_n)_{n \geq k}$ der *Partialsummen* $s_n := \sum\limits_{i=k}^{n} a_i$.

Die unendliche Reihe $\sum\limits_{i=k}^{\infty} a_i$ heißt *konvergent* [bzw. *divergent* bzw. *bestimmt divergent gegen* $\pm\infty$], wenn die Folge $(s_n)_{n \geq k}$ die entsprechende Eigenschaft besitzt.

Im Falle $(s_n)_{n \geq k} \to a \in \mathbb{C} \cup \overline{\mathbb{R}}$ nennt man a die *Summe* der Reihe.

Schreibweise: $a = \sum\limits_{i=k}^{\infty} a_i = \lim\limits_{n \to \infty} s_n$.

Die Reihe $\sum\limits_{i=k}^{\infty} a_i$ heißt *absolut konvergent*, wenn $\sum\limits_{i=k}^{\infty} |a_i|$ konvergiert.

Beispiel 51: Wie lassen sich aus der Folge der Partialsummen $(s_n)_{n \geq k}$ die Summanden a_i der dazugehörigen unendlichen Reihe berechnen?
Fassen Sie einige konkret angegebene Folgen des vorangegangenen Kapitels (bzw. aus den Übungen) als Folge von Partialsummen auf und geben Sie die dazupassenden unendlichen Reihen an!

Satz 1. *Es seien $\sum\limits_{i=k}^{\infty} a_i = a$ und $\sum\limits_{i=k}^{\infty} b_i = b$ konvergente Reihen. Dann gilt:*

- **a)** *Für alle $m \geq k$ ist die Reihe $\sum\limits_{i=m}^{\infty} a_i$ konvergent und es gilt: $\sum\limits_{i=m}^{\infty} a_i = a - \sum\limits_{i=k}^{m-1} a_i$.*
- **b)** *Für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ gilt: $\sum\limits_{i=k}^{\infty} (\alpha a_i + \beta b_i) = \alpha a + \beta b$.*
- **c)** $\sum\limits_{i=k}^{\infty} \overline{a_i} = \overline{a}$.

Beispiel 52: Berechnen Sie $\sum_{j=3}^{\infty} \left(\frac{1-i}{2}\right)^j$ und $\sum_{j=-2}^{\infty} \left(\frac{2}{7}\right)^j$.

Beispiel 53: Verwenden Sie Satz 1.b) *und die Summenformel für die geometrische Reihe, um folgende Summe zu berechnen: $\sum_{j=0}^{\infty}\Big((1-i) \cdot (\frac{2+i}{3})^j - \frac{2}{3} \cdot (\frac{2}{3})^j\Big)$.*

Satz 2 (Cauchysches Konvergenzkriterium).
Die Reihe $\sum\limits_{i=k}^{\infty} a_i$ konvergiert genau dann, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, sodass für alle $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n > m \geq N$ gilt:

$$\left| \sum_{i=m+1}^{n} a_i \right| < \varepsilon \; .$$

Beispiel 54: Bestimmen Sie für die Reihe $\sum_{i=0}^{\infty}(\frac{1}{3})^i$ *und für* $\varepsilon = \frac{1}{1000}$ *ein* $N \in \mathbb{N}$, *sodass die Bedingung des Cauchyschen Konvergenzkriteriums erfüllt ist.*
Tipp: Es genügt, N *so zu wählen, dass* $\sum_{i=N+1}^{\infty}(\frac{1}{3})^i < \frac{1}{1000}$ *gilt. (Wieso?)*

Korollar.

a) Ist die Reihe $\sum\limits_{i=k}^{\infty} a_i$ absolut konvergent, so ist sie auch konvergent.

b) Ist die Reihe $\sum\limits_{i=k}^{\infty} a_i$ konvergent, so gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

5.2 Reihen mit reellen Summanden

Alternierende Reihen: Eine Reihe mit reellen Summanden und „abwechselnden Vorzeichen" (d. h.: $0 \neq \operatorname{sgn}(a_i) = -\operatorname{sgn}(a_{i+1})$) heißt *alternierend.*

Satz 3 (Leibnizkriterium).
Es sei $(a_i)_{i\geq 0}$ *eine monoton fallende Nullfolge. Dann ist die Reihe*

$$\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i a_i = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots$$

konvergent, und für ihre Summe a *gilt:* $\left|a - \sum\limits_{i=0}^{n}(-1)^i a_i\right| \leq a_{n+1}$.

Beispiel 55: Wie läßt sich das Leibnizkriterium für alternierende Reihen $\sum_{i=0}^{\infty} b_i$ *mit* $\operatorname{sgn}(b_i) = (-1)^{i+1}$ *anwenden?*

Reihen mit nicht-negativen Gliedern: $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ mit $0 \leq a_i \in \mathbb{R}$.

Für solche Reihen gilt: die Folge der Partialsummen ist (nicht negativ und) monoton wachsend. Nach §4 (Sätze 5, 6 und Definition 4) gilt daher: es existiert $\lim\limits_{n\to\infty} s_n \in [0, \infty]$.

Satz 4 (Vergleichskriterium). *Es seien* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ *und* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i$ *Reihen und* $k \in \mathbb{N}$ *so, dass für alle* $i \geq k$ *gilt:* $|a_i| \leq b_i$. *Dann gilt:*

$$\sum_{i=k}^{\infty} |a_i| \leq \sum_{i=k}^{\infty} b_i \ .$$

Insbesondere gilt:

a) *Konvergiert* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i$*, so ist* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ *absolut konvergent (also auch konvergent), und* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i$ *heißt (konvergente) Majorante für* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$*.*

b) *Ist* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ *divergent, so divergiert auch* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i$*, und* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ *heißt (divergente) Minorante für* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i$*.*

5.3 Quotienten- und Wurzelkriterium

Satz 5 (Quotientenkriterium). *Es sei* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ *eine Reihe mit* $a_i \neq 0$ *für fast alle* $i \in \mathbb{N}$*.*

a) *Gibt es ein* $q \in (0,1)$ *und ein* $N \in \mathbb{N}$ *derart, dass für alle* $n \geq N$ *gilt:* $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q$*, so ist* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ *absolut konvergent.*

b) *Gibt es ein* $N \in \mathbb{N}$*, sodass für alle* $n \geq N$ *gilt:* $1 \leq \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$*, so ist* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ *divergent.*

Beispiel 56: Die Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ *werde durch „Mischen" der beiden konvergenten geometrischen Reihen* $\sum_{i=0}^{\infty} (\frac{1}{2})^i$ *und* $\sum_{i=0}^{\infty} (\frac{1}{4})^i$ *gebildet, d. h.:*

$$(a_0, a_1, a_2, \ldots) = (1, 1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}, (\tfrac{1}{2})^2, (\tfrac{1}{4})^2, (\tfrac{1}{2})^3, (\tfrac{1}{4})^3, \ldots).$$

Zeigen Sie, dass das Quotientenkriterium keine Aussage über das Konvergenzverhalten der Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ *liefert.*

Satz 6 (Wurzelkriterium). *Es sei* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ *eine Reihe und* $s = \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$*. Dann gilt:*

a) *Ist* $s < 1$*, so ist* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ *absolut konvergent.*

b) *Gibt es unendlich viele* $n \in \mathbb{N}$ *mit* $1 \leq \sqrt[n]{|a_n|}$*, so ist* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ *divergent.*

Beispiel 57: Zeigen Sie mit dem Wurzelkriterium, dass die Reihe aus Beispiel 56 *absolut konvergiert.*

Beispiel 58: So wie im Beispiel 56 *werde die Reihe* $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ *durch „Mischen" der Reihen* $\sum_{i=0}^{\infty} 2^i$ *und* $\sum_{i=0}^{\infty} (\frac{1}{4})^i$ *gebildet. Wieso ist* $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ *divergent?*
Zeigen Sie, dass auch für diese Reihe das Quotientenkriterium versagt, das Wurzelkriterium hingegen die richtige Antwort liefert.

5.4 Umordnung und Produkt von Reihen [Kö §6.3]

Satz 7. *Es sei* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ *eine absolut konvergente Reihe und* $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *eine bijektive Funktion (= eine Umordnung der Indices).*
Dann konvergiert auch $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_{\varphi(i)}$ *absolut, und es gilt*

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = \sum_{i=1}^{\infty} a_{\varphi(i)} \ .$$

Beispiel 59: Überlegen Sie sich: für die alternierende harmonische Reihe $\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{i+1}\frac{1}{i}$ *gibt es keine Umordnung (d.h. keine Funktion* φ *so wie in Satz 7), sodass zuerst alle positiven Summanden und dann alle negativen Summanden dieser Reihe auftreten.*
Hinweis: *Was ist* $\varphi(2)$*?*

Definition 2. Es seien $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i$ und $\sum\limits_{i=0}^{\infty} b_i$ Reihen, und für alle $k \in \mathbb{N}_0$ sei

$$d_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + a_2 b_{k-2} + \ldots + a_k b_0 \ .$$

Dann heißt die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} d_k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} \right)$$

das *Cauchyprodukt der Reihen* $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i$ und $\sum\limits_{i=0}^{\infty} b_i$.

Satz 8. *Es seien* $a = \sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i$ *und* $b = \sum\limits_{i=0}^{\infty} b_i$ *absolut konvergente Reihen.*
Dann konvergiert auch das Cauchyprodukt der beiden Reihen absolut, und es gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} d_k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} \right) = a \cdot b \ .$$

Beispiel 60: Zeigen Sie, dass der n*-te Summand* d_n *des Cauchyproduktes der beiden geometrischen Reihen aus* Beispiel 56 *gleich* $(\frac{1}{2})^{n-1} - (\frac{1}{4})^n$ *ist.*
Prüfen Sie nach, dass $\sum_{n=0}^{\infty} d_n = \left(\sum_{i=0}^{\infty}(\frac{1}{2})^i\right) \cdot \left(\sum_{i=0}^{\infty}(\frac{1}{4})^i\right)$ *gilt.*

Additionssatz der Binomialreihen:
Für $s, t \in \mathbb{C}$ und $z \in K_1(0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ gilt:

$$B_s(z) \cdot B_t(z) = B_{s+t}(z) \ .$$

5.5 Potenzreihen [Kö §6.4, §14.2]

Definition 3. Es sei $(a_n)_{n\geq 0}$ eine Folge in $\mathbb{C}$ und $z \in \mathbb{C}$. Dann heißt die unendliche Reihe

$$P = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots$$

die *Potenzreihe in z mit Koeffizientenfolge* $(a_n)_{n\geq 0}$.
Die Menge $D_P = \{z \in \mathbb{C} \mid P \text{ konvergiert für } z\} \ni 0$ heißt *Konvergenzbereich* von P, und die (ebenfalls mit P bezeichnete) Funktion

$$\begin{aligned} P:\ D_P &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \end{aligned}$$

heißt die *durch die Potenzreihe P dargestellte Funktion.*
$\rho_P = \sup\{r \in \mathbb{R} \mid P(r) \text{ konvergiert}\} \in [0, \infty]$ heißt der *Konvergenzradius* von P.

Satz 9. *Es sei $P = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine Potenzreihe.*

a) *Konvergiert P in einem Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$, so ist P absolut konvergent für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < |z_0|$.*

b) *P ist für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < \rho_P$ absolut konvergent und für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > \rho_P$ divergent; d. h.:*

$$K_{\rho_P}(0) \subset D_P \subset \overline{K_{\rho_P}}(0) =: \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq \rho_P\}$$

c) *Es gilt*

$$\rho_P = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \qquad \text{[Cauchy-Hadamard]}$$

bzw.

$$\rho_P = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \qquad \text{[Euler]}\,,$$

falls dieser Limes existiert oder die Folge $(|\frac{a_n}{a_{n+1}}|)_{n\geq 0}$ bestimmt divergiert.

Definition 4. Es seien $P = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ und $Q = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ Potenzreihen in z und $c \in \mathbb{C}$. Dann definiert man:

$$P \pm Q = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) z^n \qquad c \cdot P = \sum_{n=0}^{\infty} c\, a_n z^n \quad \text{und} \quad P \cdot Q = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i} \right) z^n.$$

Satz 10. *Sind* $P = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *und* $Q = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ *Potenzreihen in* z *mit Konvergenzradien* $\rho_P, \rho_Q > 0$*, so gilt mit* $\rho = \min\{\rho_P, \rho_Q\}$*:*

Jede der Potenzreihen $P \pm Q$*,* $P \cdot Q$ *und* $c \cdot P$ $(c \in \mathbb{C})$ *hat einen Konvergenzradius* $\geq \rho$*, und für alle* $z \in K_\rho(0)$ *gilt:*

$$(P \pm Q)(z) = P(z) \pm Q(z) \quad (P \cdot Q)(z) = P(z)Q(z) \quad \textit{und} \quad (cP)(z) = c \cdot P(z)\ .$$

Beispiel 61: Gegeben sind die Potenzreihen $P = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n$ *und* $Q = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$*. Geben Sie die Potenzreihen* $P + Q$*,* $P - Q$ *und* PQ *an!*
Berechnen Sie für $z \in K_1(0)$*:* $P(z)$*,* $Q(z)$*,* $(P+Q)(z)$*,* $(P-Q)(z)$ *und* $(PQ)(z)$*.*
Überprüfen Sie mit Satz 10, *ob Sie sich nicht verrechnet haben!*

Satz 11. *Es sei* $P = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *eine Potenzreihe in* z *mit Konvergenzradius* $\rho = \rho_P > 0$*. Dann gilt:*

a) [**Approximationssatz**]

Variante 1: *Für jedes* r *mit* $0 < r < \rho$ *und jedes* $N \in \mathbb{N}$ *gibt es ein (von* r *und* N *abhängiges!)* $c \in \mathbb{R}$*, sodass für alle* $z \in \mathbb{C}$ *mit* $|z| \leq r$ *gilt:*

$$\left| P(z) - \sum_{n=0}^{N-1} a_n z^n \right| = \left| \sum_{n=N}^{\infty} a_n z^n \right| \leq c\,|z|^N\ .$$

Variante 2: *Ist* $0 < r < \overline{r} < \rho$*, so gibt es ein* $N_0 \in \mathbb{N}$*, sodass für alle* $N \geq N_0$ *und für alle* $z \in \mathbb{C}$ *mit* $|z| \leq r$ *gilt:*

$$\left| P(z) - \sum_{n=0}^{N-1} a_n z^n \right| \leq \frac{\overline{r}}{\overline{r} - r} \left(\frac{r}{\overline{r}} \right)^N\ .$$

b) *Sind nicht alle* $a_n = 0$*, so gibt es ein* $r > 0$*, sodass für alle* $z \in K_r(0) \setminus \{0\}$ *gilt:*

$$P(z) \neq 0\ .$$

Korollar (**Identitätssatz für Potenzreihen**).
Sind $P = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ und $Q = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ Potenzreihen mit Konvergenzradien $\rho_P, \rho_Q > 0$, $\rho = \min\{\rho_P, \rho_Q\}$, und gibt es eine Nullfolge $(z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in $K_\rho(0)$ mit $z_k \neq 0$ und $P(z_k) = Q(z_k)$ für alle $k \in \mathbb{N}$, so gilt:

$$\text{für alle } n \in \mathbb{N}_0 \text{ ist } a_n = b_n \quad \text{(d. h.: } P = Q)\ .$$

Satz 12 (Einsetzen von Potenzreihen in Potenzreihen).
Es seien $P = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *und* $Q = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ *Potenzreihen mit Konvergenzradien* $\rho_P, \rho_Q > 0$.
Für $n \in \mathbb{N}_0$ *sei*

$$Q^n = \underbrace{Q \cdot Q \cdot \ldots \cdot Q}_{n} = \sum_{k=0}^{\infty} b_k^{(n)} z^k$$

das $(n-1)$*-fache Cauchyprodukt von* Q *mit sich.*
Ist $|b_0| < \rho_P$*, so existiert ein* $\rho > 0$*, sodass für alle* $z \in K_\rho(0)$ *gilt:* $|Q(z)| < \rho_P$ *und*

$$P(Q(z)) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k^{(n)} z^k \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_k^{(n)} \right) z^k \quad \ldots \textit{Potenzreihe } P(Q) \; .$$