ANALYSIS 1

Kapitel 4: Folgen von (reellen und komplexen) Zahlen

MAB.01012UB MAT.101UB Vorlesung im WS 2017/18

Günter LETTL

Institut für Mathematik und wissenschaftliches Rechnen
Karl-Franzens-Universität Graz

4.1 Grundbegriffe

Definition (1)

a) Eine *Folge* (reeller bzw. komplexer) Zahlen ist eine Abbildung

$$\boldsymbol{a} : \mathbb{Z}_{\geq k} \to \begin{cases} \mathbb{R} \\ \mathbb{C} \end{cases} \quad \text{mit einem } k \in \mathbb{Z} \ .$$

Schreibweise: $\boldsymbol{a}(n) = a_n \in \begin{cases} \mathbb{R} \\ \mathbb{C} \end{cases}$ ... *n-tes Folgenglied*

$$\boldsymbol{a} = (a_n)_{n \geq k} = (a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots) \ .$$

b) Eine Folge $(a_n)_{n \geq k}$ heißt *konvergent*, wenn es eine Zahl $a \in \mathbb{C}$ mit folgender Eigenschaft gibt:

zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$,
sodass für alle $n \geq N$ gilt: $|a_n - a| < \varepsilon$.

Definition (1) (Fortsetzung)

Ist die Folge $(a_n)_{n\geq k}$ konvergent, so heißt diese Zahl a der *Grenzwert* (oder: *Limes*) der Folge.

Schreibweise: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \quad$ bzw. $(a_n)_{n\geq k} \to a$

Eine Folge, die gegen 0 konvergiert, heißt *Nullfolge*.

Eine Folge, die nicht konvergent ist, heißt *divergent*.

c) Eine Folge $(a_n)_{n\geq k}$ heißt *beschränkt*, falls die Menge $\{|a_n| \mid n \geq k\}$ beschränkt ist; andernfalls heißt sie *unbeschränkt*.

Satz (1)

a) Ist eine Folge konvergent, so ist ihr Limes eindeutig bestimmt.

b) Eine konvergente Folge ist beschränkt.

c) Ist $(a_n)_{n \geq k} \to a$ eine gegen $a \in \mathbb{C}$ konvergente Folge, so gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \overline{a_n} = \overline{a}, \qquad \lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|,$$

$$\lim_{n\to\infty} \Re(a_n) = \Re(a), \qquad \lim_{n\to\infty} \Im(a_n) = \Im(a).$$

Insbesondere gilt: Sind alle $a_n \in \mathbb{R}$, so ist auch $a \in \mathbb{R}$.

Satz (2) (Rechenregeln für konvergente Folgen)

Es seien $\boldsymbol{a} = (a_n)_{n\geq 1}$ *und* $\boldsymbol{b} = (b_n)_{n\geq 1}$ *Folgen.*

a) *Sind* $\boldsymbol{a}$ *eine Nullfolge und* $\boldsymbol{b}$ *eine beschränkte Folge, so gilt*

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0 \ .$$

b) *Sind* $\boldsymbol{a}$ *und* $\boldsymbol{b}$ *konvergente Folgen, so gilt:*

(i) $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n$ *und*

$$\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n \ .$$

(ii) *Ist* $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$, *so existiert ein* $k \in \mathbb{N}$, *sodass für alle* $n \geq k$ *gilt:*

$$b_n \neq 0 \quad \text{und} \quad \left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\geq k} \longrightarrow \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} \ .$$

Definition (2)

Es sei $\boldsymbol{a} = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge.

a) Für $n_0 \in \mathbb{N}$ heißt die Folge $(a_n)_{n\geq n_0}$ ein *Endstück* der Folge $\boldsymbol{a}$.

b) Ist $T \subset \mathbb{N}$ eine unendliche Teilmenge, $T = \{n_1, n_2, n_3, \ldots\}$ mit $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$, so heißt die Folge $(a_{n_i})_{i\in\mathbb{N}} = (a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \ldots)$ eine *Teilfolge* von $\boldsymbol{a}$.

c) Ist $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine bijektive Abbildung, so heißt die Folge $(a_{\varphi(j)})_{j\in\mathbb{N}} = (a_{\varphi(1)}, a_{\varphi(2)}, a_{\varphi(3)}, \ldots)$ eine *Umordnung* der Folge $\boldsymbol{a}$.

Satz (3)

Ist $\boldsymbol{a} = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, und ist die Folge $\boldsymbol{b} = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Endstück von $\boldsymbol{a}$ oder eine Teilfolge von $\boldsymbol{a}$ oder eine Umordnung von $\boldsymbol{a}$, oder ist $\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \neq b_n\}$ eine endliche Menge, so ist auch $\boldsymbol{b}$ konvergent, und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} b_n = a\ .$$

Definition (2)

Es sei $\boldsymbol{a} = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge.

a) Für $n_0 \in \mathbb{N}$ heißt die Folge $(a_n)_{n\geq n_0}$ ein *Endstück* der Folge $\boldsymbol{a}$.

b) Ist $T \subset \mathbb{N}$ eine unendliche Teilmenge, $T = \{n_1, n_2, n_3, \ldots\}$ mit $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$, so heißt die Folge $(a_{n_i})_{i\in\mathbb{N}} = (a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \ldots)$ eine *Teilfolge* von $\boldsymbol{a}$.

c) Ist $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine bijektive Abbildung, so heißt die Folge $(a_{\varphi(j)})_{j\in\mathbb{N}} = (a_{\varphi(1)}, a_{\varphi(2)}, a_{\varphi(3)}, \ldots)$ eine *Umordnung* der Folge $\boldsymbol{a}$.

Satz (3)

Ist $\boldsymbol{a} = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, und ist die Folge $\boldsymbol{b} = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Endstück von $\boldsymbol{a}$ oder eine Teilfolge von $\boldsymbol{a}$ oder eine Umordnung von $\boldsymbol{a}$, oder ist $\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \neq b_n\}$ eine endliche Menge, so ist auch $\boldsymbol{b}$ konvergent, und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} b_n = a\ .$$

4.2 Reelle Folgen

Satz (4)

Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \to a$ *und* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \to b$ *konvergente reelle Folgen, und für alle* $n \in \mathbb{N}$ *sei* $a_n \leq b_n$.

a) *Dann gilt:* $a \leq b$.

b) [Einzwickkriterium] *Ist* $\mathbf{c} = (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine reelle Folge mit*

$$a_n \leq c_n \leq b_n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \quad \text{und ist } a = b \ ,$$

so ist auch $\mathbf{c}$ *konvergent und* $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$.

Definition (4)

Eine reelle Folge $\boldsymbol{a} = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt:

nach $\left\{ \begin{array}{l} \textit{oben} \\ \textit{unten} \end{array} \right.$ *beschränkt*, wenn es ein $M \in \mathbb{R}$ gibt, sodass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\begin{cases} a_n \leq M \\ M \leq a_n \end{cases}$,

[*streng*] *monoton wachsend*, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $a_n \leq a_{n+1}$ [bzw. $a_n < a_{n+1}$],

[*streng*] *monoton fallend*, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $a_n \geq a_{n+1}$ [bzw. $a_n > a_{n+1}$],

monoton, wenn $\boldsymbol{a}$ entweder monoton wächst oder monoton fällt.

Satz (5)

Ist $\boldsymbol{a} = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine beschränkte und monotone Folge reeller Zahlen, so ist* $\boldsymbol{a}$ *konvergent mit*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} & \textit{falls } \boldsymbol{a} \textit{ monoton wächst} \\ \inf\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} & \textit{falls } \boldsymbol{a} \textit{ monoton fällt} \end{cases} .$$

Erweiterte Zahlengerade:

Wir ergänzen $\mathbb{R}$ durch 2 weitere Elemente $\infty = +\infty$ und $-\infty$ zur *erweiterten Zahlengeraden*

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\} .$$

Ordnungs- bzw. Rechenregeln für $\overline{\mathbb{R}}$**:**

Für beliebiges $a \in \mathbb{R}$ definiert man:

(i) $-\infty < a < \infty$

(ii) $a \pm \infty = \pm\infty + a = \pm\infty$

Satz (5)

Ist $\boldsymbol{a} = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine beschränkte und monotone Folge reeller Zahlen, so ist* $\boldsymbol{a}$ *konvergent mit*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} & \textit{falls } \boldsymbol{a} \textit{ monoton wächst} \\ \inf\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} & \textit{falls } \boldsymbol{a} \textit{ monoton fällt} \end{cases} .$$

Erweiterte Zahlengerade:

Wir ergänzen $\mathbb{R}$ durch 2 weitere Elemente $\infty = +\infty$ und $-\infty$ zur *erweiterten Zahlengeraden*

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\} .$$

Ordnungs- bzw. Rechenregeln für $\overline{\mathbb{R}}$:

Für beliebiges $a \in \mathbb{R}$ definiert man:

(i) $-\infty < a < \infty$

(ii) $a \pm \infty = \pm\infty + a = \pm\infty$

$$a \cdot (\pm\infty) = \pm\infty \cdot a = \begin{cases} \pm\infty & \text{falls } a > 0 \\ \mp\infty & \text{falls } a < 0 \end{cases} \quad \text{und} \quad \frac{a}{\pm\infty} = 0 \ .$$

(iii) $\infty + \infty = \infty \cdot \infty = (-\infty) \cdot (-\infty) = \infty$

$(-\infty) + (-\infty) = \infty \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot \infty = -\infty$

$|\infty| = |-\infty| = \infty$

Ist $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ nicht nach $\begin{cases} \text{oben} \\ \text{unten} \end{cases}$ beschränkt, so setzt man

$$\begin{cases} \sup(A) = \infty \\ \inf(A) = -\infty \end{cases} .$$

Weiters setzt man $\sup(\emptyset) = -\infty$ und $\inf(\emptyset) = \infty$.

Intervalle in $\overline{\mathbb{R}}$:

$[-\infty, \infty] = \overline{\mathbb{R}}$, $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$, $(0, \infty] = \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ usw.

Definition (4)

Eine reelle Folge $\boldsymbol{a} = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *bestimmt divergent gegen* $\begin{cases} \infty \\ -\infty \end{cases}$, wenn es zu jedem $M \in \mathbb{R}$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, sodass für alle $n \geq N$ gilt: $\begin{cases} M < a_n \\ a_n < M \end{cases}$.

Schreibweise: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \to \begin{cases} \infty \\ -\infty \end{cases}$ bzw. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} \infty \\ -\infty \end{cases}$.

Satz (6)

Die Aussagen von Satz 1.a), Satz 2.b) (falls die entsprechenden Ausdrücke definiert sind), Satz 3 und Satz 4.a) gelten auch für bestimmt divergente Folgen.
Satz 4.b): Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \to \infty$ und $a_n \leq c_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist auch $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \to \infty$.
Satz 5: Eine monotone reelle Folge ist konvergent oder bestimmt divergent.

Definition (4)

Eine reelle Folge $\boldsymbol{a} = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *bestimmt divergent gegen* $\begin{cases} \infty \\ -\infty \end{cases}$, wenn es zu jedem $M \in \mathbb{R}$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, sodass für alle $n \geq N$ gilt: $\begin{cases} M < a_n \\ a_n < M \end{cases}$.

Schreibweise: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \to \begin{cases} \infty \\ -\infty \end{cases}$ bzw. $\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} \infty \\ -\infty \end{cases}$.

Satz (6)

Die Aussagen von Satz 1.a), Satz 2.b) (falls die entsprechenden Ausdrücke definiert sind), Satz 3 und Satz 4.a) gelten auch für bestimmt divergente Folgen.

Satz 4.b): Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \to \infty$ *und* $a_n \leq c_n$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$*, so ist auch* $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \to \infty$.

Satz 5: Eine monotone reelle Folge ist konvergent oder bestimmt divergent.

4.3 Häufungswerte und Satz von Bolzano-Weierstraß

Definition (5)

Es sei $\boldsymbol{a} = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine $\begin{cases} \text{reelle} \\ \text{komplexe} \end{cases}$ Folge. Dann heißt $a \in \begin{cases} \overline{\mathbb{R}} \\ \mathbb{C} \end{cases}$ ein *Häufungswert* der Folge $\boldsymbol{a}$, wenn es eine Teilfolge $(a_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ von $\boldsymbol{a}$ mit $\lim\limits_{i\to\infty} a_{n_i} = a$ gibt

(d. h.: wenn es eine gegen a konvergente oder bestimmt divergente Teilfolge von $\boldsymbol{a}$ gibt).

Satz (7)

Es sei $\boldsymbol{a} = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine reelle oder komplexe Folge und* $H \subset \overline{\mathbb{R}}$ *(bzw.* $H \subset \mathbb{C}$*) die Menge der Häufungswerte von* $\boldsymbol{a}$*.*

a) *Dann gilt:*

$+\infty \in H \iff$ $\boldsymbol{a}$ *ist reell und nicht nach oben beschränkt.*

$-\infty \in H \iff$ $\boldsymbol{a}$ *ist reell und nicht nach unten beschränkt.*

b) *Für ein* $a \in \mathbb{C}$ *gilt:*

$a \in H \iff$ *für jedes* $\varepsilon > 0$ *gilt:* $\#\{n \in \mathbb{N} \mid |a_n - a| < \varepsilon\} = \infty$.

Satz (8) (Bolzano–Weierstraß)

Es sei $\boldsymbol{a} = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge und* H *die Menge der Häufungswerte von* $\boldsymbol{a}$.

a) [reelle Version] *Ist* $\boldsymbol{a}$ *eine reelle Folge, so existieren* $a_*, a^* \in H \subset \overline{\mathbb{R}}$, *sodass für alle* $a \in H$ *gilt:*

$$a_* \leq a \leq a^* \;;$$

insbesondere ist $H \neq \emptyset$.

Definition: $a_* = \liminf_{n\to\infty} a_n = \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n$ *heißt Limes inferior oder kleinster Häufungswert von* $\boldsymbol{a}$ *und*

$a^* = \limsup_{n\to\infty} a_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n$ *heißt Limes superior oder größter Häufungswert von* $\boldsymbol{a}$.

b) [komplexe Version]
Ist $\boldsymbol{a}$ *komplex und beschränkt, so ist* $H \neq \emptyset$.

Bemerkung:

Es sei $\boldsymbol{a}$ eine reelle Folge. Für ein $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$x = \limsup_{n\to\infty} a_n \iff \text{für alle } \varepsilon > 0 \text{ gilt: } \{n \in \mathbb{N} \mid x + \varepsilon < a_n\} \text{ ist endlich und } \{n \in \mathbb{N} \mid x - \varepsilon < a_n\} \text{ ist unendlich.}$$

$$x = \liminf_{n\to\infty} a_n \iff \text{für alle } \varepsilon > 0 \text{ gilt: } \{n \in \mathbb{N} \mid a_n < x - \varepsilon\} \text{ ist endlich und } \{n \in \mathbb{N} \mid a_n < x + \varepsilon\} \text{ ist unendlich.}$$

Satz (9) (Konvergenzkriterium nach Cauchy)

Eine (reelle oder komplexe) Folge $\boldsymbol{a} = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert genau dann, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, sodass für alle $m, n \geq N$ gilt:

$$|a_n - a_m| < \varepsilon \, .$$