§4. Folgen von (reellen und komplexen) Zahlen [Kö §5]

4.1 Grundbegriffe

Definition 1.

a) Eine *Folge* (reeller bzw. komplexer) Zahlen ist eine Abbildung

$$\boldsymbol{a}\colon \mathbb{Z}_{\geq k} \to \begin{cases} \mathbb{R} \\ \mathbb{C} \end{cases} \quad \text{mit einem } k \in \mathbb{Z}\ .$$

Schreibweise: $\boldsymbol{a}(n) = a_n \in \begin{cases} \mathbb{R} \\ \mathbb{C} \end{cases}$ ... *n-tes Folgenglied*; $\boldsymbol{a} = (a_n)_{n\geq k} = (a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots)$.

b) Eine Folge $(a_n)_{n\geq k}$ heißt *konvergent*, wenn es eine Zahl $a \in \mathbb{C}$ mit folgender Eigenschaft gibt:

zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geq N$ gilt: $|a_n - a| < \varepsilon$.

Ist dies der Fall, so heißt a der *Grenzwert* (oder: *Limes*) der Folge.
Schreibweise: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ bzw. $(a_n)_{n\geq k} \to a$

Eine Folge, die gegen 0 konvergiert, heißt *Nullfolge*.

Eine Folge, die nicht konvergent ist, heißt *divergent*.

c) Eine Folge $(a_n)_{n\geq k}$ heißt *beschränkt*, falls die Menge $\{|a_n| \mid n \geq k\}$ beschränkt ist; andernfalls heißt sie *unbeschränkt*.

Beispiel 41: Versuchen Sie Folgen $\boldsymbol{a} = (a_n)_{n\geq 1}$ reeller oder komplexer Zahlen konkret anzugeben: z. B.: $a_n = i^n$ oder $a_n = n$-te Dezimalstelle von π oder $a_n = n^2 - in$ oder a_n wird mit einem Würfel gewürfelt (zufällig) oder ...
Welche dieser Folgen sind beschränkt?

Satz 1.

a) *Ist eine Folge konvergent, so ist ihr Limes eindeutig bestimmt.*

b) *Eine konvergente Folge ist beschränkt.*

c) *Ist $(a_n)_{n\geq k} \to a$ eine gegen $a \in \mathbb{C}$ konvergente Folge, so gilt:*

$$\lim_{n\to\infty} \overline{a_n} = \overline{a}, \quad \lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|, \quad \lim_{n\to\infty} \Re(a_n) = \Re(a), \quad \lim_{n\to\infty} \Im(a_n) = \Im(a).$$

Insbesondere gilt: Sind alle $a_n \in \mathbb{R}$, so ist auch $a \in \mathbb{R}$.

Beispiel 42: Geben Sie die ersten 10 Glieder der Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ mit $a_n = \left(\frac{1+i}{2}\right)^n$ an!
Versuchen Sie, Formeln für $|a_n|$, $\Re(a_n)$ und $\Im(a_n)$ zu finden.
Bestimmen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n|$, $\lim\limits_{n\to\infty} \Re(a_n)$, $\lim\limits_{n\to\infty} \Im(a_n)$.

Satz 2 (**Rechenregeln für konvergente Folgen**).
Es seien $\boldsymbol{a} = (a_n)_{n\geq 1}$ *und* $\boldsymbol{b} = (b_n)_{n\geq 1}$ *Folgen.*

a) *Sind* $\boldsymbol{a}$ *eine Nullfolge und* $\boldsymbol{b}$ *eine beschränkte Folge, so gilt*

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0 \ .$$

b) *Sind* $\boldsymbol{a}$ *und* $\boldsymbol{b}$ *konvergente Folgen, so gilt:*

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ *und* $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

(ii) *Ist* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$, *so existiert ein* $k \in \mathbb{N}$, *sodass für alle* $n \geq k$ *gilt:*

$$b_n \neq 0 \quad \textit{und} \quad \left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\geq k} \longrightarrow \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} \ .$$

Definition 2. Es sei $\boldsymbol{a} = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge.

a) Ist $n_0 \in \mathbb{N}$, so heißt die Folge $(a_n)_{n\geq n_0}$ ein *Endstück* der Folge $\boldsymbol{a}$.

b) Ist $T \subset \mathbb{N}$ eine unendliche Teilmenge, $T = \{n_1, n_2, n_3, \ldots\}$ mit $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$, so heißt die Folge $(a_{n_i})_{i\in\mathbb{N}} = (a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \ldots)$ eine *Teilfolge* von $\boldsymbol{a}$.

c) Ist $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine bijektive Abbildung, so heißt die Folge $(a_{\varphi(j)})_{j\in\mathbb{N}} = (a_{\varphi(1)}, a_{\varphi(2)}, a_{\varphi(3)}, \ldots)$ eine *Umordnung* der Folge $\boldsymbol{a}$.

Satz 3. *Ist* $\boldsymbol{a} = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine konvergente Folge mit* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, *und ist die Folge* $\boldsymbol{b} = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ein Endstück von* $\boldsymbol{a}$ *oder eine Teilfolge von* $\boldsymbol{a}$ *oder eine Umordnung von* $\boldsymbol{a}$, *oder ist* $\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \neq b_n\}$ *eine endliche Menge, so ist auch* $\boldsymbol{b}$ *konvergent, und es gilt*

$$\lim_{n\to\infty} b_n = a \ .$$

Beispiel 43: Geben Sie Endstücke, Teilfolgen bzw. Umordnungen für einige Folgen aus Beispiel 41 an!

4.2 Reelle Folgen

Satz 4. *Es seien* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \to a$ *und* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \to b$ *konvergente reelle Folgen, und für alle* $n \in \mathbb{N}$ *sei* $a_n \leq b_n$.

a) *Dann gilt:* $a \leq b$.

b) [**Einzwickkriterium**] *Ist* $\boldsymbol{c} = (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine reelle Folge mit* $a_n \leq c_n \leq b_n$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$ *und ist* $a = b$, *so ist auch* $\boldsymbol{c}$ *konvergent und* $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$.

Definition 3. Eine reelle Folge $\boldsymbol{a} = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt:

nach $\begin{cases} \textit{oben} \\ \textit{unten} \end{cases}$ *beschränkt*, wenn es ein $M \in \mathbb{R}$ gibt, sodass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\begin{cases} a_n \le M \\ M \le a_n \end{cases}$,

[*streng*] *monoton wachsend*, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $a_n \le a_{n+1}$ [bzw. $a_n < a_{n+1}$],

[*streng*] *monoton fallend*, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $a_n \ge a_{n+1}$ [bzw. $a_n > a_{n+1}$],

monoton, wenn $\boldsymbol{a}$ entweder monoton wächst oder monoton fällt.

Beispiel 44: Wieso ist Definition 3 für Folgen mit komplexen Gliedern sinnlos?

Satz 5. *Ist $\boldsymbol{a} = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte und monotone Folge reeller Zahlen, so ist $\boldsymbol{a}$ konvergent mit* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} & \textit{falls } \boldsymbol{a} \textit{ monoton wächst} \\ \inf\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} & \textit{falls } \boldsymbol{a} \textit{ monoton fällt} \end{cases}$.

Erweiterte Zahlengerade:

Wir ergänzen $\mathbb{R}$ durch 2 weitere Elemente $\infty = +\infty$ und $-\infty$ zur *erweiterten Zahlengeraden*

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\} .$$

Ordnungs- bzw. Rechenregeln für $\overline{\mathbb{R}}$:

Für beliebiges $a \in \mathbb{R}$ definiert man:

(i) $-\infty < a < \infty$

(ii) $a \pm \infty = \pm\infty + a = \pm\infty$

$$a \cdot (\pm\infty) = \pm\infty \cdot a = \begin{cases} \pm\infty & \text{falls } a > 0 \\ \mp\infty & \text{falls } a < 0 \end{cases} \qquad \text{und} \qquad \frac{a}{\pm\infty} = 0$$

(iii) $\infty + \infty = \infty \cdot \infty = (-\infty) \cdot (-\infty) = \infty$

$(-\infty) + (-\infty) = \infty \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot \infty = -\infty$

$|\infty| = |-\infty| = \infty$

Ist $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ nicht nach $\begin{cases} \text{oben} \\ \text{unten} \end{cases}$ beschränkt, so setzt man $\begin{cases} \sup(A) = \infty \\ \inf(A) = -\infty \end{cases}$.

Weiters setzt man $\sup(\emptyset) = -\infty$ und $\inf(\emptyset) = \infty$.

Intervalle in $\overline{\mathbb{R}}$:

$[-\infty, \infty] = \overline{\mathbb{R}}$, $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$, $(0, \infty] = \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ usw.

Definition 4. Eine reelle Folge $\boldsymbol{a} = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *bestimmt divergent gegen* $\begin{cases} \infty \\ -\infty \end{cases}$, wenn es zu jedem $M \in \mathbb{R}$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, sodass für alle $n \geq N$ gilt: $\begin{cases} M < a_n \\ a_n < M \end{cases}$.

Schreibweise: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \to \begin{cases} \infty \\ -\infty \end{cases}$ bzw. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} \infty \\ -\infty \end{cases}$.

Beispiel 45: Geben Sie jeweils eine Nullfolge $(a_n)_{n\geq 1}$ und eine gegen ∞ bestimmt divergente Folge $(b_n)_{n\geq 1}$ an, sodass die Produktfolge $(a_nb_n)_{n\geq 1}$
a) gegen 0 konvergiert *b) gegen 3 konvergiert* *c) bestimmt gegen ∞ divergiert*
d) gegen -2 konvergiert *e) weder konvergiert noch bestimmt divergiert.*

Satz 6. *Die Aussagen von* Satz 1.a), Satz 2.b) *(falls die entsprechenden Ausdrücke definiert sind),* Satz 3 *und* Satz 4.a) *gelten auch für bestimmt divergente Folgen.*
Satz 4.b): *Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \to \infty$ und $a_n \leq c_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist auch $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \to \infty$.*
Satz 5: *Eine monotone reelle Folge ist konvergent oder bestimmt divergent.*

4.3 Häufungswerte und Satz von Bolzano-Weierstraß

Definition 5. Es sei $\boldsymbol{a} = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine $\begin{cases} \text{reelle} \\ \text{komplexe} \end{cases}$ Folge. Dann heißt $a \in \begin{cases} \overline{\mathbb{R}} \\ \mathbb{C} \end{cases}$ ein *Häufungswert* der Folge $\boldsymbol{a}$, wenn es eine Teilfolge $(a_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ von $\boldsymbol{a}$ mit $\lim\limits_{i\to\infty} a_{n_i} = a$ gibt
(d. h.: wenn es eine gegen a konvergente oder bestimmt divergente Teilfolge von $\boldsymbol{a}$ gibt).

Beispiel 46: Bestimmen Sie für die Folgen aus Beispiel 41 alle Häufungswerte (welche Probleme treten dabei auf?).

Satz 7. *Es sei $\boldsymbol{a} = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle oder komplexe Folge und $H \subset \overline{\mathbb{R}}$ (bzw. $H \subset \mathbb{C}$) die Menge der Häufungswerte von $\boldsymbol{a}$.*

a) *Es gilt:*

$+\infty \in H \iff \boldsymbol{a}$ *ist reell und nicht nach oben beschränkt.*

$-\infty \in H \iff \boldsymbol{a}$ *ist reell und nicht nach unten beschränkt.*

b) *Für ein $a \in \mathbb{C}$ gilt:*

$a \in H \iff$ *für jedes $\varepsilon > 0$ gilt:* $\#\{n \in \mathbb{N} \mid |a_n - a| < \varepsilon\} = \infty$.

Beispiel 47: Geben Sie eine reelle Folge an, die $-\infty$ als Häufungspunkt besitzt und dennoch nicht bestimmt nach $-\infty$ divergiert.

Satz 8 (Bolzano–Weierstraß).
Es sei $\boldsymbol{a} = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge und H die Menge der Häufungswerte von $\boldsymbol{a}$.

a) [**reelle Version**] *Ist $\boldsymbol{a}$ eine reelle Folge, so existieren $a_*, a^* \in H \subset \overline{\mathbb{R}}$, sodass für alle $a \in H$ gilt:*

$$a_* \leq a \leq a^* \ ;$$

insbesondere ist $H \neq \emptyset$.

Definition: $a_* = \liminf_{n\to\infty} a_n = \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n$ heißt *Limes inferior* oder *kleinster Häufungswert* von $\boldsymbol{a}$ und
$a^* = \limsup_{n\to\infty} a_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n$ heißt *Limes superior* oder *größter Häufungswert* von $\boldsymbol{a}$.

b) [**komplexe Version**] *Ist $\boldsymbol{a}$ komplex und beschränkt, so ist $H \neq \emptyset$.*

Beispiel 48: a) Welche Eigenschaft besitzt eine komplexe Folge, die keinen Häufungswert besitzt? b) Können Sie eine komplexe Folge mit genau einem Häufungswert angeben, die dennoch nicht konvergiert? Kann dies auch für eine beschränkte komplexe Folge zutreffen?

Beispiel 49: Die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ sei eine beliebige Abzählung von $\mathbb{Q}$ (d.h.: jede rationale Zahl tritt genau einmal als Folgenglied auf; wieso gibt es so etwas?)
Überlegen Sie sich, dass $\overline{\mathbb{R}}$ die Menge aller Häufungspunkte dieser Folge ist (Erinnern Sie sich an die Beispiele 20 und 21!)

Bemerkung:
Es sei $\boldsymbol{a}$ eine reelle Folge. Für ein $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$x = \limsup_{n\to\infty} a_n \iff \text{für alle } \varepsilon > 0 \text{ gilt: } \begin{array}{l} \{n \in \mathbb{N} \mid x + \varepsilon < a_n\} \text{ ist endlich und} \\ \{n \in \mathbb{N} \mid x - \varepsilon < a_n\} \text{ ist unendlich.} \end{array}$$

$$x = \liminf_{n\to\infty} a_n \iff \text{für alle } \varepsilon > 0 \text{ gilt: } \begin{array}{l} \{n \in \mathbb{N} \mid a_n < x - \varepsilon\} \text{ ist endlich und} \\ \{n \in \mathbb{N} \mid a_n < x + \varepsilon\} \text{ ist unendlich.} \end{array}$$

Satz 9 (Konvergenzkriterium nach Cauchy).
Eine (reelle oder komplexe) Folge $\boldsymbol{a} = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert genau dann, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, sodass für alle $m, n \geq N$ gilt:

$$|a_n - a_m| < \varepsilon \ .$$

Beispiel 50: Geben Sie die „logisch verneinte" Version von Satz 9 an: „Eine (reelle oder komplexe) Folge $\boldsymbol{a} = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert genau dann, wenn …".