ANALYSIS 1

Kapitel 3: Funktionen

MAB.01012UB MAT.101UB Vorlesung im WS 2017/18

Günter LETTL

Institut für Mathematik und wissenschaftliches Rechnen
Karl-Franzens-Universität Graz

3.1 Grundbegriffe

Definition (1)

A und B seien Mengen.

a) Eine *Abbildung* (oder *Funktion*) *f von A nach B* (Schreibweise: $f\colon A \to B$) ist eine Vorschrift, die jedem $x \in A$ genau ein Element $y \in B$ zuordnet. Dann heißen:

y das *Bild von x unter f* (oder: der *Wert von f an der Stelle x*), Schreibweise: $y = f(x)$ bzw. $x \mapsto y$;

A der *Definitionsbereich* von f,

B der *Wertevorrat* (oder *Zielbereich*) von f und

$$\mathrm{Graph}(f) = \{(x, y) \in A \times B \mid y = f(x)\}$$

der *Graph* von f.

Definition (1) (Fortsetzung)

b) Es sei $f\colon A \to B$ eine Abbildung.

Ist $B \subset \mathbb{R}$ [bzw. $B \subset \mathbb{C}$], so heißt f eine *reellwertige* [bzw. *komplexwertige*] *Funktion*.

Sind $A, B \subset \mathbb{R}$ [bzw. $A, B \subset \mathbb{C}$], so heißt f eine *reelle* [bzw. *komplexe*] *Funktion* (*in einer Variablen*).

Ist $g\colon A \to B$ eine weitere Abbildung von A nach B, so heißen f und g *gleich* ($f = g$), wenn für alle $x \in A$ gilt: $f(x) = g(x)$.

Definition (2)

Es sei $f\colon A \to B$ eine Abbildung.

a) Für eine Teilmenge $A' \subset A$ heißt

$$f(A') = \{f(x) \mid x \in A'\}$$

das *Bild von A' unter f*;
insbesondere heißt $f(A)$ das *Bild* (oder die *Wertemenge*) *von f*.

Für eine Teilmenge $B' \subset B$ heißt

$$f^{-1}(B') = \{x \in A \mid f(x) \in B'\}$$

das *Urbild von B' unter f*.

b) Ist $g\colon B \to C$ eine weitere Abbildung, so heißt die Abbildung

$$\begin{aligned} g \circ f\colon A &\to C \\ x &\mapsto g(f(x)) \end{aligned}$$

die *Komposition* (oder *Hintereinanderausführung*) *von g und f*
(Sprechweise: „g nach f").

Lemma (1)

Ist $f\colon A \to B$ eine Abbildung, so gilt:

a) $A' \subset A \implies A' \subset f^{-1}(f(A'))$

b) $B' \subset B \implies f(f^{-1}(B')) = B' \cap f(A) \subset B'$

Definition (3)

Eine Abbildung $f\colon A \to B$ heißt

- *injektiv*, falls für alle $x_1, x_2 \in A$ gilt: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ [bzw. äquivalent dazu: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$].
- *surjektiv*, falls $f(A) = B$ gilt [d. h.: zu jedem $y \in B$ existiert (mindestens) ein $x \in A$ mit $f(x) = y$].
- *bijektiv*, falls f injektiv und surjektiv ist.

Lemma (1)

Ist $f\colon A \to B$ eine Abbildung, so gilt:

a) $A' \subset A \implies A' \subset f^{-1}(f(A'))$

b) $B' \subset B \implies f(f^{-1}(B')) = B' \cap f(A) \subset B'$

Definition (3)

Eine Abbildung $f\colon A \to B$ heißt

- *injektiv*, falls für alle $x_1, x_2 \in A$ gilt: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ [bzw. äquivalent dazu: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$].
- *surjektiv*, falls $f(A) = B$ gilt [d. h.: zu jedem $y \in B$ existiert (mindestens) ein $x \in A$ mit $f(x) = y$].
- *bijektiv*, falls f injektiv und surjektiv ist.

Lemma (2)

Es sei $f\colon A \to B$ eine injektive Abbildung. Dann existiert die Umkehrabbildung $f^{-1}\colon f(A) \to A$, und ihr Graph ist

$$Graph(f^{-1}) = \{(y,x) \mid y \in f(A) \text{ und } x \in A \text{ mit } f(x) = y\} \subset f(A) \times A.$$

f^{-1} ist die eindeutig bestimmte Abbildung von $f(A)$ nach A, die $f^{-1} \circ f = id_A$ und $f \circ f^{-1} = id_{f(A)}$ erfüllt.

Definition (4)

a) Es seien $f, g\colon A \to B \subset \mathbb{C}$ (reell- oder) komplexwertige Funktionen. Dann definiert man

die *Summe* von f und g: $\begin{cases} f+g\colon A \to \mathbb{C} \\ \qquad x \mapsto f(x)+g(x) \end{cases}$,

das *Produkt* von f und g: $\begin{cases} f \cdot g\colon A \to \mathbb{C} \\ \qquad x \mapsto f(x) \cdot g(x) \end{cases}$,

Lemma (2)

Es sei $f\colon A \to B$ eine injektive Abbildung. Dann existiert die Umkehrabbildung $f^{-1}\colon f(A) \to A$, und ihr Graph ist

$$Graph(f^{-1}) = \{(y,x) \mid y \in f(A) \text{ und } x \in A \text{ mit } f(x) = y\} \subset f(A) \times A.$$

f^{-1} ist die eindeutig bestimmte Abbildung von $f(A)$ nach A, die $f^{-1} \circ f = id_A$ und $f \circ f^{-1} = id_{f(A)}$ erfüllt.

Definition (4)

a) Es seien $f, g\colon A \to B \subset \mathbb{C}$ (reell- oder) komplexwertige Funktionen. Dann definiert man

die *Summe* von f und g: $\begin{cases} f+g\colon A \to \mathbb{C} \\ \qquad x \mapsto f(x)+g(x) \end{cases}$,

das *Produkt* von f und g: $\begin{cases} f \cdot g\colon A \to \mathbb{C} \\ \qquad x \mapsto f(x) \cdot g(x) \end{cases}$,

Definition (4) (Fortsetzung)

den *Quotienten* von f durch g: $\begin{cases} \dfrac{f}{g}\colon A_0 \to \mathbb{C} \\ \qquad x \mapsto \dfrac{f(x)}{g(x)} \end{cases}$ mit

$A_0 = \{x \in A \mid g(x) \neq 0\}$,

die zu f *konjugiert komplexe* Funktion: $\begin{cases} \overline{f}\colon A \to \mathbb{C} \\ \qquad x \mapsto \overline{f(x)} \end{cases}$,

den *Realteil* von f: $\begin{cases} \Re(f)\colon A \to \mathbb{R} \\ \qquad x \mapsto \Re(f(x)) \end{cases}$

und den *Imaginärteil* von f: $\begin{cases} \Im(f)\colon A \to \mathbb{R} \\ \qquad x \mapsto \Im(f(x)) \end{cases}$.

Definition (4) (Fortsetzung)

b) Eine reelle Funktion $f\colon A \to B$ (d.h.: $A, B \subset \mathbb{R}$) heißt *[streng] monoton wachsend*, wenn für alle $x_1, x_2 \in A$ mit $x_1 < x_2$ gilt:

$$f(x_1) \leq f(x_2) \quad [\text{bzw. } f(x_1) < f(x_2)]\ ,$$

[streng] monoton fallend, wenn für alle $x_1, x_2 \in A$ mit $x_1 < x_2$ gilt:

$$f(x_1) \geq f(x_2) \quad [\text{bzw. } f(x_1) > f(x_2)].$$

Lemma (3)

Es seien $A, B \subset \mathbb{R}$ und $f\colon A \to B$ eine reelle Funktion. Ist f streng monoton wachsend [bzw. streng monoton fallend], so ist f injektiv und besitzt daher eine Umkehrfunktion $f^{-1}\colon f(A) \to A$.

f^{-1} ist dann ebenfalls streng monoton wachsend [bzw. streng monoton fallend].

Definition (4) (Fortsetzung)

b) Eine reelle Funktion $f\colon A \to B$ (d.h.: $A, B \subset \mathbb{R}$) heißt

[streng] monoton wachsend, wenn für alle $x_1, x_2 \in A$ mit $x_1 < x_2$ gilt:

$$f(x_1) \leq f(x_2) \quad [\text{bzw. } f(x_1) < f(x_2)]\ ,$$

[streng] monoton fallend, wenn für alle $x_1, x_2 \in A$ mit $x_1 < x_2$ gilt:

$$f(x_1) \geq f(x_2) \quad [\text{bzw. } f(x_1) > f(x_2)].$$

Lemma (3)

Es seien $A, B \subset \mathbb{R}$ und $f\colon A \to B$ eine reelle Funktion. Ist f streng monoton wachsend [bzw. streng monoton fallend], so ist f injektiv und besitzt daher eine Umkehrfunktion $f^{-1}\colon f(A) \to A$. f^{-1} ist dann ebenfalls streng monoton wachsend [bzw. streng monoton fallend].

3.2 Abzählbarkeit von Mengen

Definition (5)

A und B seien Mengen.

a) A und B heißen *gleichmächtig*, wenn es eine bijektive Abbildung $f\colon A \to B$ gibt.

b) Die Menge A heißt

abzählbar, wenn A und $\mathbb{N}$ gleichmächtig sind, d. h.: es gibt eine bijektive Abbildung $f\colon \mathbb{N} \to A$ (eine „Abzählung von A").

höchstens abzählbar, wenn A endlich oder abzählbar ist.

überabzählbar, wenn A unendlich und nicht abzählbar ist.

Satz (1)

a) $\mathbb{Z}$ *und* $\mathbb{Q}$ *sind abzählbare Mengen.*

b) *Die Menge* $\mathbb{R}$ *ist überabzählbar.*

3.2 Abzählbarkeit von Mengen

Definition (5)

A und B seien Mengen.

a) A und B heißen *gleichmächtig*, wenn es eine bijektive Abbildung $f\colon A \to B$ gibt.

b) Die Menge A heißt

abzählbar, wenn A und $\mathbb{N}$ gleichmächtig sind, d. h.: es gibt eine bijektive Abbildung $f\colon \mathbb{N} \to A$ (eine „Abzählung von A").

höchstens abzählbar, wenn A endlich oder abzählbar ist.

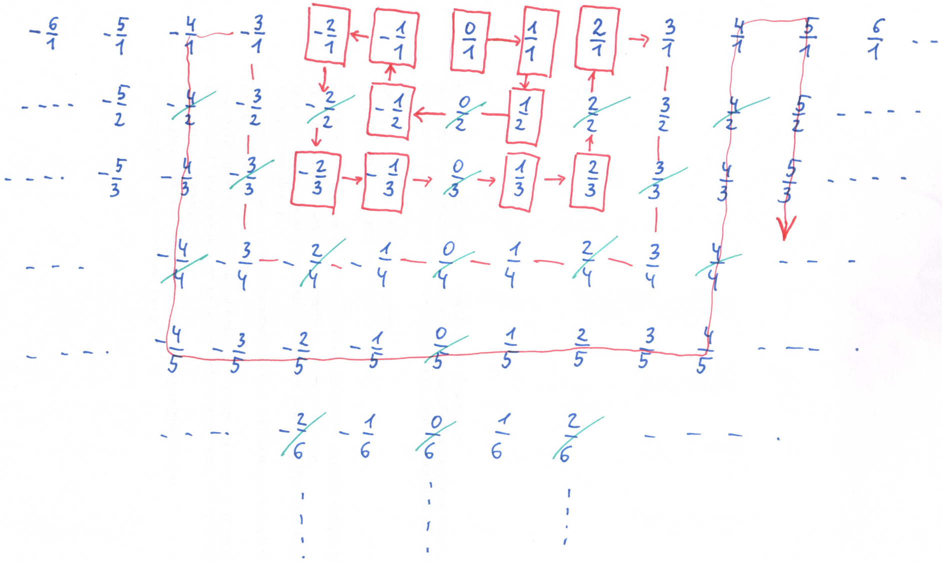
überabzählbar, wenn A unendlich und nicht abzählbar ist.

Satz (1)

a) *$\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ sind abzählbare Mengen.*

b) *Die Menge $\mathbb{R}$ ist überabzählbar.*

$$
\begin{array}{cccccccccccccc}
-\frac{6}{1} & -\frac{5}{1} & -\frac{4}{1} & -\frac{3}{1} & -\frac{2}{1} & -\frac{1}{1} & \boxed{\frac{0}{1}} & \frac{1}{1} & \frac{2}{1} & \frac{3}{1} & \frac{4}{1} & \frac{5}{1} & \frac{6}{1} & \cdots \\[2ex]
\cdots & -\frac{5}{2} & -\frac{4}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{2}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{0}{2} & \frac{1}{2} & \frac{2}{2} & \frac{3}{2} & \frac{4}{2} & \frac{5}{2} & \cdots & \\[2ex]
\cdots & -\frac{5}{3} & -\frac{4}{3} & -\frac{3}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{0}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{3}{3} & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} & \cdots & \\[2ex]
\cdots & & -\frac{4}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{2}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{0}{4} & \frac{1}{4} & \frac{2}{4} & \frac{3}{4} & \frac{4}{4} & \cdots & & \\[2ex]
\cdots & \cdots & -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{0}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & \cdots & & \\[2ex]
 & \cdots & & & -\frac{2}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{0}{6} & \frac{1}{6} & \frac{2}{6} & \cdots & & & & \\[2ex]
 & & & & \vdots & & & & \vdots & & & & &
\end{array}
$$


-6/1 -5/1 -4/1 -3/1 -2/1 -1/1 0/1 1/1 2/1 3/1 4/1 5/1 6/1
-5/2 -4/2 -3/2 -2/2 -1/2 0/2 1/2 2/2 3/2 4/2 5/2
-5/3 -4/3 -3/3 -2/3 -1/3 0/3 1/3 2/3 3/3 4/3 5/3
-4/4 -3/4 -2/4 -1/4 0/4 1/4 2/4 3/4 4/4
-4/5 -3/5 -2/5 -1/5 0/5 1/5 2/5 3/5 4/5
-2/6 -1/6 0/6 1/6 2/6

3.3 Polynomfunktionen

Für den gesamten Abschnitt sei $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

Definition (6)

Eine Abbildung $f\colon K \to K$ heißt $\left\{ \begin{array}{ll} \textit{reelle}, & \text{falls } K = \mathbb{R}, \\ \textit{komplexe}, & \text{falls } K = \mathbb{C}, \end{array} \right\}$

Polynomfunktion (auch: Polynom), wenn es ein $n \in \mathbb{N}_0$ und $a_0, a_1, \ldots, a_n \in K$ gibt, sodass für alle $x \in K$ gilt:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n \ .$$

Ist $a_n \neq 0$, so heißt f Polynomfunktion *vom Grad* n und a_n heißt der führende (oder: höchste) Koeffizient von f.

Ist $\alpha \in K$ mit $f(\alpha) = 0$, so heißt α eine *Nullstelle* von f.

Satz (2)

Es sei $f\colon K \to K$ eine Polynomfunktion vom Grad $n \in \mathbb{N}$ und $\alpha \in K$. Dann gilt:

a) *Es existiert eine Polynomfunktion $g\colon K \to K$ vom Grad $n-1$, sodass für alle $x \in K$ gilt:*

$$f(x) = (x-\alpha)\,g(x) + f(\alpha)\ .$$

b) $f(\alpha) = 0 \iff$ *Es existiert eine Polynomfunktion $g\colon K \to K$ vom Grad $n-1$, sodass für alle $x \in K$ gilt:*

$$f(x) = (x-\alpha)\,g(x)$$

[Sprechweise: „$x-\alpha$ teilt $f(x)$"].

Satz (3)

Es sei $f\colon K \to K$ *eine Polynomfunktion vom Grad* $n \in \mathbb{N}_0$.
Dann besitzt f *in* K *höchstens* n *Nullstellen.*

Korollar (1)

Es seien $f, g\colon K \to K$ *Polynomfunktionen mit*

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \quad \text{und} \quad g(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i \quad \text{für ein } n \in \mathbb{N}_0 \ .$$

Sind $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1} \in K$ *paarweise verschieden und gilt für alle* k *mit* $1 \leq k \leq n+1$:

$$f(x_k) = g(x_k) \ ,$$

so folgt $a_i = b_i$ *für alle* i *mit* $0 \leq i \leq n$ *(und somit* $f = g$*).*

Satz (3)

Es sei $f\colon K \to K$ eine Polynomfunktion vom Grad $n \in \mathbb{N}_0$. Dann besitzt f in K höchstens n Nullstellen.

Korollar (1)

Es seien $f, g\colon K \to K$ Polynomfunktionen mit

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \quad \text{und} \quad g(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i \quad \text{für ein } n \in \mathbb{N}_0 \ .$$

Sind $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1} \in K$ paarweise verschieden und gilt für alle k mit $1 \le k \le n+1$:

$$f(x_k) = g(x_k) \ ,$$

so folgt $a_i = b_i$ für alle i mit $0 \le i \le n$ (und somit $f = g$).

Korollar (2)

Ist $0 \neq f\colon K \to K$ *eine Polynomfunktion, so ist ihr Grad* $n \in \mathbb{N}_0$ *eindeutig bestimmt, und es existieren eindeutig bestimmte* $a_0, a_1, \ldots, a_n \in K$ *mit* $a_n \neq 0$*, sodass für alle* $x \in K$ *gilt:* $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$.

Korollar (3) (Interpolation nach Lagrange)

Es sei $n \in \mathbb{N}_0$*;* $x_0, x_1 \ldots, x_n \in K$ *seien paarweise verschieden, und* $y_0, y_1, \ldots, y_n \in K$.

Dann gibt es genau eine Polynomfunktion $f\colon K \to K$ *vom Grade* $\leq n$*, sodass für alle* i *mit* $0 \leq i \leq n$ *gilt:*

$$f(x_i) = y_i \quad [\text{„}\textit{Interpolationseigenschaft}\text{"}].$$

Korollar (2)

Ist $0 \neq f\colon K \to K$ *eine Polynomfunktion, so ist ihr Grad* $n \in \mathbb{N}_0$ *eindeutig bestimmt, und es existieren eindeutig bestimmte* $a_0, a_1, \ldots, a_n \in K$ *mit* $a_n \neq 0$*, sodass für alle* $x \in K$ *gilt:* $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$.

Korollar (3) (Interpolation nach Lagrange)

Es sei $n \in \mathbb{N}_0$*;* $x_0, x_1 \ldots, x_n \in K$ *seien paarweise verschieden, und* $y_0, y_1, \ldots, y_n \in K$.

Dann gibt es genau eine Polynomfunktion $f\colon K \to K$ *vom Grade* $\leq n$*, sodass für alle* i *mit* $0 \leq i \leq n$ *gilt:*

$$f(x_i) = y_i \quad [\text{„\textit{Interpolationseigenschaft}"}].$$

Der allgemeine Binomialkoeffizient:

Für $n \in \mathbb{N}_0$ und $z \in \mathbb{C}$ definiert man

$$\binom{z}{n} := \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad n = 0 \\ \dfrac{z(z-1)\dots(z-n+1)}{n!} & \text{falls} \quad n \geq 1 \end{cases} .$$

$\binom{z}{n}$ ist eine komplexe Polynomfunktion vom Grad n (in der Variablen z) mit Nullstellen $0, 1, 2, \dots, n-1$.

Satz (4) (Additionstheorem für allgemeine Binomialkoeffizienten)

Für $w, z \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: $\displaystyle\binom{w+z}{n} = \sum_{i=0}^{n} \binom{w}{i}\binom{z}{n-i}$.

Satz (5)

Ist $0 \neq f\colon K \to K$ *eine Polynomfunktion und* $\alpha \in K$*, so existieren genau ein* $e \in \mathbb{N}_0$ *und genau eine Polynomfunktion* $g\colon K \to K$*, sodass für alle* $x \in K$ *gilt:*

$$f(x) = (x-\alpha)^e g(x) \quad \text{und} \quad g(\alpha) \neq 0\ .$$

Definition: *Ist* $e > 0$*, so heißt* α *eine e-fache Nullstelle von* f*.*

Satz (6) (Zerlegungssatz für komplexe Polynome)

Ist $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *eine (komplexe) Polynomfunktion vom Grad* $n \in \mathbb{N}_0$*, so existieren eindeutig bestimmte* $0 \neq a \in \mathbb{C}$*,* $r \in \mathbb{N}_0$*, paarweise verschiedene* $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{C}$ *und* $e_1, \ldots, e_r \in \mathbb{N}$ *mit* $e_1 + \cdots + e_r = n$*, sodass für alle* $x \in \mathbb{C}$ *gilt:*

$$f(x) = a \cdot \prod_{i=1}^{r} (x-\alpha_i)^{e_i}.$$

Satz (5)

Ist $0 \neq f\colon K \to K$ eine Polynomfunktion und $\alpha \in K$, so existieren genau ein $e \in \mathbb{N}_0$ und genau eine Polynomfunktion $g\colon K \to K$, sodass für alle $x \in K$ gilt:

$$f(x) = (x-\alpha)^{e} g(x) \quad \text{und} \quad g(\alpha) \neq 0\ .$$

Definition: *Ist $e > 0$, so heißt α eine e-fache Nullstelle von f.*

Satz (6) (Zerlegungssatz für komplexe Polynome)

Ist $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine (komplexe) Polynomfunktion vom Grad $n \in \mathbb{N}_0$, so existieren eindeutig bestimmte $0 \neq a \in \mathbb{C}$, $r \in \mathbb{N}_0$, paarweise verschiedene $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{C}$ und $e_1, \ldots, e_r \in \mathbb{N}$ mit $e_1 + \cdots + e_r = n$, sodass für alle $x \in \mathbb{C}$ gilt:

$$f(x) = a \cdot \prod_{i=1}^{r} (x-\alpha_i)^{e_i}.$$

3.4 Rationale Funktionen

Für den gesamten Abschnitt sei $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

Definition (7)

$f, g\colon K \to K$ seien Polynomfunktionen mit $g \neq 0$ und $E = \{\alpha \in K \mid g(\alpha) = 0\}$. Dann heißt

$$\begin{aligned} h = \frac{f}{g}: \; K \setminus E &\to K \\ x &\mapsto \frac{f(x)}{g(x)} \end{aligned}$$

eine *rationale Funktion* auf K.

Ist $\alpha \in E$ eine e-fache Nullstelle von g und $f(\alpha) \neq 0$, so heißt α eine *e-fache Polstelle* (oder: *Pol der Ordnung e*) von h.

Satz (7) (Partialbruchzerlegung in $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$)

Es sei $h = \dfrac{f}{g} : K \setminus E \to K$ *eine rationale Funktion, wobei*

$$g(x) = \prod_{i=1}^{r} (x - \alpha_i)^{m_i} \cdot \prod_{i=1}^{t} (x^2 + b_i x + c_i)^{k_i}$$

mit paarweise verschiedenen Polynomfunktionen $(x - \alpha_1), \ldots$ $(x^2 + b_t x + c_t)$*, wobei die quadratischen Polynomfunktionen keine Nullstellen in* K *besitzen,* $r, t \in \mathbb{N}_0$*,* $m_i, k_i \in \mathbb{N}$ *und* $\alpha_i, b_i, c_i \in K$*.*

Dann besitzt h *eine eindeutige Darstellung der Form*

$$h(x) = p(x) + \sum_{i=1}^{r} \left(\sum_{j=1}^{m_i} \frac{a_{ij}}{(x - \alpha_i)^j} \right) + \sum_{i=1}^{t} \left(\sum_{j=1}^{k_i} \frac{u_{ij} x + v_{ij}}{(x^2 + b_i x + c_i)^j} \right)$$

mit einer Polynomfunktion $p(x)$ *und* $a_{ij}, u_{ij}, v_{ij} \in K$*.*

Definition:

Diese Darstellung von h in Satz 7 heißt die (*reelle/komplexe*) *Partialbruchzerlegung* von h.

Die rationale Funktion

$$\sum_{j=1}^{m_i} \frac{a_{ij}}{(x-\alpha_i)^j}$$

heißt der *Hauptteil von h an der Stelle* α_i,
und $p(x)$ heißt der *Polynomanteil* von h.