§3. Funktionen

3.1 Grundbegriffe [Kö §4.1; Sch-St §4.3]

Definition 1. A und B seien Mengen.

a) Eine *Abbildung* (oder *Funktion*) f *von* A *nach* B (Schreibweise: $f\colon A \to B$) ist eine Vorschrift, die jedem $x \in A$ genau ein Element $y \in B$ zuordnet. Dann heißen:

y das *Bild von* x *unter* f (oder: der *Wert von* f *an der Stelle* x);
Schreibweise: $y = f(x)$ bzw. $x \mapsto y$,

A der *Definitionsbereich* von f,

B der *Wertevorrat* (oder *Zielbereich*) von f und

$\mathrm{Graph}(f) = \{(x,y) \in A \times B \mid y = f(x)\}$ der *Graph* von f.

b) Es sei $f\colon A \to B$ eine Abbildung.
Ist $B \subset \mathbb{R}$ [bzw. $B \subset \mathbb{C}$], so heißt f eine *reellwertige* [bzw. *komplexwertige*] *Funktion*.
Sind $A, B \subset \mathbb{R}$ [bzw. $A, B \subset \mathbb{C}$], so heißt f eine *reelle* [bzw. *komplexe*] *Funktion* (*in einer Variablen*).
Ist $g\colon A \to B$ eine weitere Abbildung von A nach B, so heißen f und g *gleich* ($f = g$), wenn für alle $x \in A$ gilt: $f(x) = g(x)$.

Beispiel 26: Die Mengen A und B seien konkret gegeben durch $A = \{m,a,t\}$ und $B = \{2,3,5,7\}$. Geben Sie 3 verschiedene Abbildungen von A nach B und deren jeweiligen Graphen an! Wie viele verschiedene Abbildungen von A nach B gibt es insgesamt?

Beispiel 27: Die Abbildung $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ist definiert durch $g(x) = x + 2xi$. Welche der Eigenschaften aus Definition 1.b) hat g? Geben Sie Graph(g) an! Können Sie Graph(g) skizzieren (3-dimensional!)?

Definition 2. Es sei $f\colon A \to B$ eine Abbildung.

a) Für eine Teilmenge $A' \subset A$ heißt

$$f(A') = \{f(x) \mid x \in A'\}$$

das *Bild von* A' *unter* f, insbesondere heißt $f(A)$ das *Bild* (oder die *Wertemenge*) *von* f.
Für eine Teilmenge $B' \subset B$ heißt

$$f^{-1}(B') = \{x \in A \mid f(x) \in B'\}$$

das *Urbild von* B' *unter* f.

b) Ist $g\colon B \to C$ eine weitere Abbildung, so heißt die Abbildung

$$\begin{aligned} g \circ f\colon A &\to C \\ x &\mapsto g(f(x)) \end{aligned}$$

die *Komposition* (oder *Hintereinanderausführung*) *von* g *und* f (Sprechweise: „g nach f”).

Beispiel 28: *a) Geben Sie für „Ihre” 3 Abbildungen aus Beispiel 26 jeweils $f(\{a,t\})$, $f(\{a\})$ sowie $f^{-1}(\{3,5,7\})$ und $f^{-1}(\{7\})$ an!*
b) Es sei $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, $f(z) = |z|$, der komplexe Absolutbetrag und g so wie in Beispiel 27 gegeben. Geben Sie $f \circ g$ an! Welche der Eigenschaften aus Definition 1.b) haben f bzw. $f \circ g$? Bestimmen Sie $f^{-1}(\{\sqrt{5}\})$ bzw. $(f \circ g)^{-1}(\{\sqrt{5}\})$.

Lemma 1. *Ist $f\colon A \to B$ eine Abbildung, so gilt:*

a) $A' \subset A \implies A' \subset f^{-1}(f(A'))$

b) $B' \subset B \implies f(f^{-1}(B')) = B' \cap f(A) \subset B'$

Definition 3. Eine Abbildung $f\colon A \to B$ heißt

- *injektiv*, falls für alle $x_1, x_2 \in A$ gilt: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$
  [bzw. äquivalent dazu: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$].
- *surjektiv*, falls $f(A) = B$ gilt
  [d. h.: zu jedem $y \in B$ existiert (mindestens) ein $x \in A$ mit $f(x) = y$].
- *bijektiv*, falls f injektiv und surjektiv ist.

Lemma 2. *Es sei $f\colon A \to B$ eine injektive Abbildung.*
Dann existiert die Umkehrabbildung $f^{-1}\colon f(A) \to A$ mit Graphem

$$\mathrm{Graph}(f^{-1}) = \{(y,x) \mid y \in f(A) \textit{ und } x \in A \textit{ mit } f(x) = y\} \subset f(A) \times A\ .$$

f^{-1} ist die eindeutig bestimmte Abbildung von $f(A)$ nach A, die $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_A$ und $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_{f(A)}$ erfüllt.

Beispiel 29: *a) Welche „Ihrer” 3 Abbildungen aus Beispiel 26 ist injektiv? Warum kann keine dieser Abbildungen surjektiv bzw. bijektiv sein?*
b) Geben Sie für die Abbildung g aus Beispiel 27 die Umkehrabbildung g^{-1} (samt ihrer Definitionsmenge) an!

Definition 4.

a) Es seien $f, g\colon A \to B \subset \mathbb{C}$ (reell- oder) komplexwertige Funktionen. Dann definiert man

die *Summe* von f und g: $\begin{cases} f+g\colon A \to \mathbb{C} \\ \qquad x \mapsto f(x)+g(x) \end{cases}$,

das *Produkt* von f und g: $\begin{cases} f\cdot g\colon A \to \mathbb{C} \\ \qquad x \mapsto f(x)\cdot g(x) \end{cases}$, den *Quotienten* von f durch g: $\begin{cases} \dfrac{f}{g}\colon A_0 \to \mathbb{C} \\ \qquad x \mapsto \dfrac{f(x)}{g(x)} \end{cases}$ mit $A_0 = \{x \in A \mid g(x) \neq 0\}$,

die zu f *konjugiert komplexe* Funktion: $\begin{cases} \overline{f}\colon A \to \mathbb{C} \\ \quad x \mapsto \overline{f(x)} \end{cases}$,

den *Realteil* von f: $\begin{cases} \Re(f)\colon A \to \mathbb{R} \\ \qquad x \mapsto \Re(f(x)) \end{cases}$

und den *Imaginärteil* von f: $\begin{cases} \Im(f)\colon A \to \mathbb{R} \\ \qquad x \mapsto \Im(f(x)) \end{cases}$.

b) Eine reelle Funktion $f\colon A \to B$ (d. h.: $A, B \subset \mathbb{R}$) heißt
[*streng*] *monoton wachsend*, wenn für alle $x_1, x_2 \in A$ mit $x_1 < x_2$ gilt:

$$f(x_1) \leq f(x_2) \quad [\text{bzw. } f(x_1) < f(x_2)] \ ,$$

[*streng*] *monoton fallend*, wenn für alle $x_1, x_2 \in A$ mit $x_1 < x_2$ gilt:

$$f(x_1) \geq f(x_2) \quad [\text{bzw. } f(x_1) > f(x_2)].$$

Beispiel 30: Suchen Sie aus Ihrem Mittelschullehrbuch einige Beispiele von reellen Funktionen und versuchen Sie, an diesen einige Operationen aus Definition 4.a) durchzuführen.

Lemma 3. *Es seien $A, B \subset \mathbb{R}$ und $f\colon A \to B$ eine reelle Funktion.*
Ist f streng monoton wachsend [bzw. streng monoton fallend], so ist f injektiv und besitzt daher eine Umkehrfunktion $f^{-1}\colon f(A) \to A$.
f^{-1} ist dann ebenfalls streng monoton wachsend [bzw. streng monoton fallend].

3.2 Abzählbarkeit von Mengen [Kö §2.4; Sch-St §4.43]

Definition 5. A und B seien Mengen.

a) A und B heißen *gleichmächtig*, wenn es eine bijektive Abbildung $f\colon A \to B$ gibt.

b) Die Menge A heißt

- *abzählbar*, wenn A und $\mathbb{N}$ gleichmächtig sind,
  d. h.: es gibt eine bijektive Abbildung $f\colon \mathbb{N} \to A$ (eine „Abzählung von A")
- *höchstens abzählbar*, wenn A endlich oder abzählbar ist
- *überabzählbar*, wenn A unendlich und nicht abzählbar ist.

Satz 1.

a) *$\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ sind abzählbare Mengen.*

b) *Die Menge $\mathbb{R}$ ist überabzählbar.*

Beispiel 31: a) Wieso sind die Mengen A und B aus Beispiel 26 nicht gleichmächtig?
b) Modifizieren Sie den Beweis für die Abzählbarkeit von $\mathbb{Q}$, um zu beweisen, dass $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ abzählbar ist.

3.3 Polynomfunktionen [Kö §4.2]

Für den gesamten Abschnitt sei $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

Definition 6. Eine Abbildung $f\colon K \to K$ heißt $\left\{\begin{array}{ll} \textit{reelle}, & \text{falls } K = \mathbb{R}, \\ \textit{komplexe}, & \text{falls } K = \mathbb{C}, \end{array}\right\}$ *Polynomfunktion* (auch: Polynom), wenn es ein $n \in \mathbb{N}_0$ und $a_0, a_1, \ldots, a_n \in K$ gibt, sodass für alle $x \in K$ gilt:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n.$$

Ist $a_n \neq 0$, so heißt f Polynomfunktion *vom Grad n* und a_n heißt der *führende* (oder *höchste*) Koeffizient von f.
Ist $\alpha \in K$ mit $f(\alpha) = 0$, so heißt α eine *Nullstelle* von f.

Satz 2. *Es sei $f\colon K \to K$ eine Polynomfunktion vom Grad $n \in \mathbb{N}$ und $\alpha \in K$. Dann gilt:*

a) *Es existiert eine Polynomfunktion $g\colon K \to K$ vom Grad $n-1$, sodass für alle $x \in K$ gilt:*

$$f(x) = (x - \alpha)g(x) + f(\alpha)\ .$$

b) $f(\alpha) = 0 \iff$ *Es existiert eine Polynomfunktion $g\colon K \to K$ vom Grad $n-1$, sodass für alle $x \in K$ gilt:*

$$f(x) = (x - \alpha)g(x)$$

[Sprechweise: „$x - \alpha$ teilt $f(x)$"].

Beispiel 32: Gegeben sei die Polynomfunktion $f(x) = x^2 - \frac{1}{3}$. Bestimmen Sie jeweils für $\alpha = 1,\ \alpha = i,\ \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ die nach Satz 2.a) existierende Polynomfunktion $g(x)$ mit $f(x) = (x - \alpha)g(x) + f(\alpha)$.
Nach welchem „Rechenrezept" läßt sich in Satz 2 zu gegebenem f und α die entsprechende Polynomfunktion g finden?

Beispiel 33: Was besagt Satz 2 im speziellen Fall $n = 1$? Wieso ist Satz 2 für $n = 0$ falsch?

Satz 3. *Es sei $f\colon K \to K$ eine Polynomfunktion vom Grad $n \in \mathbb{N}_0$. Dann besitzt f in K höchstens n Nullstellen.*

Beispiel 34: Berechnen Sie für beliebiges $a \in \mathbb{R}$ das Matrizenprodukt $\left(\begin{smallmatrix} 1 & a \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\begin{smallmatrix} 1 & a \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$! Wie viele (2×2)-Matrizen X lösen die Gleichung $X \cdot X = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$?

Korollar 1. Es seien $f, g\colon K \to K$ Polynomfunktionen mit

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \quad \text{und} \quad g(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i \quad \text{für ein } n \in \mathbb{N}_0 \ .$$

Sind $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1} \in K$ paarweise verschieden und gilt für alle k mit $1 \leq k \leq n+1$:

$$f(x_k) = g(x_k) \ ,$$

so folgt $a_i = b_i$ für alle i mit $0 \leq i \leq n$ (und somit $f = g$).

Korollar 2. Ist $0 \neq f\colon K \to K$ eine Polynomfunktion, so ist ihr Grad $n \in \mathbb{N}_0$ eindeutig bestimmt, und es existieren eindeutig bestimmte $a_0, a_1, \ldots, a_n \in K$ mit $a_n \neq 0$, sodass für alle $x \in K$ gilt: $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$.

Korollar 3 (Interpolation nach Lagrange).
Es sei $n \in \mathbb{N}_0$, $x_0, x_1 \ldots, x_n \in K$ seien paarweise verschieden, und $y_0, y_1, \ldots, y_n \in K$. Dann gibt es genau eine Polynomfunktion $f\colon K \to K$ vom Grade $\leq n$, sodass für alle i mit $0 \leq i \leq n$ gilt:

$$f(x_i) = y_i \quad [\text{„Interpolationseigenschaft"}].$$

Beispiel 35: Es seien $(x_0, x_1, x_2, x_3) = (-1, 1, 2, 5)$ und $(y_0, y_1, y_2, y_3) = (7, 5, 10, -23)$. Geben Sie die Polynomfunktion f vom Grad ≤ 3 an, für die $f(x_i) = y_i$ für alle $0 \leq i \leq 3$ gilt. Können Sie verschiedene Methoden angeben, um dieses Problem zu lösen?

Der allgemeine Binomialkoeffizient:

Für $n \in \mathbb{N}_0$ und $z \in \mathbb{C}$ definiert man $\displaystyle\binom{z}{n} := \begin{cases} 1 & \text{falls } n = 0 \\ \dfrac{z(z-1)\ldots(z-n+1)}{n!} & \text{falls } n \geq 1 \end{cases} .$

$\displaystyle\binom{z}{n}$ ist eine komplexe Polynomfunktion vom Grad n (in der Variablen z) mit Nullstellen $0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Beispiel 36: Berechnen Sie $\binom{-3}{3}$, $\binom{-3}{4}$, $\binom{-\frac{4}{3}}{3}$, $\binom{i}{4}$, $\binom{-i-2}{3}$.

Gilt $\binom{z}{n} + \binom{z}{n+1} = \binom{z+1}{n+1}$ auch für allgemeine Binomialkoeffizienten?

Satz 4 (**Additionstheorem für allgemeine Binomialkoeffizienten**).
Für $w, z \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: $\displaystyle\binom{w+z}{n} = \sum_{i=0}^{n} \binom{w}{i}\binom{z}{n-i}$.

Beispiel 37: Berechnen Sie für beliebiges $n \in \mathbb{N}_0$ und $z \in \mathbb{C}$: $\sum_{i=0}^{n} \binom{z}{i}\binom{-z}{n-i}$!
(Stimmt Ihre Rechnung auch für $n = 0$ bzw. $z = 0$?)

Satz 5. *Ist $0 \neq f\colon K \to K$ eine Polynomfunktion und $\alpha \in K$, so existieren genau ein $e \in \mathbb{N}_0$ und genau eine Polynomfunktion $g\colon K \to K$, sodass für alle $x \in K$ gilt:*

$$f(x) = (x-\alpha)^e g(x) \quad \text{und} \quad g(\alpha) \neq 0 \ .$$

Definition: Ist $e > 0$, so heißt α eine *e-fache Nullstelle* von f.

Satz 6 (**Zerlegungssatz für komplexe Polynome**).
Ist $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine (komplexe) Polynomfunktion vom Grad $n \in \mathbb{N}_0$, so existieren eindeutig bestimmte $0 \neq a \in \mathbb{C}$, $r \in \mathbb{N}_0$, paarweise verschiedene $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{C}$ und $e_1, \ldots, e_r \in \mathbb{N}$ mit $e_1 + \cdots + e_r = n$, sodass für alle $x \in \mathbb{C}$ gilt:

$$f(x) = a \cdot \prod_{i=1}^{r} (x-\alpha_i)^{e_i}.$$

3.4 Rationale Funktionen [Kö §4.3]

Für den gesamten Abschnitt sei $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

Definition 7. $f, g\colon K \to K$ seien Polynomfunktionen mit $g \neq 0$ und $E = \{\alpha \in K \mid g(\alpha) = 0\}$. Dann heißt

$$h = \frac{f}{g}\colon\ K \setminus E \to K$$
$$x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$$

eine *rationale Funktion* auf K.
Ist $\alpha \in E$ eine e-fache Nullstelle von g und $f(\alpha) \neq 0$, so heißt α eine *e-fache Polstelle* (oder: *Pol der Ordnung* e) von h.

Beispiel 38: Gegeben sind die Polynomfunktionen $f(x) = x^3(x-3)^2(x^2-1)^3(x+1)$ und $g(x) = (x-1)^4(x^2-9)^2(x+3)\,x$. Bestimmen Sie $E = \{\alpha \in \mathbb{R} \mid g(\alpha) = 0\}$.
Geben Sie für die rationale Funktion $h = \frac{f}{g}\colon \mathbb{R} \setminus E \to \mathbb{R}$ die gekürzte Form an. Um welche Zahlen kann die Definitionsmenge von h dadurch erweitert werden?
Geben Sie alle Nullstellen und Pole von h sowie deren Ordnungen an!
Skizzieren Sie den Graphen von h für $|x| \leq 5$.

Satz 7 (Partialbruchzerlegung in $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$).
Es sei $h = \dfrac{f}{g}\colon K \setminus E \to K$ *eine rationale Funktion, wobei*

$$g(x) = \prod_{i=1}^{r} (x - \alpha_i)^{m_i} \cdot \prod_{i=1}^{t} (x^2 + b_i x + c_i)^{k_i}$$

mit paarweise verschiedenen Polynomfunktionen $(x-\alpha_1), \ldots, (x-\alpha_r), (x^2+b_1x+c_1), \ldots$ $(x^2+b_tx+c_t)$*, wobei die quadratischen Polynomfunktionen keine Nullstellen in* K *besitzen,* $r, t \in \mathbb{N}_0$*,* $m_i, k_i \in \mathbb{N}$ *und* $\alpha_i, b_i, c_i \in K$*; also:* $E = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$*.*
Dann besitzt h *eine eindeutige Darstellung der Form*

$$h(x) = p(x) + \sum_{i=1}^{r} \left(\sum_{j=1}^{m_i} \frac{a_{ij}}{(x-\alpha_i)^j} \right) + \sum_{i=1}^{t} \left(\sum_{j=1}^{k_i} \frac{u_{ij}x + v_{ij}}{(x^2 + b_i x + c_i)^j} \right)$$

mit einer Polynomfunktion $p(x)$ *und* $a_{ij}, u_{ij}, v_{ij} \in K$*.*

Definition: Diese Darstellung heißt die (*reelle/komplexe*) *Partialbruchzerlegung* von h. Die rationale Funktion

$$\sum_{j=1}^{m_i} \frac{a_{ij}}{(x-\alpha_i)^j}$$

heißt der *Hauptteil von* h *an der Stelle* α_i, und p heißt der *Polynomanteil* von h.

Beispiel 39: Geben Sie die Partialbruchzerlegung von $\dfrac{3x^3 + 17x^2 + 32x + 18}{(x+2)^4}$ *an!*
(Kann Ihnen dabei Satz 2.a) mit $\alpha = -2$ *helfen?)*

Beispiel 40: Welche möglichen Nenner treten in der komplexen (bzw. reellen) Partialbruchzerlegung einer rationalen Funktion auf, deren Nenner $g(x) = (x^4 - 16)$ *bzw.* $g(x) = (x^4 - 81)^4$ *ist?*