ANALYSIS 1

Kapitel 2: Reelle und komplexe Zahlen

MAB.01012UB MAT.101UB Vorlesung im WS 2017/18

Günter LETTL

Institut für Mathematik und wissenschaftliches Rechnen
Karl-Franzens-Universität Graz

2.1 Körperstruktur und Anordnung von $\mathbb{R}$

Für (beliebige) reelle Zahlen $a, b, c \in \mathbb{R}$ gelten die folgenden **(algebraischen) Körperaxiome**:

(K1) $a + b = b + a$ und $a \cdot b = b \cdot a$
(*Kommutativgesetze*)

(K2) $(a + b) + c = a + (b + c)$ und $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
(*Assoziativgesetze*)

(K3) $\exists x \in \mathbb{R}$ mit $a + x = b$ und
- falls $a \neq 0$ - gibt es auch ein $y \in \mathbb{R}$ mit $a \cdot y = b$.
Für x schreibt man auch $b - a$, und für y auch $b : a = \frac{b}{a}$.

(K4) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ (*Distributivgesetz*)

Lemma (1)

Es seien $a, b \in \mathbb{R}$*.*

a) *Die Lösungen* $x, y \in \mathbb{R}$ *der Gleichungen in* ***(K3)*** *sind eindeutig bestimmt.*

b) (Produkt-Null-Satz)
Ist $a \cdot b = 0$*, so folgt* $a = 0$ *oder* $b = 0$*.*

$\mathbb{R}$ ist archimedisch geordnet:

Gewisse reelle Zahlen $x \in \mathbb{R}$ sind als „*positiv*" ausgezeichnet (nämlich diejenigen, die auf der Zahlengeraden rechts von der Zahl 0 liegen); Schreibweise: $x > 0$.

Für beliebige reelle Zahlen a, b gelten die folgenden **Anordnungsaxiome**:

(A1) Genau eine der 3 Relationen ist erfüllt:

$$a > 0, \quad a = 0, \quad -a > 0 \ .$$

(A2) Sind $a > 0$ und $b > 0$, so gilt $a + b > 0$ und $a \cdot b > 0$.

(A3) Es existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n - a > 0$ („*Archimedisches Axiom*")

Definition (1)

Es seien $a, b \in \mathbb{R}$.

a heißt *negativ*, wenn $-a > 0$ gilt.

a heißt *größer als* b ($a > b$), falls $a - b > 0$ gilt.

a heißt *kleiner als* b ($a < b$), falls $b > a$ gilt.

a heißt *kleiner oder gleich* b ($a \leq b$), falls $(a < b) \vee (a = b)$ gilt.

$$\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$$
$$\mathbb{R}_- := \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$$
$$\mathbb{R}_{\geq 0} := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}.$$

Satz (1) (Rechenregeln für Ungleichungen)

Es seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

a) *Genau eine der Relationen $a > b$, $a = b$ oder $a < b$ ist erfüllt.*

b) *Aus $a > b$ und $b > c$ folgt $a > c$ (Transitivität von „$>$”).*

c) *Ist $a > b$, so gilt:*

- *i) Wenn $b > 0$ ist, so folgt $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.*
- *ii) $a + c > b + c$*
- *iii) Wenn $c > 0$ ist, so folgt $ac > bc$;*
  und wenn $c < 0$ ist, folgt $ac < bc$.

d) *Sind $a > b$ und $c > d$, so folgt:*

- *i) $a + c > b + d$*
- *ii) Wenn $b, d \geq 0$ gilt, so folgt $ac > bd$.*

e) *Ist $a \neq 0$, so ist $a^2 > 0$*

f) *Jede natürliche Zahl ist positiv.*

Satz (2) (Bernoulli'sche Ungleichung)

Es sei $0 \neq x \in \mathbb{R}$ *mit* $x \geq -1$ *und* $1 \neq n \in \mathbb{N}$. *Dann gilt:*

$$(1+x)^n > 1 + nx$$

Satz (3)

Es sei $q \in \mathbb{R}_+$. *Dann gilt:*

a) *Ist* $q > 1$, *so gibt es zu jedem* $K \in \mathbb{R}$ *ein* $n \in \mathbb{N}$ *mit* $q^n > K$.

b) *Ist* $0 < q < 1$, *so gibt es zu jedem* $\varepsilon > 0$ *ein* $n \in \mathbb{N}$ *mit* $q^n < \varepsilon$.

Satz (2) (Bernoulli'sche Ungleichung)

Es sei $0 \neq x \in \mathbb{R}$ *mit* $x \geq -1$ *und* $1 \neq n \in \mathbb{N}$. *Dann gilt:*

$$(1+x)^n > 1 + nx$$

Satz (3)

Es sei $q \in \mathbb{R}_+$. *Dann gilt:*

a) *Ist* $q > 1$, *so gibt es zu jedem* $K \in \mathbb{R}$ *ein* $n \in \mathbb{N}$ *mit* $q^n > K$.

b) *Ist* $0 < q < 1$, *so gibt es zu jedem* $\varepsilon > 0$ *ein* $n \in \mathbb{N}$ *mit* $q^n < \varepsilon$.

Definition (2)

Es sei $a \in \mathbb{R}$. Dann heißt

$$|a| := \begin{cases} a & \text{falls } a \geq 0 \\ -a & \text{falls } a < 0 \end{cases}$$ der *Absolutbetrag* von a und

$$sgn(a) := \begin{cases} 1 & \text{falls } a > 0 \\ 0 & \text{falls } a = 0 \\ -1 & \text{falls } a < 0 \end{cases}$$ das *Vorzeichen* (oder *Signum*) von a.

Satz (4)

Für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:

a) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

b) $|a| < b \Leftrightarrow -b < a < b$ *und* $|a| \leq b \Leftrightarrow -b \leq a \leq b$

c) $||a| - |b|| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b|$

Definition (2)

Es sei $a \in \mathbb{R}$. Dann heißt

$$|a| := \begin{cases} a & \text{falls } a \geq 0 \\ -a & \text{falls } a < 0 \end{cases}$$ der *Absolutbetrag* von a und

$$sgn(a) := \begin{cases} 1 & \text{falls } a > 0 \\ 0 & \text{falls } a = 0 \\ -1 & \text{falls } a < 0 \end{cases}$$ das *Vorzeichen* (oder *Signum*) von a.

Satz (4)

Für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:

a) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

b) $|a| < b \Leftrightarrow -b < a < b$ *und* $|a| \leq b \Leftrightarrow -b \leq a \leq b$

c) $\big||a| - |b|\big| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b|$

2.2 Die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$

Satz (5)

$\sqrt{2}$ ist eine irrationale Zahl.

Definition (3. a))

Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Dann heißt

$I = [a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ das *abgeschlossene* (auch: *kompakte*) *Intervall* (von a nach b);

$I = (a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ das *offene Intervall* (von a nach b);

$I = [a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ das (*nach rechts*) *halboffene Intervall* (von a nach b);

$I = (a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ das (*nach links*) *halboffene Intervall* (von a nach b).

a und b heißen die *Randpunkte* jedes solchen Intervalls I, und $|I| = b - a$ heißt dessen *Länge*.

2.2 Die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$

Satz (5)

$\sqrt{2}$ ist eine irrationale Zahl.

Definition (3. a))

Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Dann heißt

$I = [a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ das *abgeschlossene* (auch: *kompakte*) *Intervall* (von a nach b);

$I = (a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ das *offene Intervall* (von a nach b);

$I = [a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ das (*nach rechts*) *halboffene Intervall* (von a nach b);

$I = (a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ das (*nach links*) *halboffene Intervall* (von a nach b).

a und b heißen die *Randpunkte* jedes solchen Intervalls I, und $|I| = b - a$ heißt dessen *Länge*.

Definition (3. b))

Eine Folge von kompakten Intervallen $(I_n)_{n\in\mathbb{N}} = I_1, I_2, I_3, \dots$ heißt eine *Intervallschachtelung*, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

(IS1) $\forall n \in \mathbb{N}$: $I_{n+1} \subset I_n$

(IS2) $\forall \varepsilon > 0$: $\exists n \in \mathbb{N}$ mit $|I_n| < \varepsilon$.

Vollständigkeitsaxiom (für $\mathbb{R}$):

Zu jeder Intervallschachtelung $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ gibt es eine reelle Zahl, die in jedem der Intervalle I_n enthalten ist.

Behauptung: Ist $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Intervallschachtelung in $\mathbb{R}$, so gibt es genau eine reelle Zahl α, sodass $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt: $\alpha \in I_n$.

Definition (3. b))

Eine Folge von kompakten Intervallen $(I_n)_{n\in\mathbb{N}} = I_1, I_2, I_3, \dots$ heißt eine *Intervallschachtelung*, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

(IS1) $\forall n \in \mathbb{N}\colon\ I_{n+1} \subset I_n$

(IS2) $\forall \varepsilon > 0\colon\ \exists n \in \mathbb{N}$ mit $|I_n| < \varepsilon$.

Vollständigkeitsaxiom (für $\mathbb{R}$):

Zu jeder Intervallschachtelung $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ gibt es eine reelle Zahl, die in jedem der Intervalle I_n enthalten ist.

Behauptung: Ist $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Intervallschachtelung in $\mathbb{R}$, so gibt es genau eine reelle Zahl α, sodass $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt: $\alpha \in I_n$.

Satz (6) (Existenz von Wurzeln aus positiven reellen Zahlen)

Für jedes $0 < x \in \mathbb{R}$ *und jedes* $k \in \mathbb{N}$ *existiert genau eine reelle Zahl* $y > 0$ *mit* $y^k = x$.

Schreibweise: $y = \sqrt[k]{x} = x^{\frac{1}{k}}$.

Korollar (Definition rationaler Potenzen positiver reeller Zahlen)

Es seien $0 < x \in \mathbb{R}$ *und* $p, p' \in \mathbb{Z},\ q, q' \in \mathbb{N}$ *mit* $\frac{p}{q} = \frac{p'}{q'} = r \in \mathbb{Q}$. *Dann gilt:*

$$\sqrt[q]{x^p} = \sqrt[q']{x^{p'}}$$

($\stackrel{def}{=}: x^r$, *ist unabhängig von der Darstellung von* r *als Bruchzahl).*

Satz (6) (Existenz von Wurzeln aus positiven reellen Zahlen)

Für jedes $0 < x \in \mathbb{R}$ *und jedes* $k \in \mathbb{N}$ *existiert genau eine reelle Zahl* $y > 0$ *mit* $y^k = x$.

Schreibweise: $y = \sqrt[k]{x} = x^{\frac{1}{k}}$.

Korollar (Definition rationaler Potenzen positiver reeller Zahlen)

Es seien $0 < x \in \mathbb{R}$ *und* $p, p' \in \mathbb{Z},\ q, q' \in \mathbb{N}$ *mit* $\frac{p}{q} = \frac{p'}{q'} = r \in \mathbb{Q}$.
Dann gilt:

$$\sqrt[q]{x^p} = \sqrt[q']{x^{p'}}$$

$(\overset{def}{=}: x^r$, *ist unabhängig von der Darstellung von* r *als Bruchzahl).*

Satz (7) (Arithmetisch-geometrische Mittelungleichung)

Für $n \in \mathbb{N}$ und $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gilt:

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \ ,$$

und in dieser Ungleichung gilt „=" genau dann, wenn $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Hilfssatz (zum Beweis):
Sind $n \in \mathbb{N}$ und $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $x_1 + \ldots + x_n = n$, so gilt

$$x_1 \cdot \ldots \cdot x_n \leq 1 \ ,$$

und „=" gilt genau dann, wenn $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 1$.

Definition (4)

Es sei $M \subset \mathbb{R}$ eine Menge reeller Zahlen.

a) Eine Zahl $m \in M$ heißt *Maximum* [bzw. *Minimum*] von M, wenn für alle $x \in M$ gilt: $x \leq m$ [bzw. $m \leq x$].
Schreibweise: $m = \max(M)$ [bzw. $m = \min(M)$].

b) Eine reelle Zahl $s \in \mathbb{R}$ heißt *obere* [bzw. *untere*] *Schranke von* M, wenn für alle $x \in M$ gilt: $x \leq s$ [bzw. $s \leq x$].

c) M heißt *nach oben* [bzw. *nach unten*] *beschränkt*, wenn eine obere [bzw. untere] Schranke von M existiert.

M heißt *beschränkt*, wenn M nach oben und nach unten beschränkt ist; andernfalls heißt M *unbeschränkt*.

Definition (4) (Fortsetzung)

d) Eine reelle Zahl $s \in \mathbb{R}$ heißt *Supremum* (oder *kleinste obere Schranke*) *von M*, wenn

i) s eine obere Schranke von M ist und

ii) jedes $s' \in \mathbb{R}$ mit $s' < s$ keine obere Schranke von M ist.

Schreibweise: $s = \sup(M)$.

Eine reelle Zahl $s \in \mathbb{R}$ heißt *Infimum* (oder *größte untere Schranke*) *von M*, wenn

i) s eine untere Schranke von M ist und

ii) jedes $s' \in \mathbb{R}$ mit $s < s'$ keine untere Schranke von M ist.

Schreibweise: $s = \inf(M)$.

Satz (8) (Supremumseigenschaft von $\mathbb{R}$)

Jede nicht leere Menge $M \subset \mathbb{R}$, die nach oben [bzw. nach unten] beschränkt ist, besitzt ein Supremum [bzw. ein Infimum].

Satz (9) („$\mathbb{Q}$ liegt dicht in $\mathbb{R}$")

Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ und jedem $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ gibt es eine rationale Zahl $r \in \mathbb{Q}$ mit $|x - r| < \varepsilon$.

Satz (8) (Supremumseigenschaft von $\mathbb{R}$)

Jede nicht leere Menge $M \subset \mathbb{R}$, die nach oben [bzw. nach unten] beschränkt ist, besitzt ein Supremum [bzw. ein Infimum].

Satz (9) („$\mathbb{Q}$ liegt dicht in $\mathbb{R}$")

Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ und jedem $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ gibt es eine rationale Zahl $r \in \mathbb{Q}$ mit $|x - r| < \varepsilon$.

2.3 Die komplexen Zahlen

Definition (5)

Auf der Menge $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ werde eine Addition $\oplus$ und eine Multiplikation $\odot$ wie folgt definiert:
Für $(x, y), (u, v) \in \mathbb{R}^2$ seien

(A) $(x, y) \oplus (u, v) = (x + u, y + v)$

(M) $(x, y) \odot (u, v) = (xu - yv, xv + yu)$

Satz (10)

Mit den in Definition 5 definierten Operationen $\oplus$ und $\odot$ bildet die Menge $\mathbb{R}^2$ einen Körper (mit Nullelement $(0, 0)$ und Einselement $(1, 0)$), in dem die Gleichung

$$z^2 = z \odot z = (-1, 0)$$

2 Lösungen besitzt.

2.3 Die komplexen Zahlen

Definition (5)

Auf der Menge $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ werde eine Addition $\oplus$ und eine Multiplikation $\odot$ wie folgt definiert:
Für $(x, y), (u, v) \in \mathbb{R}^2$ seien

(A) $(x, y) \oplus (u, v) = (x + u, y + v)$

(M) $(x, y) \odot (u, v) = (xu - yv, xv + yu)$

Satz (10)

Mit den in Definition 5 definierten Operationen $\oplus$ *und* $\odot$ *bildet die Menge* $\mathbb{R}^2$ *einen Körper (mit Nullelement* $(0, 0)$ *und Einselement* $(1, 0)$*), in dem die Gleichung*

$$z^2 = z \odot z = (-1, 0)$$

2 Lösungen besitzt.

Definition (6)

$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ heißt der Körper der komplexen Zahlen.

Für eine komplexe Zahl $z = x + iy \in \mathbb{C}$ (mit $x, y \in \mathbb{R}$) heißt:

$x = \Re(z)$ der *Realteil* von z

$y = \Im(z)$ der *Imaginärteil* von z

$\overline{z} = x - iy$ die *zu z konjugiert komplexe Zahl*

$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ der *(Absolut-)Betrag* von z.

$z \in \mathbb{C}$ heißt *rein imaginär*, wenn $\Re(z) = 0$ gilt.

Satz (11) (Rechenregeln für den Absolutbetrag)

Für $w, z \in \mathbb{C}$ gilt:

a) $|z| \geq 0$ *und* $(|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0)$

b) $|\overline{z}| = |z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}}, \quad z + \overline{z} = 2\,\Re(z), \quad z - \overline{z} = i \cdot 2\,\Im(z)$

c) $|\Re(z)| \leq |z|$ *und* $|\Im(z)| \leq |z|$

d) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$ *und* $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$

e) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$ *und*
$|z + w| \leq |z| + |w|$ *(Dreiecksungleichung)*

Fundamentalsatz der Algebra: Jede Gleichung

$$z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = 0$$

mit $n \in \mathbb{N}$ und $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$ besitzt eine Lösung in $\mathbb{C}$.