§2. Reelle und komplexe Zahlen [Sch-St §§6.4-6.5]

2.1 Körperstruktur und Anordnung von $\mathbb{R}$ [Kö §§2.1-2.2]

Für (beliebige) reelle Zahlen $a, b, c \in \mathbb{R}$ gelten die folgenden **(algebraischen) Körperaxiome**:

(K1) $a + b = b + a$ und $a \cdot b = b \cdot a$ (*Kommutativgesetze*)

(K2) $(a + b) + c = a + (b + c)$ und $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (*Assoziativgesetze*)

(K3) $\exists x \in \mathbb{R}$ mit $a + x = b$ und
- falls $a \neq 0$ - gibt es auch ein $y \in \mathbb{R}$ mit $a \cdot y = b$.
Für x schreibt man auch $b - a$, und für y auch $b : a = \frac{b}{a}$.

(K4) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ (*Distributivgesetz*)

Lemma 1. *Es seien $a, b \in \mathbb{R}$.*

a) *Die Lösungen $x, y \in \mathbb{R}$ der Gleichungen in* **(K3)** *sind eindeutig bestimmt.*

b) *Ist $a \cdot b = 0$, so folgt $a = 0$ oder $b = 0$. („Produkt-Null-Satz")*

Beispiel 11: Verifizieren Sie die Körperaxiome **(K1)** bis **(K4)** für die konkret gewählten Zahlen $a = -42,\ b = \frac{1}{3},\ c = 10,5$.

$\mathbb{R}$ ist archimedisch geordnet:

Gewisse reelle Zahlen $x \in \mathbb{R}$ sind als *„positiv"* ausgezeichnet (nämlich diejenigen, die auf der Zahlengeraden rechts von der Zahl 0 liegen); Schreibweise: $x > 0$.

Für beliebige reelle Zahlen a, b gelten die folgenden **Anordnungsaxiome**:

(A1) Genau eine der 3 Relationen ist erfüllt:

$$a > 0, \quad a = 0, \quad -a > 0 \ .$$

(A2) Sind $a > 0$ und $b > 0$, so gilt $a + b > 0$ und $a \cdot b > 0$.

(A3) Es existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n - a > 0$. („*Archimedisches Axiom*")

Definition 1. Es seien $a, b \in \mathbb{R}$.

a heißt *negativ*, wenn $-a > 0$ gilt.

a heißt *größer als* b $(a > b)$, falls $a - b > 0$ gilt.

a heißt *kleiner als* b $(a < b)$, falls $b > a$ gilt.

a heißt *kleiner oder gleich* b $(a \leq b)$, falls $(a < b) \vee (a = b)$ gilt.

$\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\} \qquad \mathbb{R}_- := \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\} \qquad \mathbb{R}_{\geq 0} := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$.

Satz 1 (**Rechenregeln für Ungleichungen**).
Es seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

a) *Genau eine der Relationen $a > b$, $a = b$ oder $a < b$ ist erfüllt.*

b) *Aus $a > b$ und $b > c$ folgt $a > c$ (Transitivität von „$>$”).*

c) *Ist $a > b$, so gilt:*

(i) *Wenn $b > 0$ ist, so folgt $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.*

(ii) $a + c > b + c$

(iii) *Wenn $c > 0$ ist, so folgt $ac > bc$; und wenn $c < 0$ ist, folgt $ac < bc$.*

d) *Sind $a > b$ und $c > d$, so folgt:*

(i) $a + c > b + d$

(ii) *Wenn $b, d \geq 0$ gilt, so folgt $a \cdot c > b \cdot d$.*

e) *Ist $a \neq 0$, so ist $a^2 > 0$*

f) *Jede natürliche Zahl ist positiv.*

Beispiel 12: Geben Sie einen „logisch korrekten” Beweis, dass für $a, b \in \mathbb{R}$ folgende Aussage richtig ist: $\big((a \leq b) \wedge (a \geq b)\big) \Leftrightarrow a = b$

Satz 2 (**Bernoulli'sche Ungleichung**).
Es sei $0 \neq x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq -1$ und $1 \neq n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$(1 + x)^n > 1 + nx$$

Beispiel 13: Beweisen Sie die folgende Variante der Bernoulli'schen Ungleichung: Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq -1$ und für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $(1 + x)^n \geq 1 + nx$. In welchen Fällen gilt „$=$”?

Satz 3. *Es sei $q \in \mathbb{R}_+$. Dann gilt:*

a) *Ist $q > 1$, so gibt es zu jedem $K \in \mathbb{R}$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $q^n > K$.*

b) *Ist $0 < q < 1$, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $q^n < \varepsilon$.*

Beispiel 14: a) Geben Sie ein $n \in \mathbb{N}$ an, welches Satz 3.a) mit $q = 1,01$ und $K = 100$ erfüllt! Haben Sie in der Mittelschule gelernt, wie man diese Aufgabe mit Logarithmen lösen kann? Können Sie das kleinste n angeben, das dieses Problem löst?
b) Geben Sie ein $n \in \mathbb{N}$ an, welches Satz 3.b) mit $q = \frac{1}{2}$ und $\varepsilon = 0,001$ (bzw. $\varepsilon = 10^{-100}$) erfüllt!

Definition 2. Es sei $a \in \mathbb{R}$. Dann heißt

$$|a| := \begin{cases} a & \text{falls } a \geq 0 \\ -a & \text{falls } a < 0 \end{cases} \quad \text{der } \textit{Absolutbetrag} \text{ von } a \text{ und}$$

$$\operatorname{sgn}(a) := \begin{cases} 1 & \text{falls } a > 0 \\ 0 & \text{falls } a = 0 \\ -1 & \text{falls } a < 0 \end{cases} \quad \text{das } \textit{Vorzeichen} \text{ (oder } \textit{Signum}\text{) von } a.$$

Satz 4. *Für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:*

a) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

b) $|a| < b \Leftrightarrow -b < a < b$ *und* $|a| \leq b \Leftrightarrow -b \leq a \leq b$

c) $\big||a| - |b|\big| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b|$

Beispiel 15: Überlegen Sie sich, dass für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt: $|a| = a \cdot \operatorname{sgn}(a)$ und $a = |a| \cdot \operatorname{sgn}(a)$.

2.2 Die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$

Satz 5. $\sqrt{2}$ *ist eine irrationale Zahl.*

Beispiel 16: Haben Sie in der Mittelschule gehört, wie man an der Dezimaldarstellung einer reellen Zahl erkennen kann, ob sie rational ist oder nicht? Wiederholen Sie, wie man eine reelle Zahl mit periodischer Dezimaldarstellung in einen Bruch umwandelt!

Definition 3.

a) Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Dann heißt die folgende Teilmenge $I \subset \mathbb{R}$
$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ das *abgeschlossene* (auch: *kompakte*) *Intervall* (von a nach b);
$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ das *offene* Intervall (von a nach b);
$[a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ das (*nach rechts*) *halboffene* Intervall (von a nach b);
$(a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ das (*nach links*) *halboffene* Intervall (von a nach b).
a und b heißen die *Randpunkte* jedes solchen Intervalls I, und $|I| = b - a$ heißt dessen *Länge*.

b) Eine Folge von kompakten Intervallen $(I_n)_{n \in \mathbb{N}} = I_1, I_2, I_3, \ldots$ heißt eine *Intervallschachtelung*, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

(IS1) $\forall n \in \mathbb{N}$: $I_{n+1} \subset I_n$

(IS2) $\forall \varepsilon > 0$: $\exists n \in \mathbb{N}$ mit $|I_n| < \varepsilon$.

Vollständigkeitsaxiom (für $\mathbb{R}$):

Zu jeder Intervallschachtelung $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ gibt es eine reelle Zahl, die in jedem der Intervalle I_n enthalten ist.
Behauptung: Ist $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Intervallschachtelung in $\mathbb{R}$, so gibt es genau eine reelle Zahl α, sodass $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt: $\alpha \in I_n$.

Satz 6 (**Existenz von Wurzeln aus positiven reellen Zahlen**).
Für jedes $0 < x \in \mathbb{R}$ und jedes $k \in \mathbb{N}$ existiert genau eine reelle Zahl $y > 0$ mit $y^k = x$. (Schreibweise: $y = \sqrt[k]{x} = x^{\frac{1}{k}}$).

Korollar (**Definition rationaler Potenzen positiver reeller Zahlen**).
Es seien $0 < x \in \mathbb{R}$ und $p, p' \in \mathbb{Z},\ q, q' \in \mathbb{N}$ mit $\frac{p}{q} = \frac{p'}{q'} = r \in \mathbb{Q}$. Dann gilt:

$$\sqrt[q]{x^p} = \sqrt[q']{x^{p'}}$$

($\overset{\text{def}}{=\!:}$ x^r, ist unabhängig von der Darstellung von r als Bruchzahl).

Beispiel 17: Suchen Sie in Ihrem Mittelschullehrbuch das Kapitel über das Rechnen mit rationalen Exponenten und lösen Sie einige Aufgaben dazu!

Satz 7 (**Arithmetisch-geometrische Mittelungleichung**).
Für $n \in \mathbb{N}$ und $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gilt:

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \ ,$$

und in dieser Ungleichung gilt „=" genau dann, wenn $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Hilfssatz (zum Beweis): Sind $n \in \mathbb{N}$ und $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $x_1 + \ldots + x_n = n$, so gilt $x_1 \cdot \ldots \cdot x_n \leq 1$, und „=" gilt genau dann, wenn $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 1$.

*Beispiel 18: Leiten Sie aus Satz 7 als Spezialfall ab: Für $a, b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gilt: $4\sqrt{ab} \leq 2(a+b)$.
Können Sie diese Ungleichung geometrisch deuten?
(Tipp: ein Rechteck mit Seitenlängen a und b.)*

Definition 4. Es sei $M \subset \mathbb{R}$ eine Menge reeller Zahlen.

a) Eine Zahl $m \in M$ heißt *Maximum* [bzw. *Minimum*] von M, wenn für alle $x \in M$ gilt: $x \leq m$ [bzw. $m \leq x$].
Schreibweise: $m = \max(M)$ [bzw. $m = \min(M)$].

b) Eine reelle Zahl $s \in \mathbb{R}$ heißt *obere* [bzw. *untere*] *Schranke von M*, wenn für alle $x \in M$ gilt: $x \leq s$ [bzw. $s \leq x$].

c) M heißt *nach oben* [bzw. *nach unten*] *beschränkt*, wenn eine obere [bzw. untere] Schranke von M existiert.
M heißt *beschränkt*, wenn M nach oben und nach unten beschränkt ist; andernfalls heißt M *unbeschränkt*.

d) Eine reelle Zahl $s \in \mathbb{R}$ heißt *Supremum* (oder *kleinste obere Schranke*) *von* M, wenn
  (i) s eine obere Schranke von M ist und
  (ii) jedes $s' \in \mathbb{R}$ mit $s' < s$ keine obere Schranke von M ist.

Schreibweise: $s = \sup(M)$

Eine reelle Zahl $s \in \mathbb{R}$ heißt *Infimum* (oder *größte untere Schranke*) *von* M, wenn
  (i) s eine untere Schranke von M ist und
  (ii) jedes $s' \in \mathbb{R}$ mit $s < s'$ keine untere Schranke von M ist.

Schreibweise: $s = \inf(M)$

Beispiel 19: Überprüfen Sie die folgenden Mengen M auf alle Eigenschaften, die in Definition 4.a) - d) festgelegt wurden:
$M = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^3 \leq 8\}$ *bzw.* $M = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^4 < 5\}$.
Was ist der Unterschied zwischen Maximum und Supremum?

Satz 8 (Supremumseigenschaft von $\mathbb{R}$).
Jede nicht leere Menge $M \subset \mathbb{R}$, die nach oben [bzw. nach unten] beschränkt ist, besitzt ein Supremum [bzw. ein Infimum].

Satz 9 („$\mathbb{Q}$ liegt dicht in $\mathbb{R}$”).
Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ und jedem $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ gibt es eine rationale Zahl $r \in \mathbb{Q}$ mit $|x - r| < \varepsilon$.

Beispiel 20: Schreiben Sie die folgende Aussage mit Hilfe von mathematischen Symbolen, und versuchen Sie, diese mit Hilfe von Satz 9 zu beweisen:
„Zwischen je 2 verschiedenen reellen Zahlen liegen unendlich viele rationale Zahlen.”
(Tipp: indirekter Beweis)

Beispiel 21: Schreiben Sie die folgenden Aussagen mit Hilfe von mathematischen Symbolen, und versuchen Sie, diese zu beweisen:
„Zwischen je 2 verschiedenen rationalen Zahlen liegt eine irrationale Zahl.”
„Zwischen je 2 verschiedenen rationalen Zahlen liegen unendlich viele irrationale Zahlen.”

2.3 Die komplexen Zahlen [Kö §3; Sch-St §6.5]

Definition 5. Auf der Menge $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ werde eine Addition $\oplus$ und eine Multiplikation $\odot$ wie folgt definiert:
Für $(x, y), (u, v) \in \mathbb{R}^2$ seien

(A) $(x, y) \oplus (u, v) = (x + u, y + v)$

(M) $(x, y) \odot (u, v) = (xu - yv, xv + yu)$

Satz 10. *Mit den in Definition 5 definierten Operationen* $\oplus$ *und* $\odot$ *bildet die Menge* $\mathbb{R}^2$ *einen Körper (mit Nullelement* $(0,0)$ *und Einselement* $(1,0)$*), in dem die Gleichung*

$$z^2 = z \odot z = (-1, 0)$$

2 Lösungen besitzt.

Definition 6. $\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ heißt der Körper der komplexen Zahlen.
Für eine komplexe Zahl $z = x + iy \in \mathbb{C}$ (mit $x, y \in \mathbb{R}$) heißt:
$x = \Re(z)$ der *Realteil von z*
$y = \Im(z)$ der *Imaginärteil von z*
$\overline{z} = x - iy$ die *zu z konjugiert komplexe Zahl*
$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ der *(Absolut-)Betrag von z.*
$z \in \mathbb{C}$ heißt *rein imaginär*, wenn $\Re(z) = 0$ gilt.

Beispiel 22: Suchen Sie in Ihrem Mittelschullehrbuch das Kapitel über komplexe Zahlen und lösen Sie einige Beispiele dazu. Nach welchem „Rezept" läßt sich der Quotient zweier komplexer Zahlen in die Gestalt $x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ bringen?

Beispiel 23: Überlegen Sie sich, wie Sie zu einer gegebenen komplexen Zahl $c \in \mathbb{C}$ die Lösungen der Gleichung $z^2 = c$ bestimmen können! Führen Sie dies für einige konkrete Werte von c durch!

Satz 11 (**Rechenregeln für den Absolutbetrag**). *Für $w, z \in \mathbb{C}$ gilt:*

a) $|z| \geq 0$ *und* $(|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0)$

b) $|\overline{z}| = |z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}}, \quad z + \overline{z} = 2\,\Re(z), \quad z - \overline{z} = i \cdot 2\,\Im(z)$

c) $|\Re(z)| \leq |z|$ *und* $|\Im(z)| \leq |z|$

d) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$ *und* $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$

e) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$ *und* $|z + w| \leq |z| + |w|$ *(Dreiecksungleichung)*

Beispiel 24: Überlegen Sie sich, dass für die komplexe Konjugation folgende Rechenregeln gelten: $\forall w, z \in \mathbb{C}$: $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$, $\overline{z - w} = \overline{z} - \overline{w}$, $\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$ und (falls $w \neq 0$) $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$.

Beispiel 25: Zeigen Sie, dass für $w, z \in \mathbb{C}$ gilt: $|w| - |z| \leq \Big||w| - |z|\Big| \leq |w \pm z| \leq |w| + |z|$. Dabei dürfen Sie natürlich Satz 11.e) und Satz 4.c) - letzteren aber nur für reelle Zahlen! - verwenden.

Fundamentalsatz der Algebra: Jede Gleichung $z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = 0$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$ besitzt eine Lösung in $\mathbb{C}$.