ANALYSIS 1

Kapitel 1: Grundbegriffe der Mengenlehre und der Logik

MAB.01012UB MAT.101UB Vorlesung im WS 2017/18

Günter LETTL

Institut für Mathematik und wissenschaftliches Rechnen
Karl-Franzens-Universität Graz

1.1 Naive Mengenlehre

Definition einer Menge nach Georg Cantor (1845 – 1918):

„Eine *Menge* M ist eine Zusammenfassung bestimmter, wohlunterschiedener Objekte unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die *Elemente* von M genannt werden) zu einem Ganzen."

Ist M eine Menge und a ein Objekt, so gilt
entweder $a \in M$ („*a ist Element von M*", „*a liegt in M*")
oder $a \notin M$ („*a ist kein Element von M*", „*a gehört nicht zu M*").

Relationen zwischen Mengen:

M und N seien beliebige Mengen.

Gleichheit: $M = N$ M und N heißen *gleich* genau dann, wenn sie dieselben Elemente enthalten.
Negation: Ungleichheit: $M \neq N$ M und N sind *nicht gleich*.

Teilmenge: $M \subset N$ M ist eine *Teilmenge* von N (*ist in* N *enthalten*) genau dann, wenn jedes Element von M auch zu N gehört. (andere Notationen: $M \subseteq N$, $M \subseteqq N$)

Echte Teilmenge: $M \subsetneqq N$ M ist eine *echte Teilmenge* von N genau dann, wenn $M \subset N$ und $M \neq N$ erfüllt sind.

keine Teilmenge: $M \not\subset N$ M ist *keine Teilmenge* von N. (andere Notation: $M \not\subseteq N$)

Operationen mit Mengen:

M und N seien beliebige Mengen.

Der *Durchschnitt* von M und N, $M \cap N$, ist die Menge, die aus genau jenen Elementen besteht, die sowohl zu M als auch zu N gehören.
Die Mengen M und N heißen *(zueinander) disjunkt* oder *elementfremd*, wenn $M \cap N = \{\}$ gilt.

Die *Vereinigung* von M und N, $M \cup N$, ist die Menge, die aus genau jenen Objekten besteht, die Elemente von M oder von N (oder von beiden) sind.

Die *Differenz* von M und N, $M \setminus N$, ist die Menge derjeniger Elemente von M, welche nicht zu N gehören.

Das *(kartesische) Produkt* (oder *die Produktmenge*) von M und N, $M \times N$ besitzt als Elemente genau alle *geordneten Paare* (a, b), für welche $a \in M$ und $b \in N$ gilt.

$$M \times N = \{(a, b) \mid a \in M \text{ und } b \in N\} .$$

Definition (1)

Es sei M eine Menge.

a) Enthält M kein Element, so heißt M „die" leere Menge.
Schreibweise: $M = \{\} = \emptyset$.

b) Die Menge aller Teilmengen von M,

$$\mathfrak{P}(M) = \{A \mid A \subset M\} ,$$

heißt die *Potenzmenge von M*.

Satz (1)

a) Es gibt nur eine leere Menge.

b) Für jede Menge M gilt: $\emptyset \subset M$.

Definition (1)

Es sei M eine Menge.

a) Enthält M kein Element, so heißt M „die" leere Menge. Schreibweise: $M = \{\} = \emptyset$.

b) Die Menge aller Teilmengen von M,

$$\mathfrak{P}(M) = \{A \mid A \subset M\} ,$$

heißt die *Potenzmenge von M*.

Satz (1)

a) *Es gibt nur eine leere Menge.*

b) *Für jede Menge M gilt: $\emptyset \subset M$.*

1.2 Aussagenlogik und Beweise

Eine (mathematische oder logische) *Aussage* ist entweder wahr oder falsch.

Eine (mathematische oder logische) *Aussageform* (oder *Prädikat*) enthält eine (oder mehrere) freie Variablen (= Unbestimmte). Durch Einsetzen konkreter Werte für die Variablen entsteht aus einer Aussageform eine Aussage, die dann entweder wahr oder falsch ist.

Operationen mit Aussagen (= logische Verknüpfungen):

Für das Folgende seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ (irgendwelche) Aussagen.

Negation: $\boxed{\neg\mathcal{A}}$ („*nicht* $\mathcal{A}$", „*non* $\mathcal{A}$")
ist die Aussage, die genau dann wahr ist, wenn $\mathcal{A}$ falsch ist.

Konjunktion: $\boxed{\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}}$ („$\mathcal{A}$ *und* $\mathcal{B}$")
ist die Aussage, die genau dann wahr ist, wenn sowohl $\mathcal{A}$ als auch B wahr sind.

Disjunktion: $\boxed{\mathcal{A} \vee \mathcal{B}}$ („$\mathcal{A}$ *oder* $\mathcal{B}$")
ist die Aussage, die genau dann wahr ist, wenn $\mathcal{A}$ wahr ist oder $\mathcal{B}$ wahr ist (oder beide).

Implikation: $\boxed{\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}}$ („*aus* $\mathcal{A}$ *folgt* $\mathcal{B}$", „$\mathcal{A}$ *impliziert* $\mathcal{B}$", „$\mathcal{B}$ *ist notwendig für* $\mathcal{A}$", „$\mathcal{A}$ *ist hinreichend für* $\mathcal{B}$")
ist die Aussage, die genau dann wahr ist, wenn $\mathcal{A}$ falsch ist oder $\mathcal{B}$ wahr ist.

Äquivalenz: $\boxed{\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}}$ („$\mathcal{A}$ *und* $\mathcal{B}$ *sind (logisch) gleichwertig*", „$\mathcal{A}$ *gilt genau dann, wenn* $\mathcal{B}$ *gilt*", „$\mathcal{A}$ *ist notwendig und hinreichend für* $\mathcal{B}$")
ist die Aussage, die genau dann wahr ist, wenn $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ entweder beide wahr oder beide falsch sind.

Logische Quantoren:

Es seien M eine Menge und $\mathcal{A}(x)$ eine Aussageform, die für beliebige Elemente $x \in M$ (für „die Unbestimmte x") formuliert ist.

Die Aussage $\boxed{\forall x \in M\colon \mathcal{A}(x)}$ ist wahr genau dann, wenn für alle Elemente $x \in M$ die Aussage $\mathcal{A}$ wahr ist.

Die Aussage $\boxed{\exists x \in M\colon \mathcal{A}(x)}$ ist wahr genau dann, wenn es ein Element $x \in M$ gibt, für das die Aussage $\mathcal{A}$ wahr ist.

Definition (2) (Mengenrelationen und -operationen mit logischen Symbolen)

Es seien M und N beliebige Mengen. Wir definieren:

a) $(M \subset N) \stackrel{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \forall x \in M\colon x \in N$

$$(M = N) \stackrel{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \Big((\forall x \in M\colon x \in N) \wedge (\forall x \in N\colon x \in M) \Big) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Big((M \subset N) \wedge (N \subset M) \Big)$$

b) $M \cap N = \{x \mid x \in M \wedge x \in N\}$

$M \cup N = \{x \mid x \in M \vee x \in N\}$

$M \setminus N = \{x \in M \mid x \notin N\}$

Definition (2) (Fortsetzung)

c) Es sei I eine nichtleere Menge, und für jedes $i \in I$ sei M_i eine Menge.
Dann heißt

$$\bigcap_{i \in I} M_i = \{x \mid \forall i \in I : x \in M_i\}$$

die *Durchschnittsmenge* der Familie von Mengen $(M_i)_{i \in I}$, und

$$\bigcup_{i \in I} M_i = \{x \mid \exists i \in I : x \in M_i\}$$

die *Vereinigungsmenge* der Familie von Mengen $(M_i)_{i \in I}$.

Satz (2) (Rechenregeln für Mengenoperationen)

Für (beliebige) Mengen A, B und C gelten die folgenden Aussagen:

Kommutativgesetze:

$$A \cup B = B \cup A \qquad\qquad A \cap B = B \cap A$$

Assoziativgesetze:

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \qquad\qquad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

Distributivgesetze:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \qquad\qquad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

De Morgan'sche Regeln:

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C) \qquad\qquad A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$$

Definition (3)

Eine Menge M heißt *endlich*, wenn es ein $n \in \mathbb{N}_0$ gibt, sodass gilt: M hat genau n (verschiedene) Elemente.

Wir schreiben dann $\#M = n$ und nennen n die *Elementanzahl* (oder *Kardinalität*, *Mächtigkeit*) von M.

Ist die Menge M nicht endlich, so heißt M *unendlich* (und wir schreiben $\#M = \infty$).

1.3 Vollständige Induktion und Rekursion

Prinzip der vollständigen Induktion:

Es sei $n_0 \in \mathbb{Z}$ eine ganze Zahl und $N = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq n_0\}$. Für jedes $n \in N$ sei eine Aussage $\mathcal{A}(n)$ formuliert. Sind

(I1) $\mathcal{A}(n_0)$ und

(I2) $\forall n \in N: \ \mathcal{A}(n) \Rightarrow \mathcal{A}(n+1)$

wahre Aussagen, so gilt $\mathcal{A}(n)$ für alle $n \in N$.

Bemerkung: Statt **(I2)** ist auch folgende Variante erlaubt:

(I2') $\forall n \in N: \ (\mathcal{A}(n_0) \wedge \mathcal{A}(n_0+1) \wedge \ldots \wedge \mathcal{A}(n)) \Rightarrow \mathcal{A}(n+1).$

Satz (3) (Minimumprinzip)

Jede nicht leere Teilmenge A von $\mathbb{N}_0$ besitzt ein Minimum (= kleinstes Element; d. h. $\exists\ m \in A$, sodass $\forall a \in A: \ m \leq a$; Schreibweise: $m = \min(A)$).

Rekursive Definition (= Konstruktion durch vollständige Induktion):

Es sei $n_0 \in \mathbb{Z}$ und $N = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq n_0\}$. Um einen mathematischen Begriff $\mathcal{E}(n)$ für alle $n \in N$ zu definieren, genügt es:

(R1) $\mathcal{E}(n_0)$ zu definieren und

(R2) $\forall n \in N$: $\mathcal{E}(n+1)$ mit Hilfe von $\mathcal{E}(n)$ zu definieren

[bzw.

(R2') $\forall n \in N$: $\mathcal{E}(n+1)$ mit Hilfe von $\mathcal{E}(n), \mathcal{E}(n-1), \ldots, \mathcal{E}(n_0)$ zu definieren].

Satz (4)

Für $n \in \mathbb{N}$ ist die Anzahl aller möglichen Anordnungen (= „Permutationen”) von n verschiedenen Objekten $n!$

Definition (4)

Für $n, k \in \mathbb{N}_0$ wird der *Binomialkoeffizient* $\binom{n}{k}$, sprich „n über k", definiert durch:

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!} & \text{falls } \; 0 \le k \le n \\ 0 & \text{falls } \; n < k \end{cases} .$$

Offensichtlich gilt für $0 \le k \le n$: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Satz (5)

Für $n, k \in \mathbb{N}_0$ gilt:

i) $$\binom{n}{k} = \prod_{i=1}^{k} \frac{n-i+1}{i} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}$$

ii) $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$ *und* $\binom{n}{k} \in \mathbb{N}_0$

iii) Eine endliche Menge M mit n Elementen besitzt genau $\binom{n}{k}$ Teilmengen mit k Elementen.

Definition (4)

Für $n, k \in \mathbb{N}_0$ wird der *Binomialkoeffizient* $\binom{n}{k}$, sprich „n über k", definiert durch:

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!} & \text{falls} \quad 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{falls} \quad n < k \end{cases} .$$

Offensichtlich gilt für $0 \leq k \leq n$: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Satz (5)

Für $n, k \in \mathbb{N}_0$ gilt:

i) $\displaystyle\binom{n}{k} = \prod_{i=1}^{k} \frac{n-i+1}{i} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}$

ii) $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$ *und* $\binom{n}{k} \in \mathbb{N}_0$

iii) Eine endliche Menge M mit n Elementen besitzt genau $\binom{n}{k}$ Teilmengen mit k Elementen.

Satz (6) (Binomischer Lehrsatz)

Für (beliebige) Zahlen a, b und $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i =$$

$$= a^n + \tbinom{n}{1} a^{n-1} b + \tbinom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \ldots + \tbinom{n}{n-1} a b^{n-1} + b^n .$$

Korollar

a) *Für $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:* $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n .$

b) *Ist M eine endliche Menge mit $\#M = n \in \mathbb{N}_0$, so gilt:*

$$\#\mathfrak{P}(M) = 2^n .$$

Satz (6) (Binomischer Lehrsatz)

Für (beliebige) Zahlen a, b *und* $n \in \mathbb{N}$ *gilt:*

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i =$$

$$= a^n + \tbinom{n}{1} a^{n-1} b + \tbinom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \ldots + \tbinom{n}{n-1} a b^{n-1} + b^n .$$

Korollar

a) *Für* $n \in \mathbb{N}_0$ *gilt:* $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$.

b) *Ist* M *eine endliche Menge mit* $\#M = n \in \mathbb{N}_0$, *so gilt:*

$$\#\mathfrak{P}(M) = 2^n \ .$$