Skriptum zur ANALYSIS 1

Günter Lettl WS 2017/2018

§1. Grundbegriffe der Mengenlehre und der Logik

1.1 Naive Mengenlehre [Sch-St §4.1]

Definition einer Menge nach Georg Cantor (1845–1918):

„Eine *Menge* M ist eine Zusammenfassung bestimmter, wohlunterschiedener Objekte unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die *Elemente* von M genannt werden) zu einem Ganzen."

Ist M eine Menge und a ein Objekt, so gilt
entweder $a \in M$ („*a ist Element von M*", „*a liegt in M*")
oder $a \notin M$ („*a ist kein Element von M*", „*a gehört nicht zu M*").

Relationen zwischen Mengen:

M und N seien beliebige Mengen.

Gleichheit:	$M = N$	M und N heißen *gleich* genau dann, wenn sie dieselben Elemente enthalten.
	$M \neq N$	M und N sind *nicht gleich*.
Teilmenge:	$M \subset N$	M ist eine *Teilmenge* von N (*ist in N enthalten*) genau dann, wenn jedes Element von M auch zu N gehört. (andere Notationen: $M \subseteq N$, $M \subseteqq N$)
	$M \subsetneqq N$	M ist eine *echte Teilmenge* von N genau dann, wenn $M \subset N$ und $M \neq N$ erfüllt sind.
	$M \not\subset N$	M ist *keine Teilmenge* von N (andere Notationen: $M \not\subseteq N$).

Operationen mit Mengen:

M und N seien beliebige Mengen.

Der *Durchschnitt* von M und N, $M \cap N$, ist die Menge, die aus genau jenen Elementen besteht, die sowohl zu M als auch zu N gehören.
M und N heißen (*zueinander*) *disjunkt* (oder: *elementfremd*), wenn $M \cap N = \emptyset$ gilt.

Die *Vereinigung* von M und N, $M \cup N$, ist die Menge, die aus genau jenen Objekten besteht, die Elemente von M oder von N (oder von beiden) sind.

Die *Differenz* von M und N, $M \setminus N$, ist die Menge derjeniger Elemente von M, welche nicht zu N gehören.

Das *(kartesische) Produkt* (oder *die Produktmenge*) von M und N, $M \times N$ besitzt als Elemente genau alle *geordneten Paare* (a,b), für welche $a \in M$ und $b \in N$ gilt.
$M \times N = \{(a,b) \mid a \in M \text{ und } b \in N\}$.

Beispiel 1: a) Lesen Sie nach, wie in Ihrem Mittelschullehrbuch (9. Schulstufe) der Begriff der Menge und die Mengenoperationen eingeführt wurden. Lösen Sie einige Beispiele zu diesem Thema.
b) Überlegen Sie sich, dass folgende 3 Mengen gleich sind:
$\{3,1,3,2,2,1,1\}$, $\{1,2,3\}$, $\{x \in \mathbb{N} \mid 2x < 7\}$.

Beispiel 2: Wie viele Elemente besitzen die folgenden Mengen, welche dieser Mengen sind gleich, welche sind Teilmengen einer anderen?
$\{1,2,3\}$, $\{2,2,1,3,2\}$, $\{1,2,\{3\}\}$, $\{1,\{1\}\}$, $\{1,1\}$, $\{1,\{1\},\{1,1\}\}$.
Hinweis: *Die Menge* $\{1,\{2,3\}\}$ *hat genau 2 Elemente, nämlich die Zahl* 1 *und die Menge* $\{2,3\}$.

Beispiel 3: a) Geben Sie für $M = \{1,2,3,4\}$ *und* $N = \{a,b\}$ *die Produktmenge* $M \times N$ *an! Gilt* $M \times N = N \times M$*?*
b) Geben Sie konkrete Beispiele für Mengen M *und* N *an, sodass* $M \setminus N \neq N \setminus M$ *bzw.* $M \cup N = N$ *gelten.*

Definition 1. Es sei M eine beliebige Menge.
a) Enthält M kein Element, so heißt M „die" leere Menge.
Schreibweise: $M = \{\} = \emptyset$.
b) Für eine Menge M heißt

$$\mathfrak{P}(M) = \{A \mid A \subset M\}$$

die *Potenzmenge* von M (= die *Menge aller Teilmengen von* M).

Satz 1. a) *Es gibt nur eine leere Menge.*
b) *Für jede Menge* M *gilt:* $\emptyset \subset M$.

Beispiel 4: Welche der folgenden Aussagen sind wahr bzw. falsch bzw. „Unsinn" (mit jeweiliger Begründung): $\{1,3\} \in \mathfrak{P}(\{1,2,3,4\})$, $\{1,3\} \subset \mathfrak{P}(\{1,2,3,4\})$, $\{\{1\},\{1,3\}\} \subset \mathfrak{P}(\{1,2,3,4\})$, $\{1,5,10\} \in \mathfrak{P}(\mathbb{N})$, $17 \in \mathfrak{P}(\mathbb{N})$, $\mathfrak{P}(\mathbb{N}) \subset \mathfrak{P}(\mathbb{Z})$*?*

1.2 Aussagenlogik und Beweise [Sch-St §§3.2-3.3]

Eine (mathematische oder logische) *Aussage* ist entweder wahr oder falsch.

Eine (mathematische oder logische) *Aussageform* (oder *Prädikat*) enthält eine (oder mehrere) freie Variablen (= Unbestimmte). Durch Einsetzen konkreter Werte für die Variablen entsteht aus einer Aussageform eine Aussage, die dann entweder wahr oder falsch ist.

Operationen mit Aussagen (= logische Verknüpfungen):

Für das Folgende seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ (beliebige) Aussagen.

(1) *Negation*: $\boxed{\neg\mathcal{A}}$ („*nicht* $\mathcal{A}$", „*non* $\mathcal{A}$")
ist die Aussage, die genau dann wahr ist, wenn $\mathcal{A}$ falsch ist.

(2) *Konjunktion*: $\boxed{\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}}$ („$\mathcal{A}$ *und* $\mathcal{B}$")
ist die Aussage, die genau dann wahr ist, wenn sowohl $\mathcal{A}$ als auch B wahr sind.

(3) *Disjunktion*: $\boxed{\mathcal{A} \vee \mathcal{B}}$ („$\mathcal{A}$ *oder* $\mathcal{B}$")
ist die Aussage, die genau dann wahr ist, wenn $\mathcal{A}$ wahr ist oder $\mathcal{B}$ wahr ist (oder beide wahr sind).

(4) *Implikation*: $\boxed{\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}}$ („*aus* $\mathcal{A}$ *folgt* $\mathcal{B}$", $\mathcal{A}$ *impliziert* $\mathcal{B}$", „$\mathcal{B}$ *ist notwendig für* $\mathcal{A}$", „$\mathcal{A}$ *ist hinreichend für* $\mathcal{B}$")
ist die Aussage, die genau dann wahr ist, wenn $\mathcal{A}$ falsch ist oder $\mathcal{B}$ wahr ist.

(5) *Äquivalenz*: $\boxed{\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}}$ („$\mathcal{A}$ *und* $\mathcal{B}$ *sind (logisch) gleichwertig*", „$\mathcal{A}$ *gilt genau dann, wenn* $\mathcal{B}$ *gilt*", „$\mathcal{A}$ *ist notwendig und hinreichend für* $\mathcal{B}$")
ist die Aussage, die genau dann wahr ist, wenn $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ entweder beide wahr oder beide falsch sind.

Logische Quantoren:

Es seien M eine Menge und $\mathcal{A}(x)$ eine Aussageform, die für beliebige Elemente $x \in M$ (für „die Unbestimmte x") formuliert ist.

Die Aussage $\boxed{\forall x \in M\colon\ \mathcal{A}(x)}$ ist wahr genau dann, wenn für alle Elemente $x \in M$ die Aussage $\mathcal{A}(x)$ wahr ist.

Die Aussage $\boxed{\exists x \in M\colon\ \mathcal{A}(x)}$ ist wahr genau dann, wenn es ein Element $x \in M$ gibt, für das die Aussage $\mathcal{A}(x)$ wahr ist.

Definition 2 (**Mengenrelationen und -operationen mit logischen Symbolen**).
Es seien M und N beliebige Mengen. Wir definieren:

a) $(M \subset N) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \forall x \in M\colon x \in N$

$$(M = N) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \Big((\forall x \in M\colon x \in N) \wedge (\forall x \in N\colon x \in M)\Big) \Leftrightarrow \Big((M \subset N) \wedge (N \subset M)\Big)$$

b) $M \cap N = \{x \mid x \in M \wedge x \in N\}$ $\qquad$ $M \cup N = \{x \mid x \in M \vee x \in N\}$

$M \setminus N = \{x \in M \mid x \notin N\}$

c) Es sei I eine nichtleere Menge, und für jedes $i \in I$ sei M_i eine Menge. (Man sagt dann: „$(M_i)_{i\in I}$ ist eine Familie von Mengen, die mit der (Index-)Menge I indiziert ist.")
Dann heißen

$$\bigcap_{i\in I} M_i = \{x \mid \forall i \in I : x \in M_i\}$$

die *Durchschnittsmenge der Mengenfamilie* $(M_i)_{i\in I}$ und

$$\bigcup_{i\in I} M_i = \{x \mid \exists i \in I : x \in M_i\}$$

die *Vereinigungsmenge der Mengenfamilie* $(M_i)_{i\in I}$.

Beispiel 5: a) Gegeben sind die Mengen $M = \{1, 3\}$ und $N = \{1, 2, 3, 4\}$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr bzw. falsch bzw. „Unsinn" (mit jeweiliger Begründung)?
$M \subset N,\ N \subset M,\ M = N,\ M \neq N,\ \{2, 3\} \subset N,\ 2 \in M,\ 3 \subset N,\ \{3\} \subset M,\ \{2\} \in N.$
b) Geben Sie $M \cup N$, $M \cap N$, $M \setminus N$ und $N \setminus M$ an!

Satz 2 (**Rechenregeln für Mengenoperationen**).
Für (beliebige) Mengen A, B und C gelten die folgenden Aussagen:

(1) *Kommutativgesetze:*

$$A \cup B = B \cup A \qquad\qquad A \cap B = B \cap A$$

(2) *Assoziativgesetze:*

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \qquad\qquad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

(3) *Distributivgesetze:*

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \qquad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

(4) *De Morgan'sche Regeln:*

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C) \qquad A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$$

Beispiel 6: Skizzieren Sie die Rechenregeln von Satz 2 mit Hilfe von Venn-Diagrammen.

Definition 3. Eine Menge M heißt *endlich*, wenn es ein $n \in \mathbb{N}_0$ gibt, sodass gilt: M hat genau n (verschiedene) Elemente.
Wir schreiben dann $\#M = n$ und nennen n die *Elementanzahl* (= *Kardinalität, Mächtigkeit*) von M.
Ist die Menge M nicht endlich, so heißt M *unendlich* (und wir schreiben $\#M = \infty$).

1.3 Vollständige Induktion und Rekursion [Sch-St §§2.5,2.3; Kö §1]

Prinzip der vollständigen Induktion:

Es sei $n_0 \in \mathbb{Z}$ eine ganze Zahl und $N = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq n_0\}$. Für jedes $n \in N$ sei eine Aussage $\mathcal{A}(n)$ formuliert. Sind

(I1) $\mathcal{A}(n_0)$ und

(I2) $\forall n \in N: \ \mathcal{A}(n) \Rightarrow \mathcal{A}(n+1)$

wahre Aussagen, so gilt $\mathcal{A}(n)$ für alle $n \in N$.

Bemerkung: Statt **(I2)** ist auch folgende Variante erlaubt:

(I2') $\forall n \in N: \ (\mathcal{A}(n_0) \wedge \mathcal{A}(n_0+1) \wedge \ldots \wedge \mathcal{A}(n)) \Rightarrow \mathcal{A}(n+1)$.

Satz 3 (**Minimumprinzip**). *Jede nicht leere Teilmenge A von $\mathbb{N}_0$ besitzt ein Minimum (= kleinstes Element; d. h. $\exists\, m \in A$, sodass $\forall a \in A: \ m \leq a$; Schreibweise: $m = \min(A)$).*

Rekursive Definition (= Konstruktion durch vollständige Induktion):

Es sei $n_0 \in \mathbb{Z}$ und $N = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq n_0\}$. Um einen mathematischen Begriff $\mathcal{E}(n)$ für alle $n \in N$ zu definieren, genügt es:

(R1) $\mathcal{E}(n_0)$ zu definieren und

(R2) $\forall n \in N$: $\mathcal{E}(n+1)$ mit Hilfe von $\mathcal{E}(n)$ zu definieren

[bzw.

(R2') $\forall n \in N$: $\mathcal{E}(n+1)$ mit Hilfe von $\mathcal{E}(n), \mathcal{E}(n-1), \ldots, \mathcal{E}(n_0)$ zu definieren].

Beispiel 7: Es sei $k \in \mathbb{N}$. Schreiben Sie $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot (2k)$ mit Hilfe des Produktsymbols, und geben Sie den Wert dieses Produkts mit Hilfe der „Fakultät" an.

Beispiel 8: Schreiben Sie $1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \ldots + \frac{k-1}{k}$ mit Hilfe des Summensymbols an. Ist diese Summe gleich $k - \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j}$?

Satz 4. *Für $n \in \mathbb{N}$ ist die Anzahl aller möglichen Anordnungen (= „Permutationen") von n verschiedenen Objekten $n!$*

Definition 4. Für $n, k \in \mathbb{N}_0$ wird der *Binomialkoeffizient* $\binom{n}{k}$, sprich „n über k", definiert durch:

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!} & \text{falls } 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{falls } n < k \end{cases}.$$

Offensichtlich gilt für $0 \leq k \leq n$: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Satz 5. *Für $n, k \in \mathbb{N}_0$ gilt:*

i) $\displaystyle\binom{n}{k} = \prod_{i=1}^{k} \frac{n-i+1}{i} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}$

ii) $\displaystyle\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$ *und* $\displaystyle\binom{n}{k} \in \mathbb{N}_0$

iii) Eine endliche Menge M mit n Elementen besitzt genau $\binom{n}{k}$ Teilmengen mit k Elementen.

Beispiel 9: *a) Wie viele 3-elementige Teilmengen besitzt die Menge $\{A, B, C, D, E\}$? Geben Sie alle an!*
b) Wie viele verschiedene Lottosechser gibt es bei „6 aus 45"? Vergleichen Sie diese Zahl mit der Einwohnerzahl Österreichs!

Satz 6 (**Binomischer Lehrsatz**). *Für (beliebige) Zahlen a, b und $n \in \mathbb{N}$ gilt:*

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + b^n.$$

Beispiel 10: *Multiplizieren Sie mit Hilfe des Binomischen Lehrsatzes aus:*
$(\frac{1}{2} - \frac{2x}{3})^3$, $(2a+3b)^5$, $(4-4)^7$.

Korollar. a) Für $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$.

b) Ist M eine endliche Menge mit $\#M = n \in \mathbb{N}_0$, so gilt $\#\mathfrak{P}(M) = 2^n$.