ELEMENTARE ZAHLENTHEORIE ÜBUNG SS 2020

7. Übungsblatt für den 23. 6. 2020

35. „Rechnen mit Kongruenzen":
Bestimmen Sie (ohne Verwendung eines Taschenrechners oder Computers) die jeweils kleinste natürliche Zahl $r \geq 0$, welche die gegebene Kongruenz erfüllt:
$r \equiv 17 \cdot 14 - 25 \cdot 9 + 38^2 \mod (6)$
$r \equiv 13^4 - 131 \cdot 30 + 5^4 \mod (12)$
$r \equiv 25 \cdot 189 + 26^{27} - 15 \cdot 371 \mod (19)$.
Hinweis: Ersetzen Sie Faktoren/Summanden durch betragsmäßig möglichst kleine, dazu kongruente Zahlen, indem Sie Vielfache des Moduls addieren bzw. subtrahieren; z.B.:
$17 \equiv 17 - 3 \cdot 6 = -1 \mod (6)$ und $14 \equiv 14 - 2 \cdot 6 = 2 \mod (6)$, also
$17 \cdot 14 \equiv (-1) \cdot 2 \equiv -2 \mod (6)$; u.s.w.
Potenzen können in Potenzen kleinerer Potenzen zerlegt werden.

36. **a)** Lösen Sie die Gleichung $x^2 = \overline{1}$ in $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ und in $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ durch Ausprobieren!
b) Beweisen Sie folgende Aussage (welchen Satz der Vorlesung können Sie dafür verwenden?):
für alle $x \in \mathbb{Z}$ gilt: $\Big(24 \mid (x^2-1)\Big) \iff \Big(\Big(3 \mid (x^2-1)\Big) \wedge \Big(8 \mid (x^2-1)\Big)\Big)$
c) Verwenden Sie Teile **a)** und **b)**, um alle Lösungen der Gleichung $x^2 = \overline{1}$ in $\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$ ohne Ausprobieren zu bestimmen! (Satz 3.3.23 könnte nützlich sein.)

37. Eine ziemlich vergilbte Rechnung aus einem Archiv weist den Kauf von 88 Konserven zu insgesamt ?68, 7? Kronen aus, wobei die beiden durch ? angedeuteten Ziffern unleserlich sind. Wie viel kostete eine Konserve?

38. Ein Zauberer verwendet folgenden Trick, um für eine (große) natürliche Zahl den Rest bei Division durch 49 zu bestimmen: er teilt die Dezimaldarstellung der gegebenen Zahl $n \in \mathbb{N}$ in zwei Blöcke: a besteht aus der Zehner- und Einerziffer von n, und b besteht aus den Ziffern ab der Tausenderstelle aufwärts (also z.B.: $n = 17508$ ergibt $a = 08$ und $b = 175$). Damit bildet er die neue Zahl $n_1 = 2b + a < n$, und führt mit dieser das oben beschriebene Verfahren so lange fort, bis er eine Zahl kleiner als 100 erreicht. Dann subtrahiert er eventuell noch ein- oder zweimal die Zahl 49, bis er eine Zahl in der Menge $\{0, 1, 2, 3, \ldots, 48\}$ erhält, und behauptet, das diese Zahl der Rest der Ausgangszahl bei Division durch 49 ist.
Beweisen Sie, dass der Trick des Zauberers immer das korrekte Ergebnis liefert!
Formulieren Sie mit diesem Ergebnis Teilbarkeitsregeln für 7 und 49, und stellen Sie fest, ob 857913 durch 7 oder 49 teilbar ist.

39. **a)** Zeigen Sie, dass die Restklasse $\overline{241}$ in $\mathbb{Z}/1325\mathbb{Z}$ invertierbar ist, und bestimmen Sie die zu $\overline{241}$ inverse Restklasse, indem Sie $\mathrm{ggT}(241, 1325)$ als Linearkombination dieser beiden Zahlen angeben.
b) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{Z}$, welche die Kongruenz $241 \cdot x \equiv 3 \mod (1325)$ erfüllen!

40. Lösen Sie die folgenden Gleichungen für $x \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ für die jeweils angegebene Zahl $m \in \mathbb{N}$:
a) $m = 56$: $\overline{14}x = \overline{35}$ bzw. $\overline{21}x = \overline{35}$
b) $m = 11$: $x^2 - \overline{3}x + \overline{3} = \overline{0}$ bzw. $x^2 - \overline{3}x + \overline{4} = \overline{0}$.