ELEMENTARE ZAHLENTHEORIE ÜBUNG SS 2020

6. Übungsblatt für den 9. 6. 2020

29. Für $n \in \mathbb{N}^+$ sei p_n die n-te Primzahl, wenn wir die Primzahlen der Größe nach ordnen (also: $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $\dots$, $p_{100} = 541$, $\dots$). Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}^+$ gilt:

$$p_n \leq 2^{2^{n-1}} (= 2^{(2^{n-1})})$$

Hinweis: Verwenden Sie vollständige Induktion und die Idee aus dem Beweis von Satz 2.2.1

30. Es seien $a, n \in \mathbb{N}$ mit $a \geq 2$ und $n \geq 2$. Beweisen Sie:

a) Ist $a^n + 1 \in \mathbb{P}$, so ist a gerade und $n = 2^m$ mit einem $m \in \mathbb{N}^+$.

b) Ist $a^n - 1 \in \mathbb{P}$, so ist $a = 2$ und $n \in \mathbb{P}$.

Hinweis: Verwenden Sie die „allgemeinen binomischen Formeln" $a^n - b^n = \dots$ und $a^n + b^n = \dots$ (für ungerades n)!

31. Es seien $p \in \mathbb{P}$ und $k \in \{1, 2, \dots, p-1\}$.
Beweisen Sie, dass p den Binomialkoeffizienten $\binom{p}{k}$ teilt!

32. Gegeben sind die Zahlen $a = 2^5 \cdot 3^6 \cdot 5 \cdot 7^4 \cdot 11^5 \cdot 13^3 \cdot 19^{12}$, $b = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7^5 \cdot 17^3 \cdot 19^4$ sowie $c = 2^{t_1} \cdot 3^{t_2} \cdot 5^{m_1} \cdot 7^{m_2} \cdot 11^{j_1} \cdot 13^{j_2} \cdot 17^{j_3} \cdot 19^{j_4}$, wobei $t_1 t_2 m_1 m_2 j_1 j_2 j_3 j_4$ die Ziffern Ihres Geburtsdatums sind.
Bestimmen Sie $\mathrm{ggT}(a, b, c)$ und $\mathrm{kgV}(a, b, c)$ mit der Methode von Satz 2.3.5!

33. Die Primfaktorisierung einer beliebigen Zahl $z \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ sei wie in Satz 2.3.3 gegeben:

$$z = \mathrm{sgn}(z) \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{v_p(z)} \ .$$

a) Geben Sie die Primfaktorisierung aller Elemente von $T(z)$ an!

b) Bestimmen Sie $\#T(z)$ und überlegen Sie sich, dass Ihr Resultat auch für $z = \pm 1$ gilt!

c) Verwenden Sie Teil **b)**, um einen anderen Beweis für das Übungsbeispiel **9.c)** zu geben!

34. **a)** Zeigen Sie, dass für beliebige $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\max\{x, y, z\} = x + y + z - \min\{x + y, x + z, y + z\} \ .$$

b) Beweisen Sie die Formel von Team B aus dem Übungsbeispiel **20**, indem Sie zeigen, dass jede Primzahl $p \in \mathbb{P}$ auf beiden Seiten der Formel mit derselben Potenz vorkommt!