ELEMENTARE ZAHLENTHEORIE ÜBUNG SS 2020

5. Übungsblatt für den 26. 5. 2020

25. Es seien $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $(a, b) \neq (0, 0)$, $d = \mathrm{ggT}(a, b)$ und

$$L_h = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid ax + by = 0\} \ .$$

Beweisen Sie: $L_h = \left\{ \left(t\frac{b}{d}, -t\frac{a}{d}\right) \,\middle|\, t \in \mathbb{Z} \right\}$.

26. Es seien die Bezeichnungen wie in Beispiel **25.** gegeben. Weiters sei $c \in \mathbb{Z}$ und $(x_0, y_0) \in \mathbb{Z}^2$ eine Lösung der Gleichung

$$ax + by = c \ .$$

Beweisen Sie: $L = \left\{ \left(x_0 + t\frac{b}{d}, y_0 - t\frac{a}{d}\right) \,\middle|\, t \in \mathbb{Z} \right\}$ ist die Menge aller ganzzahligen Lösungen obiger Gleichung.

27. Bestimmen Sie mit einer Variante des Siebs von Eratosthenes alle Primzahlen zwischen 700 und 800 (es sind 14 Stück).
Welche Primzahlen müssen Sie dafür bereits kennen? Bemühen Sie sich, möglichst wenige Zahlen „aufzuschreiben"! Beschreiben Sie Ihr Verfahren möglichst genau und vollständig!

28. **a)** Es sei $p \in \mathbb{P}$ eine Primzahl mit $p > 30$ und r der Rest bei Division von p durch 30. Welche Werte sind für r möglich?

b) Zeigen Sie: ist (p, q) ein Primzahlzwilling mit $p > 30$ und die Einerziffer von p gleich 1, so ist $p = 30n + 11$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

c) Finden Sie eine zu **b)** ähnliche Aussage für den Fall, dass die Einerziffer von p gleich 7 ist!