ELEMENTARE ZAHLENTHEORIE ÜBUNG SS 2020

4. Übungsblatt für den 19. 5. 2020

19. Bestimmen Sie für $k \in \mathbb{N}$: $\mathrm{ggT}(8k+5, 3k+1)$ und $\mathrm{kgV}(8k+5, 3k+1)$.
[Das Ergebnis hängt von k ab.]

20. Zwei Studententeams versuchen, Satz 1.5.7 der Vorlesung für 3 Zahlen zu verallgemeinern. Für alle $a, b, c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ gilt:

$$\textbf{Resultat von Team A:}\quad \mathrm{kgV}(a,b,c) = \frac{|abc|}{\mathrm{ggT}(a,b,c)}$$

$$\textbf{Resultat von Team B:}\quad \mathrm{kgV}(a,b,c) = \frac{|abc|}{\mathrm{ggT}(ab,ac,bc)}$$

Überprüfen Sie, ob ein Team ein richtiges Ergebnis gefunden hat (Beweis oder Gegenbeispiel)!

21. Bestimmen Sie alle Zahlen $n \in \mathbb{N}$ mit $n \leq 300$, für welche gilt:

$$\mathrm{ggT}(n, 6468, 2772) = 14 \ .$$

22. Es seien $k \in \mathbb{N}_+$, $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{Z}$ nicht alle 0 und $c \in \mathbb{Z}$. Beweisen Sie:
Die Gleichung

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_kx_k = c$$

hat genau dann eine Lösung $(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in \mathbb{Z}^k$, wenn $\mathrm{ggT}(a_1, a_2, \ldots, a_k) \mid c$ gilt.

23. Der Coro-Gnom (aus ÜbgBsp. 16) liest im Vorlesungsskriptum von Prof. Kainrath weiter und versucht Definition 2.1.1 mit Gnomzahlen. Zwischen 40 und 60 findet er die „Gnomprimzahlen" 43, 46, 55 und 58 (vgl. ÜbgBsp. 12.a)). Erstaunt stellt er aber fest, dass für manche dieser Zahlen Satz 2.1.3 stimmt, für manche aber nicht. Der Gnom nennt die Gnomzahlen, welche Satz 2.1.3 erfüllen, *Gnomprimzahlen*, und die anderen *Gnomatome* (diese erfüllen zwar Definition 2.1.1, jedoch ist Satz 2.1.3 für sie falsch).

a) Vollziehen Sie die Überlegungen, Rechnungen und Begründungen des Gnoms nach!

b) Zeigen Sie, dass das Produkt der beiden Gnomatome $n = 46 \cdot 55$ auch als Produkt von zwei anderen Gnomatomen geschrieben werden kann!

c) Versuchen Sie (da Sie ja auch die natürlichen Zahlen und nicht nur die Gnomzahlen kennen) eine Erklärung für dieses seltsame Phänomen zu finden! Können Sie alle Gnomprimzahlen und alle Gnomatome explizit beschreiben?

24. Für $0 \neq c \in \mathbb{Z}$ sei $\mathbb{P}(c) = \{p \in \mathbb{P} \mid \ p|c\}$ die Menge aller Primteiler der Zahl c.
Beweisen Sie, dass für $a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ gilt:
a und b sind genau dann zueinander teilerfremd, wenn $\mathbb{P}(a) \cap \mathbb{P}(b) = \emptyset$.

Hinweis: Verwenden Sie Def. 1.4.14 der VO, und bemühen Sie sich, diesen (einfachen) Äquivalenzbeweis logisch genau aufzuschreiben!