ELEMENTARE ZAHLENTHEORIE   ÜBUNG   SS 2020

3. Übungsblatt für den 5. 5. 2020

13. Bestimmen Sie $\mathrm{ggT}(3298, 2037)$ mithilfe des Euklid'schen Algorithmus (VO Satz 1.4.7), wobei Sie

a) Division mit kleinstem nicht-negativem Rest so wie in Satz 1.4.7 verwenden.

b) Division mit betragsmäßig kleinstem Rest (vgl. ÜbgBsp. 2) so wie in VO Beispiel 1.4.6.6. (letzter Schritt) verwenden.

Wie viele Divisionen benötigen Sie für die jeweilige Methode? Was fällt Ihnen dabei auf?

14. Es seien $a, b, k \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq b < a$ und $2^k \leq b < 2^{k+1}$. Beweisen Sie: berechnet man $\mathrm{ggT}(a, b)$ nach der Methode von Übg.Bsp. 13.b), so werden höchstens k Divisionen benötigt!
Tip: verwenden Sie vollständige Induktion nach $k \geq 0$.

Wie viele Divisionen braucht man höchstens, um $\mathrm{ggT}(123456789, 987654321)$ zu berechnen?

15. Bestimmen Sie $d = \mathrm{ggT}(308, 495, 1617)$ und finden Sie ganze Zahlen $x, y, z \in \mathbb{Z}$ mit

$$308x + 495y + 1617z = d\ .$$

16. Ein Coro-Gnom findet das Vorlesungsskriptum von Prof. Kainrath. Er versucht Definition 1.4.5 mit Gnomzahlen (vgl. ÜbgBsp. 11.), bestimmt $T_G(220) \cap T_G(550)$ und den größten gemeinsamen Gnomteiler der beiden Gnomzahlen. Erstaunt stellt er aber fest, dass für diese Gnomzahlen weder Satz 1.4.9 noch Korollar 1.4.10 stimmen.

a) Vollziehen Sie die Rechnungen und Überlegungen des Gnoms (mit Beweisen für diese beiden konkreten Zahlen) nach!

b) Welche Beweishälfte von Korollar 1.4.10 stimmt auch für Gnomzahlen, welche nicht?

17. Für $n \in \mathbb{N}$ werden die natürlichen Zahlen H_n rekursiv wie folgt definiert:

$$H_0 = 4, \quad H_1 = 5, \quad H_n = 3H_{n-1} - H_{n-2} \text{ für } n \geq 2.$$

Beweisen Sie, dass für alle $n \geq 0$ gilt: H_n und H_{n+1} sind zueinander teilerfremd.

18. Bestimmen Sie alle rationalen Zahlen, die laut Satz 1.4.17 Nullstellen des Polynoms

$$f(X) = 6X^3 - 11X^2 - 3X + 2$$

sein könnten. Welche davon sind tatsächlich Nullstellen von f?