

2. Übungsblatt für den 21. 4. 2020

7. Zeigen Sie, dass 137 jede 8-stellige Dezimalzahl der Form $wxyzwxyz$ teilt (d.h. $w, x, y, z \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ sind die Dezimalziffern)!
8. Beweisen Sie, dass für jedes $k \in \mathbb{N}$ die Zahl $3^{4k} - 2^{4k}$ durch 13 teilbar ist!
9. Für $n \in \mathbb{N}^+$ setzen wir

$$T_1(n) = \{t \in T(n) \mid t < \sqrt{n}\} \quad \text{und} \quad T_2(n) = \{t \in T(n) \mid t > \sqrt{n}\}$$
 - a) Zeigen Sie, dass $f : T_1(n) \rightarrow T_2(n)$, definiert durch $f(t) = n/t$, eine bijektive Abbildung ist. Erklären Sie die Abbildungsvorschrift mit Worten!
 - b) Wie hilft Ihnen a), um $T(n)$ zu bestimmen? Geben Sie die Menge $T(200)$ explizit an!
 - c) Verwenden Sie a), um zu beweisen: n ist genau dann eine Quadratzahl, wenn $\#T(n)$ ungerade ist.
10. Es seien $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}^+$ und r sei der Rest der Division von n durch m . Beweisen Sie, dass für jedes $a \in \mathbb{N}$ mit $2 \leq a$ gilt:
 $a^r - 1$ ist der Rest der Division von $a^n - 1$ durch $a^m - 1$.
 Welchen Rest ergibt die Division von $2020^{2020} - 1$ durch $2020^{2000} - 1$?
11. Die Coro-Gnome kennen nur solche natürliche Zahlen, die bei Division durch 3 den Rest 1 haben: $G = \{1, 4, 7, 10, 13, 16, \dots\}$ bezeichne die Menge aller Gnomzahlen.
 Zeigen Sie:
 - a) Die Gnomzahlen sind bezüglich der Multiplikation abgeschlossen.
 - b) Gilt für Gnomzahlen $g_1, g_2 \in G$ $g_1 \mid g_2$ (in \mathbb{N}), so ist $g_2/g_1 \in G$.
 Definition 1.3.1 der Vorlesung lässt sich also direkt auf die Menge G übernehmen.
12. Wir verwenden die Bezeichnungen von Beispiel 11. Für $g \in G$ definieren wir die Menge der Gnomteiler von g als $T_G(g) = \{t \in G \mid t \mid g\}$.
 - a) Geben Sie für alle $g \in G$ mit $40 \leq g \leq 60$ die Mengen $T_G(g)$ explizit an!
 - b) Zeigen Sie, dass für Gnomzahlen die ersten 3 Aussagen von Lemma 1.4.3 der Vorlesung (mit $T_G(\cdot)$ anstelle von $T(\cdot)$) gelten.
 Wie kann die 4. Aussage von Lemma 1.4.3 modifiziert werden, damit sie für Gnomzahlen gilt?