

# ELEMENTARE ZAHLENTHEORIE ÜBUNG SS 2020

## 2. Übungsblatt für den 21. 4. 2020

7. Zeigen Sie, dass 137 jede 8-stellige Dezimalzahl der Form  $wxyzwxyz$  teilt (d.h.  $w, x, y, z \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$  sind die Dezimalziffern)!

8. Beweisen Sie, dass für jedes  $k \in \mathbb{N}$  die Zahl  $3^{4k} - 2^{4k}$  durch 13 teilbar ist!

9. Für  $n \in \mathbb{N}^+$  setzen wir

$$T_1(n) = \{t \in T(n) \mid t < \sqrt{n}\} \quad \text{und} \quad T_2(n) = \{t \in T(n) \mid t > \sqrt{n}\}$$

a) Zeigen Sie, dass  $f : T_1(n) \rightarrow T_2(n)$ , definiert durch  $f(t) = n/t$ , eine bijektive Abbildung ist. Erklären Sie die Abbildungsvorschrift mit Worten!

b) Wie hilft Ihnen a), um  $T(n)$  zu bestimmen? Geben Sie die Menge  $T(200)$  explizit an!

c) Verwenden Sie a), um zu beweisen:  $n$  ist genau dann eine Quadratzahl, wenn  $\#T(n)$  ungerade ist.

10. Es seien  $n \in \mathbb{N}$ ,  $m \in \mathbb{N}^+$  und  $r$  sei der Rest der Division von  $n$  durch  $m$ . Beweisen Sie, dass für jedes  $a \in \mathbb{N}$  mit  $2 \leq a$  gilt:

$a^r - 1$  ist der Rest der Division von  $a^n - 1$  durch  $a^m - 1$ .

Welchen Rest ergibt die Division von  $2020^{2020} - 1$  durch  $2020^{2000} - 1$ ?

11. Die Coro-Gnome kennen nur solche natürliche Zahlen, die bei Division durch 3 den Rest 1 haben:  $G = \{1, 4, 7, 10, 13, 16, \dots\}$  bezeichne die Menge aller Gnomzahlen.

Zeigen Sie:

a) Die Gnomzahlen sind bezüglich der Multiplikation abgeschlossen.

b) Gilt für Gnomzahlen  $g_1, g_2 \in G$   $g_1 \mid g_2$  (in  $\mathbb{N}$ ), so ist  $g_2/g_1 \in G$ .

Definition 1.3.1 der Vorlesung lässt sich also direkt auf die Menge  $G$  übernehmen.

12. Wir verwenden die Bezeichnungen von Beispiel 11. Für  $g \in G$  definieren wir die Menge der Gnomteiler von  $g$  als  $T_G(g) = \{t \in G \mid t \mid g\}$ .

a) Geben Sie für alle  $g \in G$  mit  $40 \leq g \leq 60$  die Mengen  $T_G(g)$  explizit an!

b) Zeigen Sie, dass für Gnomzahlen die ersten 3 Aussagen von Lemma 1.4.3 der Vorlesung (mit  $T_G(\cdot)$  anstelle von  $T(\cdot)$ ) gelten.

Wie kann die 4. Aussage von Lemma 1.4.3 modifiziert werden, damit sie für Gnomzahlen gilt?