

1. Übungsblatt für den 17. 3. 2020

1. Wählen Sie die natürlichen Zahlen  $a, b \in \mathbb{N}$  folgendermaßen:  $a$  ist Ihr Geburtsdatum in der Form JJJJMMTT und  $b$  ist der Rest bei Division Ihrer Matrikelnummer durch 100 000. Bestimmen Sie Quotient und Rest bei der Division von  $a$  durch  $b$  mit Hilfe eines (einfachen) Taschenrechners, und beschreiben Sie, wie Sie dabei vorgehen!
2. Verwenden Sie Satz 1.2.2 der Vorlesung, um folgende Variante dieses Satzes zu beweisen:  
*Seien  $a \in \mathbb{Z}$ ,  $b \in \mathbb{N}_+$ . Dann gibt es eindeutig bestimmte  $q, r \in \mathbb{Z}$  mit  $-b/2 < r \leq b/2$  und  $a = qb + r$ .*
3. Welche möglichen Reste können auftreten, wenn eine Quadratzahl  $a = n^2$  (mit  $n \in \mathbb{N}$ ) durch 3 bzw. durch 8 dividiert wird?  
Welche der Zahlen 36 012 008, 36 012 016 bzw. 36 012 018 könnte eine Quadratzahl sein?
4. Zeigen Sie nur mit Hilfe von Resultaten der Vorlesung: sind  $a, b \in \mathbb{Z}$  und ist das Produkt  $ab$  ein Vielfaches von 7, so ist  $a$  oder  $b$  ein Vielfaches von 7.  
Gilt dieses Resultat auch, wenn man statt 7 eine beliebige positive ganze Zahl wählt?
5. Beweisen Sie: für jedes  $n \in \mathbb{Z}$  ist die Zahl  $n^5 - 15n^3 + 4n$  durch 5 teilbar!
6. Für  $a \in \mathbb{N}$  sei  $r$  der Rest bei Division von  $a$  durch 100 und  $t \in \{2, 4, 5, 10, 20, 25, 50\}$ . Beweisen Sie:  $a$  ist genau dann durch  $t$  teilbar, wenn  $r$  durch  $t$  teilbar ist!