

ELEMENTARE ZAHLENTHEORIE ÜBUNG SS 2020

1. Übungsblatt für den 17. 3. 2020

1. Wählen Sie die natürlichen Zahlen $a, b \in \mathbb{N}$ folgendermaßen: a ist Ihr Geburtsdatum in der Form JJJJJMMTT und b ist der Rest bei Division Ihrer Matrikelnummer durch 100 000. Bestimmen Sie Quotient und Rest bei der Divison von a durch b mit Hilfe eines (einfachen) Taschenrechners, und beschreiben Sie, wie Sie dabei vorgehen!
2. Verwenden Sie Satz 1.2.2 der Vorlesung, um folgende Variante dieses Satzes zu beweisen:
Seien $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}_+$. Dann gibt es eindeutig bestimmte $q, r \in \mathbb{Z}$ mit $-b/2 < r \leq b/2$ und $a = qb + r$.
3. Welche möglichen Reste können auftreten, wenn eine Quadratzahl $a = n^2$ (mit $n \in \mathbb{N}$) durch 3 bzw. durch 8 dividiert wird?
Welche der Zahlen 36 012 008, 36 012 016 bzw. 36 012 018 könnte eine Quadratzahl sein?
4. Zeigen Sie nur mit Hilfe von Resultaten der Vorlesung: sind $a, b \in \mathbb{Z}$ und ist das Produkt ab ein Vielfaches von 7, so ist a oder b ein Vielfaches von 7.
Gilt dieses Resultat auch, wenn man statt 7 eine beliebige positive ganze Zahl wählt?
5. Beweisen Sie: für jedes $n \in \mathbb{Z}$ ist die Zahl $n^5 - 15n^3 + 4n$ durch 5 teilbar!
6. Für $a \in \mathbb{N}$ sei r der Rest bei Division von a durch 100 und $t \in \{2, 4, 5, 10, 20, 25, 50\}$. Beweisen Sie: a ist genau dann durch t teilbar, wenn r durch t teilbar ist!