

## ANALOGIEN ZWISCHEN FUETERS $T$ -FUNKTION UND DER TANGENSFUNKTION

GÜNTER LETTL

### 1. Einleitung.

In dieser Note versuchen wir, auf Ähnlichkeiten zwischen den von Fueter in [F] näher untersuchten, elliptischen Funktionen  $T(z)$  und der Funktion  $\mathcal{T}(z) := i \tan \pi z$  aufmerksam zu machen. Neben funktionentheoretischen Analogien fallen besonders die parallelen arithmetischen Eigenschaften der Funktionswerte an Torsionspunkten auf. Im Gegensatz zu den von Cassou-Noguès und Taylor [CN-T1] vermuteten Analogien zu Einheitswurzeln scheint es durchaus denkbar, daß die singulären Werte von  $T(z)$  für die Klassenkörper eines imaginär-quadratischen Zahlkörpers eine ähnliche Rolle spielen wie die singulären Werte von  $\mathcal{T}(z)$  für die Klassenkörper über  $\mathbb{Q}$ .

Ausgehend von der Analogie zwischen  $T$  und  $\mathcal{T}$  sowie den leicht zu gewinnenden Eigenschaften der Funktion  $\mathcal{T}$  kann man Vermutungen über weitere Resultate im elliptischen Fall aufstellen. Insbesondere bieten sich folgende Ziele an:

- Untersuchung der arithmetischen Eigenschaften der Werte der  $T$ -Funktion an Torsionspunkten mit geradem Annulator. Welche davon – abgesehen von den bekannten Ausnahmen – sind algebraische Einheiten?
- Suche nach elliptischen Funktionen, die mehr Eigenschaften der Einheitswurzeln widerspiegeln als die Fueterfunktionen. Insbesondere die Ergebnisse in den Abschnitten 7 und 8 lassen vermuten, daß die Funktionen  $T$  und  $D$  nicht optimal zur Beschreibung der Struktur der Ganzheitsringe sind.

### 2. Geometrische Analogie.

Bettet man einen imaginär-quadratischen Zahlkörper  $K$  in  $\mathbb{C}$  ein, so wird jedes von  $(0)$  verschiedene (gebrochene) Ideal  $\Omega$  ein Gitter in  $\mathbb{C}$ .  $E = \mathbb{C}/\Omega$  ist eine elliptische Kurve, auf der der Ganzheitsring  $\mathcal{O}_K$  von  $K$  vermöge der gewöhnlichen Multiplikation komplexer Zahlen ("komplexe Multiplikation") operiert. Der Funktionenkörper von  $E$  ist der Körper der  $\Omega$ -elliptischen Funktionen, der von der zum Gitter  $\Omega$  gehörenden Weierstraßschen  $\wp$ -Funktion und deren Ableitung erzeugt wird. Ideale derselben Idealklasse – und nur diese – ergeben isomorphe elliptische Kurven und isomorphe Funktionenkörper.

Ersetzt man in obigen Überlegungen  $K$  durch  $\mathbb{Q}$ , erhält man (bis auf Isomorphie)  $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$ . Kompaktifiziert man diesen offenen Zylinder durch Hinzufügen von zwei Punkten  $i\infty$  und  $-i\infty$ , so erhält man

$$\mathcal{E} := \mathbb{C}/\mathbb{Z} \cup \{i\infty, -i\infty\}.$$

Die Exponentialfunktion  $\exp : z \mapsto e^{2\pi iz}$  bildet  $\mathcal{E}$  bijektiv und stetig auf die Riemannsche Sphäre ab, wodurch eine analytische Struktur auf  $\mathcal{E}$  definiert werden kann. Als Funktionenkörper von  $\mathcal{E}$  ergibt sich der rationale Funktionenkörper  $\mathbb{C}(\exp)$ . Die Addition von  $\mathbb{C}$  induziert auf  $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$  eine  $\mathbb{Z}$ -Modulstruktur, deren Torsionspunkte  $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  sind.

### 3. Elementare Eigenschaften.

Wir definieren die Fuetersche  $T$ -Funktion wie in [CN-T1] IV. und halten uns auch an die dort verwendeten Bezeichnungen:

$\psi$  sei ein 4-Teilungspunkt der elliptischen Kurve  $E = \mathbb{C}/\Omega$  mit  $2\psi \neq 0$  und  $\wp$  die Weierstraßsche Funktion zum Gitter  $\Omega$ .

Als Gegenstück dazu betrachten wir die auf  $\mathcal{E}$  meromorphe Funktion

$$T(z) = \frac{\exp(z) - 1}{\exp(z) + 1} = i \tan \pi z.$$

Wir stellen zunächst die in [CN-T1] IV.§1 besprochenen Eigenschaften von  $T$ , der normierten Ableitung  $T_1$  und der logarithmischen Ableitung  $D$  jenen von  $\mathcal{T}$  und den analog gebildeten Funktionen  $\mathcal{T}_1$  und  $\mathcal{D}$  gegenüber:

$$T = \frac{\exp - \exp(0)}{\exp - \exp(\frac{1}{2})} \quad T = T_{\Omega, \psi} = \frac{\wp(\psi) - \wp(2\psi)}{\wp - \wp(2\psi)}$$

$$\mathbb{C}(T) = \mathbb{C}(\exp) \quad \mathbb{C}(T) = \mathbb{C}(\wp)$$

$T$  ist eine ungerade, 1-wertige meromorphe Funktion auf  $\mathcal{E}$  mit Divisor  
 $T$  ist eine gerade, 2-wertige meromorphe Funktion auf  $E$

$$(T) = (0) - (\frac{1}{2}). \quad (T) = 2(0) - 2(2\psi).$$

Es gilt die Inversionsformel

$$T(z)T(z + \frac{1}{2}) = 1 \quad T(z)T(z + 2\psi) = 1$$

Ausgehend von der Taylorentwicklung um 0

$$T(z) = i\pi z - \frac{1}{3}(i\pi z)^3 + \dots \quad T(z) = \xi^2 + \dots$$

mit  $\xi = (\wp(\psi) - \wp(2\psi))^{\frac{1}{2}} z$

erhält man als normierte Ableitung

$$T_1 := \frac{dT}{d(i\pi z)} = \frac{4\exp}{(\exp+1)^2} \quad T_1 = \frac{dT}{d\xi}$$

$$T_1(z) = 1 + \tan^2 \pi z$$

$$T_1 = 1 - T^2 \quad T_1^2 = T(4T^2 + tT + 4),$$

wobei  $t = \frac{12\wp(2\psi)}{\wp(\psi) - \wp(2\psi)}$ .

$T_1$  ist gerade, 2 - wertig       $T_1$  ist ungerade, 3 - wertig  
mit Divisor

$$(T_1) = (i\infty) + (-i\infty) - 2\left(\frac{1}{2}\right). \quad (T_1) = (0) + (\sigma_1) + (\sigma_2) - 3(2\psi),$$

wobei  $\{0, 2\psi, \sigma_1, \sigma_2\}$  die  
2 - Teilungspunkte von  $E$  sind.

Als normierte, logarithmische Ableitung ergibt sich

$$\mathcal{D} := \frac{T_1}{T} = \frac{4\exp}{\exp^2 - 1} = \frac{1}{T} - T \quad D = \frac{T_1}{T}.$$

$$\mathcal{D}(z) = \left(\frac{i}{2} \sin 2\pi z\right)^{-1}.$$

$\mathcal{D}$  ist ungerade, 2 - wertig       $D$  ist ungerade, 2 - wertig  
mit Divisor

$$(\mathcal{D}) = (i\infty) + (-i\infty) - (0) - \left(\frac{1}{2}\right) \quad (D) = (\sigma_1) + (\sigma_2) - (0) - (2\psi)$$

und es gilt:

$$\mathcal{D}(z + \frac{1}{2}) = -\mathcal{D}(z) \quad D(z + 2\psi) = -D(z)$$

#### 4. Additions- und Multiplikationsformeln.

Die Summenformel der Tangensfunktion ergibt

$$T(z_1 \pm z_2) = \frac{T(z_1) \pm T(z_2)}{1 \pm T(z_1)T(z_2)},$$

woraus sich analoge Resultate zu [CN-T1] IV. §2 herleiten lassen.

Stellt man  $T(nz)$  für  $n \in \mathbf{N}$  als rationale Funktion von  $T(z)$  dar, erhält man für das Zähler- und Nennerpolynom dieser Funktion Formeln, welche eine starke Ähnlichkeit mit den Multiplikationsformeln für  $T(z)$  (siehe etwa [CN-T1] IV. §3 und [F] IV. §4) aufweisen. Es lassen sich einfache Rekursionsformeln für diese Polynome angeben.

Es sei  $n \in \mathbf{N}$ . Dann gibt es Polynome

$\mathcal{N}_n(X), \mathcal{Z}_n(X) \in \mathbf{Z}[X^2]$  mit       $N_n, Z_n \in \mathbf{Z}[t][X]$ , sodaß  
positiven Koeffizienten, sodaß

$$T(nz) = \frac{T \mathcal{Z}_n(T)}{\mathcal{N}_n(T)}. \quad T(nz) = \frac{T \mathbf{z}_n(T) Z_n(T)^2}{N_n(T)^2}, \text{ wobei}$$

$$\mathbf{z}_n(X) = \begin{cases} 1 & \text{für ungerades } n \\ 4X^2 + tX + 4 & \text{für gerades } n \end{cases}$$

Es gelten die Rekursionsformeln

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_{n+1} &= \mathcal{N}_n + \mathcal{Z}_n \\ \mathcal{N}_{n+1} &= \mathcal{N}_n + X^2 \mathcal{Z}_n \\ \mathcal{Z}_n \mathcal{Z}_{n-4} &= \frac{(1+X^2)^2 \mathcal{Z}_{n-2}^2 - 4 \mathcal{N}_{n-2}^2}{(1-X^2)^2} & \mathcal{Z}_n \mathcal{Z}_{n-4} &= (1-X^2)^2 \mathcal{Z}_{n-2}^2 - \mathcal{Z}_{n-1} \mathcal{N}_{n-2}^2 \end{aligned}$$

Bezeichnen wir das zu einem Polynom  $f$  reziproke Polynom mit  $f^*$ ,  
d.h.  $f^*(X) = X^{\text{gr}(f)} f(\frac{1}{X})$ , so gilt

für ungerades  $n \in \mathbb{N}$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_n^* &= \mathcal{N}_n & \mathcal{Z}_n^* &= (-1)^{\frac{n-1}{2}} \mathcal{N}_n \\ \mathcal{Z}_n(0) &= n, \mathcal{N}_n(0) = 1 & \mathcal{Z}_n(0) &= n(-1)^{\frac{n-1}{2}}, \mathcal{N}_n(0) = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \end{aligned}$$

und für gerades  $n \in \mathbb{N}$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_n^* &= \mathcal{Z}_n, \mathcal{N}_n^* = \mathcal{N}_n & \mathcal{Z}_n^* &= (-1)^{\frac{n}{2}-1} \mathcal{Z}_n, \mathcal{N}_n^* = (-1)^{\frac{n}{2}} \mathcal{N}_n \\ \mathcal{Z}_n(0) &= n, \mathcal{N}_n(0) = 1 & \mathcal{Z}_n(0) &= \frac{n}{2} (-1)^{\frac{n}{2}-1}, \mathcal{N}_n(0) = (-1)^{\frac{n}{2}} \end{aligned}$$

Die Resultate für  $\mathcal{N}_n$  und  $\mathcal{Z}_n$   
lassen sich leicht mittels  
vollständiger Induktion beweisen.

## 5. Die singulären Werte.

Wir stellen hier die zu [CN-T1] V. analogen Ergebnisse für  $\mathcal{T}$  und  $\mathcal{T}_1$  dar. Die Beweise dieser Resultate sind durchwegs einfach und verwenden folgende, wohlbekannte Tatsache:

Ist  $\zeta$  eine Einheitswurzel der Ordnung  $n \in \mathbb{N}$ , so gilt:

$$1 - \zeta \text{ ist } \begin{cases} \text{keine} \\ \text{eine} \end{cases} \text{ algebraische Einheit} \iff n \begin{cases} = p^k \\ \text{ist durch zwei verschiedene} \\ \text{Primzahlen teilbar} \end{cases}$$

$$1 + \zeta \text{ ist } \begin{cases} \text{keine} \\ \text{eine} \end{cases} \text{ algebraische Einheit} \iff \begin{cases} n = 1 \text{ oder } n = 2p^k \\ \text{in allen anderen Fällen} \end{cases}$$

wobei  $p \in \mathbb{P}$  eine Primzahl und  $k \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$  nicht negativ ist.

$K \subset \mathbb{C}$  sei weiterhin ein imaginär-quadratischer Zahlkörper,  $\Omega$  ein Ideal von  $K$  und  $E = \mathbb{C}/\Omega$ . Für einen Torsionspunkt  $\alpha \in E$  sei

$\text{Ann}(\alpha) = \{a \in \mathcal{D}_K \mid a\alpha = 0\} \triangleleft \mathcal{D}_K$  die *Ordnung* (= Annullator) von  $\alpha$ .

$\alpha$  hat *ungerade Ordnung*, wenn  $\text{Ann}(\alpha)$  prim zu 2 ist.

Für  $\nu \in \mathcal{D}_K$  (bzw.  $f \triangleleft \mathcal{D}_K$ ) bezeichnen wir mit  $E[\nu]$  (bzw.  $E[f]$ ) die  $\nu$ - (bzw.  $f$ -) Teilungspunkte von  $E$ , und mit  $E[\nu]^\times$  (bzw.  $E[f]^\times$ ) die primitiven  $\nu$ - (bzw.  $f$ -) Teilungspunkte. Mit  $K^{(\nu)}$  (bzw.  $K^{(f)}$ ) bezeichnen wir den  $\nu$ - (bzw.  $f$ -) Strahlklassenkörper über  $K$ .

Analog setzen wir für  $n \in \mathbb{N}$   $\mathcal{E}[n] := \frac{1}{n}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$ , bezeichnen mit  $\mathcal{E}[n]^\times$  die primitiven  $n$ - Teilungspunkte von  $\mathcal{E}$  und mit *Ordnung* die gewöhnliche Gruppenordnung.

Ist  $0 \neq \alpha$  ein Torsionspunkt mit ungerader Ordnung, so sind

$$T(\alpha) \quad T(\alpha) \quad \text{und} \quad T(\alpha + \frac{\psi}{2^k}) \quad \text{mit} \quad k \in \mathbb{N}_0$$

ganze, algebraische Zahlen.

Für  $T(\alpha)$  gilt dies sogar,  
wenn nur  $\text{ord}(\alpha) \neq 2p^k$   
mit ungeradem  $p \in \mathbb{P}$  ist.

Sind  $\alpha, \beta$  Torsionspunkte mit gleicher, ungerader Ordnung, so gilt

$$T(\alpha) \sim T(\beta) \quad T(\alpha) \sim T(\beta)$$

( $\sim$  bedeutet hier: assoziiert bezüglich Teilbarkeit)

$T(\alpha) \sim T(\beta)$  gilt auch  
im Fall gerader Ordnung  $\neq 2$ .

Ist  $\alpha$  ein Torsionspunkt, dessen Ordnung ungerade,  
aber keine Prim(ideal)potenz ist, so ist

$$T(\alpha) \quad T(\alpha)$$

eine algebraische Einheit.

Für  $T(\alpha)$  gilt dies sogar, wenn nur  
 $\text{ord}(\alpha) \neq p^k$  und  $\neq 2p^k$   
mit ungeradem  $p \in \mathbb{P}$  ist.

Ist  $\alpha$  ein Torsionspunkt, dessen Ordnung eine ungerade  
Prim(ideal)potenz  $p^k$  (bzw.  $\mathfrak{p}^k$ ) ist, so gilt:

$T(\alpha)$  ist ein Primteiler  $T(\alpha)$  ist durch jeden Primideal-  
von  $p$  in  $\mathbb{Q}(\zeta_{p^k})$ , teiler von  $\mathfrak{p}$  in  $K^{(\text{Ann}(\psi))}K^{(\mathfrak{p}^k)}$   
genau einmal teilbar,

und  $T(\alpha + \frac{1}{2})$  ist dessen Kehrwert. und  $T(\alpha + 2\psi)$  ist dessen Kehrwert.

$$\left( \prod_{\alpha \in \mathcal{E}[p^k]^*} T(\alpha) \right) = (p) \text{ als } \mathbf{Z} \text{- Ideale.} \quad \left( \prod_{\alpha \in E'} T(\alpha) \right) = (\mathfrak{p}) \text{ als } \mathfrak{D}_{K^{(4)}} \text{- Ideale,}$$

wobei  $E'$  ein Halbsystem von primitiven  $\mathfrak{p}^k$ -Teilungspunkten ist.

Es gelten folgende Produktformeln:

für ungerades $n \in \mathbf{N}$ :	für $\nu \in 1 + 2\mathfrak{D}_K$ :
$T(nz) = \prod_{\alpha \in \mathcal{E}[n]} T(z + \alpha)$	$T(\nu z) = \pm \prod_{\alpha \in E[\nu]} T(z + \alpha)$
$n = \prod_{0 \neq \alpha \in \mathcal{E}[n]} T(\alpha)$	$\pm \nu^2 = \prod_{0 \neq \alpha \in E[\nu]} T(\alpha)$

für gerades $n \in \mathbf{N}$ :	für $f \in \mathfrak{D}_K$ mit $\text{Ann}(2\psi) \mid f$
$1 = \prod_{\alpha \in \mathcal{E}[n]} T(z + \alpha)$	$1 = \prod_{\alpha \in E[f]} T(z + \alpha)$
$1 = \prod_{\alpha \in \mathcal{E}[n] \setminus \mathcal{E}[2]} T(\alpha)$	$1 = \prod_{\alpha \in E[f] \setminus E[2]} T(\alpha)$

Da  $\text{Ann}(2\psi) \mid f$ , bildet  $\alpha \mapsto \alpha + 2\psi$  die Menge  $E[f]$  fixpunktfrei auf sich ab. Obige Resultate folgen dann aus der Inversionsformel.

Ist  $0 \neq \alpha$  ein Torsionspunkt mit ungerader Ordnung, so sind

$$T_1(\alpha) \quad T_1(\alpha) \quad \text{und} \quad T_1\left(\alpha + \frac{\psi}{2^k}\right) \quad \text{mit} \quad k \in \mathbf{N}_0$$

algebraisch ganz, und es gilt:

$T_1(\alpha)$ teilt 4.	$T_1(\alpha + \psi)$ – und, falls $\text{Ann}(\alpha)$ keine Primidealpotenz ist, auch $T_1(\alpha)$ – sind höchstens durch Primteiler von 2 teilbar.
------------------------	---

Für  $T_1(\alpha)$  gilt dies sogar, wenn nur  $\text{ord}(\alpha) \neq 2p^k$  mit ungeradem  $p \in \mathbf{P}$  ist.

Für  $\text{ord}(\alpha) > 2$  ist  $T_1(\alpha)$  keine algebraische Einheit.

Es gelten folgende Produktformeln:

für ungerades $n \in \mathbf{N}$ :	für $\nu \in 1 + 2\mathfrak{D}_K$ :
$4^{n-1} T_1(nz) = \prod_{\alpha \in \mathcal{E}[n]} T_1(z + \alpha)$	$c_\nu T_1(\nu z) = \prod_{\alpha \in E[\nu]} T_1(z + \alpha)$
$4^{n-1} = \prod_{0 \neq \alpha \in \mathcal{E}[n]} T_1(\alpha)$	$\nu c_\nu = \prod_{0 \neq \alpha \in E[\nu]} T_1(\alpha)$

wobei  $c_\nu = \eta_\nu (t^2 - 2^6)^{\frac{N(\nu)-1}{4}}$  algebraisch ganz und höchstens durch Primteiler von 2 teilbar ist.

für gerades  $n \in \mathbf{N}$ : für  $f \in \mathcal{D}_K$  mit  $2 \mid f$ :

$$-4^{n-1} \frac{T_1(nz)}{T(nz)^2} = \prod_{\alpha \in \mathcal{E}[n]} T_1(z + \alpha) \quad (t^2 - 2^6)^{\frac{N(f)}{4}} = \prod_{\alpha \in E[f]} T_1(z + \alpha)$$

$$\frac{4^{n-1}}{n^2} = \prod_{\frac{1}{2} \neq \alpha \in \mathcal{E}[n]} T_1(\alpha) \quad (t^2 - 2^6)^{\frac{N(f)}{4}-1} = \prod_{\alpha \in E[f] \setminus E[2]} T_1(\alpha)$$

Der Beweis folgt unmittelbar aus [CN-T1] V.3.2

### 6. Galoisoperation.

$U_+(\mathbf{Q})$  sei die Untergruppe der Ideleinheiten mit positiver, reeller Komponente in der Gruppe aller Ideale von  $\mathbf{Q}$ ,  $J(\mathbf{Q})$ . Da  $\mathbf{Q}^\times$  im Kern des Artinhomomorphismus liegt, faktorisiert dieser über  $U_+(\mathbf{Q})$ :

$$(\cdot, \mathbf{Q}): J(\mathbf{Q}) \rightarrow U_+(\mathbf{Q}) \rightarrow \text{Gal}(\mathbf{Q}^{(\text{ab})}/\mathbf{Q}).$$

$U_+(\mathbf{Q})$  operiert durch "Multiplikation" auf den Torsionspunkten  $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$  von  $\mathcal{E}$ , und für jedes  $\alpha \in \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$  und  $u \in U_+(\mathbf{Q})$  gilt:

$$\exp(\alpha)^{(u^{-1}, \mathbf{Q})} = \exp(u\alpha)$$

(siehe etwa [C-F] p.173). Dieses Resultat überträgt sich unmittelbar auf jede Funktion von  $\mathbf{Q}(\exp)$ , also insbesondere auf  $\mathcal{T}$ ,  $T_1$  und  $\mathcal{D}$ .

Ab nun setzen wir voraus, daß  $K$  nur die Einheiten  $\pm 1$  enthält, also seine Diskriminante kleiner als  $-4$  ist. Die Galoisoperation auf den singulären Werten der Weberfunktion läßt sich in analoger Weise durch "komplexe Multiplikation" beschreiben (siehe etwa [CN-T1] IX.3.1), und man erhält gemäß [CN-T1] IX.4.3 für jeden Torsionspunkt  $2\psi \neq \alpha \in E$  und  $u \in U_4(K)$ :

$$T(\alpha)^{(u^{-1}, K)} = T(u\alpha).$$

### 7. Durch singuläre Werte erzeugte Körper und Ordnungen.

Die Resultate über die Galoisoperation, die Eigenschaften der betrachteten Funktionen sowie die explizite Erzeugung der Strahlklassenkörper durch Einheitswurzeln (Kronecker - Weber) bzw. durch singuläre Werte der Weberfunktion (Weber - Futerer - Hasse) machen es leicht, die von den singulären Werten erzeugten Körper zu bestimmen:

Ist  $\alpha \in \mathcal{E}$  ein Torsionspunkt der Ordnung  $n > 2$ , so gilt:

$$\mathbf{Q}(\mathcal{T}(\alpha)) = \mathbf{Q}(\zeta_n)$$

$$\mathbf{Q}(\mathcal{T}_1(\alpha)) = \mathbf{Q}(\zeta_n + \zeta_n^{-1})$$

$$\mathbf{Q}(\mathcal{D}(\alpha)) =$$

$$\begin{cases} \mathbf{Q}(\zeta_n) & \text{für ungerades } n \\ \mathbf{Q}(\zeta_n - \zeta_n^{-1}) & \text{für gerades } n \end{cases}$$

Ist  $f \triangleleft \mathfrak{D}_K$  ungerade und  $\alpha \in E[f]^\times$ , so gilt:

$$K^{(4)}(\mathcal{T}(\alpha)) = K^{(4)}K^{(f)}$$

$$K^{(4)}(\mathcal{T}(\alpha + \psi)) = K^{(4f)}$$

$$\mathcal{T}_1(\alpha) \in K^{(8f)}$$

$$\frac{D(\alpha)}{D(\nu\alpha)} \in K^{(4f)} \quad \text{für } \nu \in \pm 1 + 4\mathfrak{D}_K.$$

Diese Resultate findet man in [CN-T1] IX.§§4,6.

Bezüglich der Erzeugung von Potenzganzheitsbasen für Strahlklassenkörper bestehen kaum Ähnlichkeiten zwischen  $\mathcal{T}$  und  $\mathcal{T}$ :

Für  $n \neq 2$  (4) ist im allgemeinen die Ordnung  $\mathbf{Z}[\mathcal{T}(\alpha)]$  nicht der volle Ganzheitsring  $\mathbf{Z}[\zeta_n]$ .

Fordert man neben den obigen Voraussetzungen noch zusätzlich, daß (2) in  $K$  zerlegt und  $\text{Ann}(\psi) = (4)$  ist, so gilt (siehe [CN-T1] XI.1.2):

$$\mathfrak{D}_{K^{(4)}} = \mathfrak{D}_{K^{(4)}} [\mathcal{T}(\alpha + \psi)]$$

$$\mathfrak{D}_{K^{(f)}K^{(4)}} = \mathfrak{D}_{K^{(4)}} [\mathcal{T}(\alpha)]$$

In [CN-T2] werden unter gewissen Voraussetzungen Potenzganzheitsbasen für  $\mathfrak{D}_{K^{(f)}}$  über  $\mathfrak{D}_{K^{(1)}}$  mit Hilfe der  $\mathcal{T}$ -Funktion angegeben, während Schertz [Sch1] dieses Problem unter wesentlich allgemeineren Voraussetzungen mit Hilfe von normierten Teilwerten der Weierstraßschen  $\wp$ -Funktion löst.

## 8. Galoismodulstruktur der Ganzheitsringe von Klassenkörpern.

Für absolut abelsche Zahlkörper wurde die Galoismodulstruktur ihrer Ganzheitsringe bereits von Leopoldt (siehe [Leo], [Let]) beschrieben. Sehr einfach läßt sich etwa das folgende spezielle Resultat beweisen ([CN-T1] I.4.1):

Es seien  $r, m \in \mathbb{N}$  ungerade mit  $m \mid r$ ,  $\zeta$  eine Einheitswurzel der Ordnung  $mr$ ,  $\mathfrak{D} = \mathbf{Z}[\zeta]$  der Ganzheitsring von  $\mathbf{Q}(\zeta)$  und  $\Gamma = \text{Gal}(\mathbf{Q}(\zeta)/\mathbf{Q}(\zeta^m))$ . Dann gilt:

$$\mathfrak{D} = \frac{\zeta^m - 1}{\zeta - 1} \mathcal{M},$$

wobei  $\mathcal{M}$  die Maximalordnung des Gruppenringes  $\mathbf{Q}(\zeta^m)\Gamma$  ist.



Mit Hilfe der logarithmischen Ableitung  $\mathcal{D}$  der Tangensfunktion läßt sich dieses Resultat umformen zu:

$$\mathcal{D} = \frac{\mathcal{D}(\alpha)}{\mathcal{D}(m\alpha)} \exp((m-1)\alpha) \mathcal{M} \quad \text{mit } \alpha \in \mathcal{E}[mr]^\times .$$

Damit ist wiederum eine Ähnlichkeit zu dem entsprechenden elliptischen Ergebnis in [CN-T1] XI.2.10 hergestellt:

Es sei  $\mathfrak{p} = (\pi)$  ein Primhauptideal von  $K$  mit  $\pi \in \pm 1 + 4\mathfrak{D}_K$ , und  $\mathfrak{p}$  sowie (2) seien zerlegt in  $K$ . Weiters seien  $\text{Ann}(\psi) = (4)$ ,  $r, m \in \mathbb{N}$  mit  $r \geq m \geq 1$  und  $\alpha \in \mathcal{E}[\mathfrak{p}^{r+m}]^\times$ .

$\mathcal{D}$  sei der Ganzheitsring des Strahlklassenkörpers  $K^{(4\mathfrak{p}^{r+m})}$ ,  $\gamma$  ein erzeugendes Element der zyklischen Galoisgruppe  $\Gamma = \text{Gal}(K^{(4\mathfrak{p}^{r+m})}/K^{(4\mathfrak{p}^r)})$  und  $\mathcal{M}$  die zu dieser Körpererweiterung assoziierte Ordnung des Gruppenringes, d.h.  $\mathcal{M} = \{a \in K^{(4\mathfrak{p}^r)}\Gamma \mid a\mathcal{D} \subset \mathcal{D}\}$ . Dann gilt:

$$\mathcal{D} = \frac{\mathcal{D}(\alpha)}{\mathcal{D}(\pi^m \alpha)} \frac{1 + \gamma}{2} \mathcal{M}$$

Eine Erweiterung dieses Ergebnisses für die Körpererweiterungen  $K^{(l\mathfrak{m}\tau)}/K^{(l\tau)}$ , wobei  $l, m, \tau \in \mathfrak{D}_K$ ,  $m \mid \tau$  und  $l$  "klein" ist, gelang wiederum Schertz [Sch2], jedoch unter Verwendung anderer elliptischer Funktionen.

### 9. Analytische Analogie.

Für  $\tau \in \mathbb{C}$  mit  $\Im(\tau) > 0$  betrachten wir die mit dem Gitter  $\Omega_\tau = \mathbb{Z} \oplus \tau\mathbb{Z}$  definierte elliptische Kurve  $E_\tau = \mathbb{C}/\Omega_\tau$ . Strebt  $\Im(\tau)$  gegen  $+\infty$ , so wird  $E_\tau$  zu  $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$ . Aus der  $q$ -Entwicklung der Weierstraßschen Funktion  $\wp_{\Omega_\tau}$  zum Gitter  $\Omega_\tau$  (siehe etwa [L] 4.§2) erhält man

$$\lim_{\Im(\tau) \rightarrow +\infty} \frac{1}{(2\pi i)^2} \wp_{\Omega_\tau} = \frac{1}{12} + \frac{\exp}{(1 - \exp)^2},$$

woraus sich

$$\lim_{\Im(\tau) \rightarrow +\infty} T_{\Omega_\tau, \psi} = \begin{cases} \pm T^2 & \text{falls } 2\psi = \frac{1}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ergibt.

### 10. Abschließende Bemerkungen.

Wie der letzte Abschnitt zeigt, kann man durch einen Grenzprozeß einen direkten Übergang von der Fueterfunktion zu  $T^2$  herleiten. Dadurch gehen die Funktionsdivisoren, Teilungsgleichungen und viele andere Formeln unmittelbar ineinander über. Vom zahlentheoretischen Standpunkt aus betrachtet scheint jedoch die Parallelität zwischen der Fueterfunktion und der Tangensfunktion in Bezug auf die arithmetischen Eigenschaften an den Torsionspunkten wesentlich interessanter zu sein.

GÜNTER LETTL

LITERATUR

- [C-F] J. W. S. Cassels & A. Fröhlich, eds., Algebraic Number Theory, Academic Press, 1967, reprint 1986.
- [CN-T1] Ph. Cassou-Noguès & M. J. Taylor, Elliptic Functions and Rings of Integers, Progress in Math. 66, Birkhäuser, 1987.
- [CN-T2] Ph. Cassou-Noguès & M. J. Taylor, A Note on Elliptic Curves and the Monogeneity of Rings of Integers, J. London Math. Soc. **37** (1988), 63–72.
- [F] R. Fueter, Vorlesungen über die singulären Moduln und die komplexe Multiplikation der Elliptischen Funktionen, 1. und 2. Teil, Teubner, Leipzig – Berlin, 1924/1927.
- [L] S. Lang, Elliptic Functions, 2nd Ed., GTM 112, Springer, 1987.
- [Leo] H.-W. Leopoldt, Über die Hauptordnung der ganzen Elemente eines abelschen Zahlkörpers, J. reine angew. Math. **201** (1959), 119–149.
- [Let] G. Lettl, The ring of integers of an abelian number field, J. reine angew. Math. **404** (1990), 162–170.
- [Sch1] R. Schertz, Konstruktion von Potenzganzeitsbasen in Strahlklassenkörpern über imaginär-quadratischen Zahlkörpern, J. reine angew. Math. **398** (1989), 105–129.
- [Sch2] R. Schertz, Galoismodulstruktur und Elliptische Funktionen, Preprint Nr. 219, Univ. Augsburg (1990).

GÜNTER LETTL  
INSTITUT FÜR MATHEMATIK  
KARL-FRANZENS-UNIVERSITÄT  
HEINRICHSTRASSE 36  
A-8010 GRAZ, ÖSTERREICH.