

# Integral- und Differentialrechnung für Umweltsystemwissenschaften

VU im WS07/08

GUNTHER H. PEICHL    JENS SCHWAIGER

Institut für Mathematik und Wissenschaftliches Rechnen

# Gliederung I

## 1 Einige Beispiele zur Motivation

## 2 Reelle und komplexe Zahlen

- Mengen
- Anzahlprobleme
- Eigenschaften der Binomialkoeffizienten
- Reelle Zahlen
- Komplexe Zahlen
- Euklidische Räume
- Funktionen
  - Erzeugen neuer Funktionen

## 3 Grenzwert und Stetigkeit

- Grenzwerte von Funktionen
- Stetigkeit
- Qualitative Eigenschaften stetiger Funktionen

# Gliederung II

- Folgen
- Regeln für das Rechnen mit konvergenten Folgen

## 4 Elementare Funktionen

- Potenzfunktion, Wurzelfunktion
- Exponentialfunktion, Logarithmusfunktion
- Winkelfunktionen
  - Polarkoordinaten
  - Schwingungsvorgänge

## 5 Einführung in die Differentialrechnung

- Differenzierbarkeit
- Regeln zur Berechnung der Ableitung
- Mittelwertsatz
- Ableitung und Extrema
- Das Newton Verfahren

# Gliederung III

- Höhere Ableitungen
- 6 Integralrechnung
  - Endliche Summen
  - Das bestimmte Integral
  - Das unbestimmte Integral
    - Integrale und Dichten
  - Numerische Auswertung von  $\int_a^b f(x) dx$ 
    - Rechteckregel
    - Trapezregel
- 7 Funktionen in mehreren Veränderlichen und partielle Ableitungen
  - Partielle Ableitungen
    - Lokale Extrema
  - Extrema mit Nebenbedingungen
- 8 Folgen und Reihen
  - Rekursive Folgen

## Gliederung IV

- Reihen
- Potenzreihen
- Taylorreihen

Die folgenden Beispiele dienen der Motivation und Orientierung. Sie sollen den Einsatz verschiedener mathematischer Methoden in einfachen Situationen demonstrieren. Es sollte Sie daher nicht beunruhigen, wenn Sie nicht allen mathematischen Details folgen können. Es ist gerade Ziel dieser Vorlesung, ihr Grundwissen in Mathematik soweit aufzufrischen und zu erweitern, daß Sie derartige Argumentationen problemlos nachvollziehen können.

## Beispiel

Die Aktivitäten eines Weidetieres kann man grob in Weiden, Bewegung (Flucht, Suche nach geeigneten Weideplätzen) und Ruhe unterteilen. Der Nettoenergiegewinn pro Weidestunde betrage 200 cal, die Nettoverluste an Energie pro Stunde Bewegung bzw. Ruhe seien 150 cal bzw. 50 cal. Man interessiert sich für jenes Aktivitätsmuster, bei welchem sich der Gewinn und die Verluste an Energie gerade die Waage halten.

## Lösung

Um diese Problemstellung in ein mathematisches Modell zu übersetzen, führen wir zuerst geeignete *Variablen* ein: wir bezeichnen mit  $w$ ,  $b$  und  $r$  jeweils die Anzahl der Stunden, welche für Weiden, Bewegung, bzw. Ruhe aufgewendet wird. Welche Beziehungen bestehen zwischen diesen Variablen? Eine natürliche Forderung ist

$$0 \leq w, b, r \leq 24 \quad (1.1)$$

Da wir von der Annahme ausgehen, daß die Tiere zu jeder Tageszeit genau eine der drei Tätigkeiten ausüben, folgt

$$w + b + r = 24. \quad (1.2)$$

## Lsg., Fortsetzung I

Die Energiebilanz

$$\text{Energiegewinn} = \text{Energieverlust}$$

schließlich führt auf die Gleichung

$$200w = 150b + 50r. \quad (1.3)$$

Die beiden Gleichungen (1.2), (1.3) bilden ein System von zwei *linearen Gleichungen* mit drei Unbekannten

$$\begin{aligned} w + b + r &= 24 \\ 200w - 150b - 50r &= 0, \end{aligned}$$

## Lsg., Fortsetzung II

welches mit Gaußelimination gelöst werden kann. Dies ergibt die Lösungen

$$w = \frac{72 - 2r}{7}, \quad b = \frac{96 - 5r}{7}.$$

Man beachte, daß die Lösung des Gleichungssystem nicht eindeutig bestimmt ist: jede Vorgabe von  $r$  bestimmt (nun eindeutig) die Werte der beiden anderen Unbekannten  $w$  und  $b$ . Man sagt, das Gleichungssystem besitzt eine 1-parametrig Schar von Lösungen. Von all diesen Lösungen sind aber nur jene zulässig, welche der Vorzeichenbedingung (1.1) genügen. Die Bedingung  $w \geq 0$  führt auf  $r \leq 36$ , die Bedingung  $b \geq 0$  ist gleichwertig mit  $r \leq \frac{96}{5}$ . Somit sind beide Bedingungen für  $r \leq \frac{96}{5}$  erfüllt. Die Forderungen  $w \leq 24$ ,  $b \leq 24$  sind für  $r \geq 0$  automatisch erfüllt.

## Beispiel

Ein Betrieb möchte den Verkaufspreis eines seiner Produkte festlegen. Eine Marktanalyse ergab, daß bei einem Preis von  $p$  € pro Stück mit einem täglichen Absatz von  $a(p) = 10 - 0.2p$  tausend Stücken pro Tag gerechnet werden kann. Werden  $m$  tausend Stücke pro Tag produziert, betragen die Herstellungskosten pro Stück ungefähr  $h(m) = 1 - 0.01m$  € pro Stück. Der Betrieb kann nicht mehr als 8000 Stücke pro Tag produzieren. Um eine minimale Auslastung von Personal und Material zu gewährleisten, sollen mindestens 2000 Stück pro Tag hergestellt werden. Wie soll unter diesen Bedingungen der Preis des Produktes angesetzt werden, um den täglichen Gewinn zu maximieren?

## Lösung

Hier sind wir mit einem Optimierungsproblem (Maximieren des Gewinnes) mit Nebenbedingungen (die Produktion soll innerhalb gewisser Grenzen bleiben) konfrontiert. Ausgangspunkt unserer Überlegungen sind die ökonomischen Grundbegriffe

$$\text{Gewinn} = \text{Umsatz} - \text{Herstellungskosten}$$

$$\text{Umsatz} = \text{Absatz} \times \text{Preis.}$$

Wird der Preis mit  $p \text{ €}$  pro Stück angesetzt, kann mit einem täglichen Absatz von  $a(p)$  tausend Einheiten, also mit einem Umsatz von  $a(p)p$  tausend €, gerechnet werden.

## Lsg., Fortsetzung I

Die Herstellung von  $a(p)$  tausend Einheiten kostet

$$h(a)a = (1 - 0.01a)a = a - 0.01a^2$$

tausend €. Dies ergibt einen Gewinn  $g$  (in tausend €) von

$$g = ap - a + 0.01a^2 = a(p - 1 + 0.01a).$$

Berücksichtigt man noch, wie der Absatz  $a$  vom Preis  $p$  abhängt, erhält man den Gewinn in Abhängigkeit vom Stückpreis

$$G(p) = (10 - 0.2p)(p - 1 + 0.01((10 - 0.2p))) \quad (1.4)$$

$$= -0.1996p^2 + 10.16p - 9. \quad (1.5)$$

## Lsg., Fortsetzung II

Es ist allerdings noch zu klären, für welche Preise die Gewinnfunktion zu betrachten ist. Ist nämlich der Preis zu hoch, wird die Nachfrage so gedämpft, daß die absetzbare Tagesproduktion unter 2000 Stücke sinkt, ist der Preis zu niedrig, kann die maximale Tagesproduktion die Nachfrage nicht befriedigen. Der Stückpreis ist daher so zu gestalten, daß der Absatz folgender Bedingung

$$2 \leq a(p) \leq 8,$$

also

$$2 \leq 10 - 0.2p \leq 8$$

genügt. Dies führt auf folgende Schranken für den Preis

$$10 \leq p \leq 40.$$

(1.6)

## Lsg., Fortsetzung III

Die ursprüngliche Problemstellung ist somit gleichwertig mit der Aufgabe, jenen Preis zwischen 10 € und 40 € zu finden, der die Gewinnfunktion (1.4) maximiert. Aus einer graphischen Veranschaulichung kann man oft eine ungefähre Lösung ablesen.

## Lsg., Fortsetzung IV

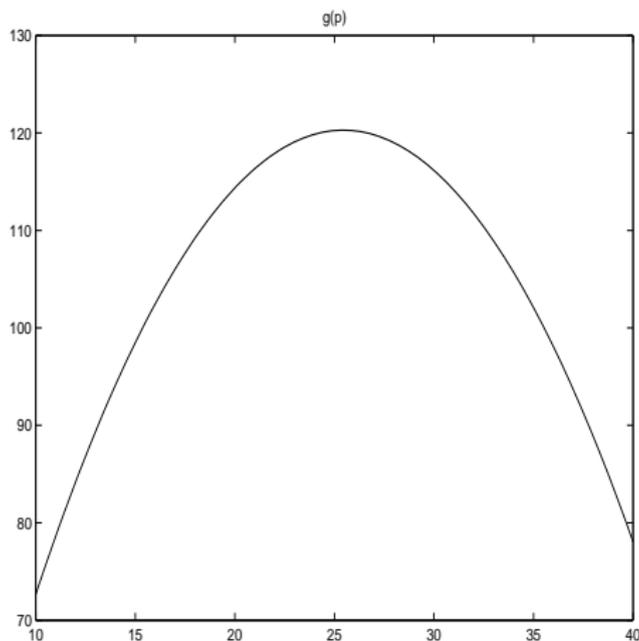


Abbildung: Gewinnfunktion

## Lsg., Fortsetzung V

Abbildung 1 zeigt, daß der Gewinn bei einem Stückpreis von etwa € 25 maximal ist. Insbesondere ist ersichtlich, daß das Gewinnmaximum nicht am Rande des betrachteten Preisintervalles angenommen wird. Der gesuchte Preis kann daher genauer als Nullstelle der Ableitung von  $g$  ermittelt werden:

$$g'(p) = -2 \cdot 0.1996p + 10.16 = 0$$

Dies ergibt die exakte Lösung

$$p = \frac{10.16}{2 \cdot 0.1996} = 25.45,$$

welche auch erwartungsgemäß innerhalb der vorgegebenen Schranken liegt.

## Beispiel

Die Weibchen einer gewissen Tiergattung sind im 1. Jahr unfruchtbar, im 2. Lebensjahr werfen sie durchschnittlich 6 Junge, im 3. Jahr 10 Junge und im 4. Jahr 4 Junge. Etwa die Hälfte der Neugeborenen sind wieder Weibchen.

## Bsp., Fortsetzung I

Die Chance eines Neugeborenen das erste Jahr zu überleben ist 0.24, ein Junges, welches das 1. Lebensjahr überlebt hat, überlebt mit Wahrscheinlichkeit 0.6 das 2. Jahr. Die Wahrscheinlichkeit, vom 3. Jahr zum 4. Jahr zu überleben, beträgt ebenfalls 0.6. So gut wie kein Tier lebt länger als 4 Jahre. Eine Zählung der Weibchen im Jahre 2000 ergab folgende Altersverteilung:

Jahr	Anzahl der Weibchen
0 - 1	5 000
1 - 2	2 000
2 - 3	2 000
3 - 4	1 000

Wie setzt sich die Alterspyramide im Jahre 2004 zusammen?

## Lösung

Da sich die Anzahl der Geburten auf Männchen und Weibchen ungefähr gleich aufteilen und die Überlebenswahrscheinlichkeiten nicht geschlechtsspezifisch sind, kann man sich auf die Untersuchung der Weibchenpopulation beschränken. Diese Population ist in 4 Altersgruppen unterteilt. Wir beginnen die Zeitzählung im Jahre 2000 bei 0 und bezeichnen mit

$x_1(j)$	die Anzahl der Weibchen im Jahre $j$ in der Altersgruppe	0 – 1
$x_2(j)$	"	1 – 2
$x_3(j)$	"	2 – 3
$x_4(j)$	"	3 – 4

## Lsg., Fortsetzung I

Die Alterspyramide im Jahre  $j$  wird also durch das Quadrupel  $(x_1(j), x_2(j), x_3(j), x_4(j))$  wiedergegeben. Betrachten wir nun ein beliebiges, etwa das  $j$ -te Jahr. In diesem Jahr gibt es z.B.  $x_2(j)$  Weibchen im 2. Lebensjahr. Von diesen überleben nur 60% und wechseln zu Beginn des Folgejahres  $j + 1$  in die Altersgruppe der 3 jährigen Weibchen, d.h. es gilt die Gleichung

$$x_3(j + 1) = 0.6x_2(j). \quad (1.7)$$

Ein analoges Argument gilt für die Individuen, welche zu Beginn des Jahres  $j + 1$  in die 2., bzw. 4. Altersgruppe eintreten. Dies führt auf die Gleichungen

$$\begin{aligned} x_2(j + 1) &= 0.24x_1(j) \\ x_4(j + 1) &= 0.6x_3(j). \end{aligned} \quad (1.8)$$

## Lsg., Fortsetzung II

Die Tiere, welche zu Beginn des Jahres  $j + 1$  der 1. Altersgruppe angehören, werden erst im Laufe des Jahres  $j$  geboren. Sie sind die Nachkommen der Weibchen, welche im Jahr  $j$  im 2., 3. bzw. 4. Lebensjahr stehen. Im Jahr  $j$  gibt es  $x_2(j)$  Weibchen im 2. Lebensjahr, welche im Mittel  $\frac{1}{2}6x_2(j)$  weibliche Nachkommen haben,  $x_3(j)$  Weibchen im 3. Lebensjahr mit  $\frac{1}{2}10x_3(j)$  weiblichen Nachkommen und  $x_4(j)$  Weibchen im 4. Lebensjahr mit  $\frac{1}{2}4x_4(j)$  weiblichen Nachkommen. Der Faktor  $\frac{1}{2}$  berücksichtigt, daß sich die Geburten auf beide Geschlechter gleich aufteilen. Insgesamt sind also

$$x_1(j + 1) = 3x_2(j) + 5x_3(j) + 2x_4(j) \quad (1.9)$$

## Lsg., Fortsetzung III

weibliche Nachkommen im Laufe des Jahres  $j$  zu erwarten. Faßt man die Gleichungen (1.7), (1.8) und (1.9) zusammen, ergibt sich folgendes System von *linearen Differenzgleichungen*

$$\begin{aligned}x_1(j+1) &= 3x_2(j) + 5x_3(j) + 2x_2(j) \\x_2(j+1) &= 0.24x_1(j) \\x_3(j+1) &= 0.6x_2(j) \\x_4(j+1) &= 0.6x_3(j),\end{aligned}\tag{1.10}$$

welches es ermöglicht, die Altersverteilung im Jahre  $j+1$  zu berechnen, falls die Alterspyramide im Jahre  $j$  bekannt ist. Aus den Daten des Jahres 0, kann man daher *schrittweise* auf die Altersverteilung im Jahr 1, daraus auf jene des Jahres 2, usw. schließen. Abbildung 2 zeigt die Alterspyramide im Jahr 2004;

## Lsg., Fortsetzung IV

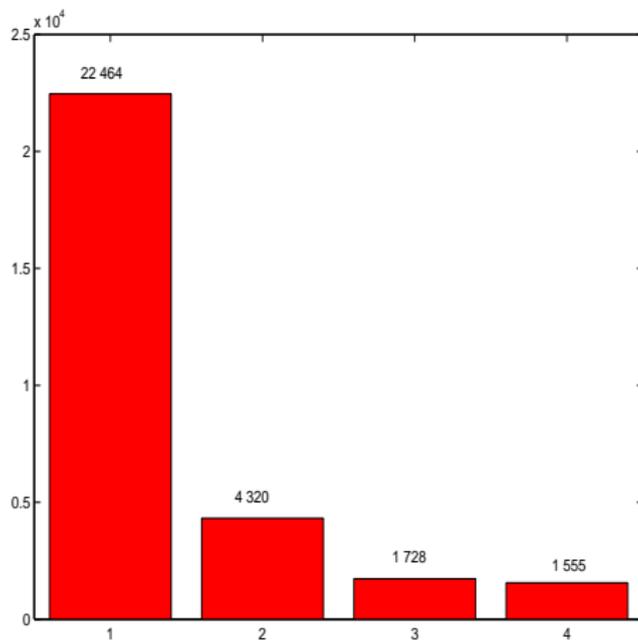


Abbildung: Alterspyramide im Jahr 2004

## Beispiel (Exponentielles Wachstum)

In diesem Beispiel soll die zeitliche Entwicklung der Größe einer Population unter der Annahme untersucht werden, daß der Zuwachs zur Population proportional ist zur betrachteten Zeitspanne und proportional ist zum jeweils vorhandenen Bestand. Diese Annahme ist beispielsweise für Bakterien in einer Nährlösung anfänglich sehr gut erfüllt.

## Lösung

Wir bezeichnen die Größe der Population zur Zeit  $t$  mit  $P(t)$ . Nach Ablauf der Zeitspanne  $\Delta t$  beträgt die Populationsgröße somit  $P(t + \Delta t)$ . Sie ändert sich also während der Zeit  $t$  und  $t + \Delta t$  um

$$\Delta P = P(t + \Delta t) - P(t).$$

Die Annahme über den Populationszuwachs bedeutet

$$\Delta P = \alpha P(t) \Delta t$$

bzw.

$$\frac{\Delta P}{\Delta t} = \alpha P(t). \quad (1.11)$$

## Lsg., Fortsetzung I

Dieser Ansatz gilt nur für kleine Zeitspannen  $\Delta t$ , da ja bei längeren Zeitintervallen die neu hinzukommenden Individuen selbst wieder zur Vermehrung der Population beitragen würden. Wir gehen jedoch von der Annahme aus, daß nur die zur Zeit  $t$  bereits vorhandenen Individuen sich vermehren können. Dies führt zwangsläufig zu dem Ansatz (vgl. (1.11)), daß die mittlere Änderungsrate der Population während der Zeit  $t$  und  $t + \Delta t$  proportional ist zum anfänglich vorhandenen Bestand. Wie soll nun die Zeitspanne  $\Delta t$  gewählt werden. Es ist plausibel, daß unsere Grundannahme umso besser erfüllt ist, je kleiner  $\Delta t$  ist. Da sich kein  $\Delta t$  a priori als optimale Wahl anbietet, abstrahiert man, und betrachtet den Grenzfall  $\Delta t \rightarrow 0$ . In diesem Falle geht die

## Lsg., Fortsetzung II

durchschnittliche Änderungsrate in die momentane Änderungsrate, das ist die Ableitung von  $P$  zur Zeit  $t$ , über:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta t} = \dot{P}(t).$$

Durch diesen Abstraktionsprozess wird (1.11) in eine leicht lösbare *Differentialgleichung* übergeführt:

$$\dot{P}(t) = \alpha P(t) \quad (1.12)$$

Man beachte, daß dies eine Gleichung für eine unbekannte *Funktion* ist. Wir werden im Laufe der Vorlesung sehen, daß (1.12) unendlich viele Lösungen besitzt, jede Lösung allerdings von der Form

$$P(t) = P_0 e^{\alpha(t-t_0)} \quad \text{Exponentielles Wachstum} \quad (1.13)$$

## Lsg., Fortsetzung III

ist. In dieser Schar von Lösungen gibt es jedoch nur genau eine, welche zu einem bestimmten Zeitpunkt  $t_0$  den Wert  $P(t_0) = P_0$  annimmt. Mit anderen Worten: Durch die Größe der Population zu irgendeinem Zeitpunkt  $t_0$ , ist die Größe der Population bereits für alle Zeiten (gleichgültig ob bereits vergangen oder erst zukünftig) festgelegt.

Als Beispiel sei der *Microtus Arvallis* Pall, ein kleines, sich rapide vermehrendes Nagetier, erwähnt. Wir wählen als Zeiteinheit einen Monat und nehmen an, daß sich die Population pro Monat um 40% vermehrt. Sind zur Zeit  $t = 0$  zwei dieser Tiere vorhanden, existieren nach  $t$  Monaten

$$P(t) = 2e^{0.4t}$$

## Lsg., Fortsetzung IV

Nager. Tabelle 1 bringt einen Vergleich von beobachteten Daten mit der Modellrechnung.

Monate	0	2	6	10
beobachtetes $P$	2	5	20	109
berechnetes $P$	2	4.5	22	109,1

**Tabelle:** Wachstum des *Microtus Arvallis* Pall

## Lsg., Fortsetzung V

Eine Folgerung aus diesem Modell ist, daß jede Population mit  $\alpha < 0$  schließlich ausstirbt. Eine andere, letztlich unsinnige Konsequenz des Modelles ist, daß jede Population mit  $\alpha > 0$  über alle Grenzen wächst. Dies liegt natürlich an dem einfachen Ansatz, daß die Population umso rascher wachse, je größer sie bereits ist. Insbesondere wird nicht berücksichtigt, daß bei größeren Populationsdichten die zunehmende Verknappung von Ressourcen (Lebensraum, Nahrungsmittel, etc.) zu einer Änderung des sozialen Verhaltens führt. Beispielsweise wurde bei Ratten beobachtet, daß mit zunehmender Populationsdichte die sozialen Strukturen zusammenbrechen und die Zeugungsbereitschaft abnimmt. Das simple Modell (1.12) muß also für größere Populationsdichten um einen entwicklungshemmenden Faktor ergänzt werden.

## Beispiel (Logistisches Wachstum)

Wir untersuchen nun die zeitliche Entwicklung der Größe einer Population mit Berücksichtigung der innerspezifischen Konkurrenz.

## Lösung

Die Wachstumsrate  $\alpha$  in der Differentialgleichung (1.12) kann als Überschuß der Geburtenrate  $\beta$  über die Todesrate  $\delta$  gedeutet werden

$$\alpha = \beta - \delta,$$

also

$$\dot{P}(t) = \beta P(t) - \delta P(t),$$

d.h. die Änderungsrate der Population ergibt sich aus der Differenz aus jenen Individuen, welche pro Zeiteinheit in die Population eintreten (Geburten, Zuwanderung), und jenen, welche pro Zeiteinheit die Population verlassen (Todesfälle, Abwanderung).

## Lsg., Fortsetzung I

Bereits im Jahre 1838 schlug der belgische Mathematiker *Verhulst* vor, die konstante Sterberate  $\delta$  durch  $\delta P$  zu ersetzen, um den hemmenden Einflüssen großer Populationen besser Rechnung zu tragen. Dies ergibt das Wachstumsgesetz

$$\dot{P}(t) = \beta P(t) - \delta P^2(t)$$

bzw

$$\dot{P}(t) = \lambda P(t)(K - P(t)). \quad (1.14)$$

Man nennt (1.14) Gleichung des *logistischen Wachstums*. In (1.14) wurde

$$\lambda = \delta \quad \text{und} \quad K = \frac{\beta}{\lambda} \quad (1.15)$$

## Lsg., Fortsetzung II

gesetzt. Aus der Differentialgleichung (1.14) kann man bereits das qualitative Verhalten der Lösungen ablesen, ohne sie explizit zu kennen. Es gilt

$$\begin{aligned}\dot{P}(t) &> 0 && \text{solange } P(t) < K \\ \dot{P}(t) &< 0 && \text{solange } P(t) > K \\ \dot{P}(t) &= 0 && \text{solange } P(t) = K\end{aligned}\tag{1.16}$$

Offenbar ist  $P(t) = K$  eine Lösung, bei der sich Zuwachs und Abgang in der Population gerade ausgleichen, die Population befindet sich im *Gleichgewicht*. Da das Monotonieverhalten einer Funktion eng mit ihrer Ableitung verknüpft ist, kann man aus (1.16) schließen, daß die Population stets wächst, solange sie kleiner als ihre Gleichgewichtsgröße  $K$  ist, und stets abnimmt,

## Lsg., Fortsetzung III

solange sie ihre Gleichgewichtsgröße übertrifft. Aus der Theorie der Differentialgleichungen folgt, daß die Kenntnis der Größe der Population zu irgendeinem Zeitpunkt die Lösung von (1.14) für alle Zeiten eindeutig festlegt. Dies hat insbesondere zur Folge, daß eine Population, welche sich nicht im Gleichgewicht befindet, sich diesem Gleichgewicht immer nur von oben bzw. unten nähert, ohne dieses jedoch jemals zu erreichen.  $K$  ist demnach (abgesehen vom trivialen Wert  $P \equiv 0$ , welcher in diesem Zusammenhang keine Rolle spielt) jene Größe der Population, bei der sie im Gleichgewicht existieren kann. Man nennt  $K$  daher auch *Trägerkapazität* des Lebensraumes.

## Lsg., Fortsetzung IV

Beträgt die Populationsgröße zur Zeit  $t = t_0$  beispielsweise  $P(t_0) = P_0$ , dann ist die Lösung von (1.14) gegeben durch

$$P(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K}{P_0} - 1\right)e^{-\lambda K(t-t_0)}}. \quad (1.17)$$

Abbildung 3 zeigt das qualitative Verhalten der Lösungen von (1.14) für verschiedene Werte von  $P_0$ .

## Lsg., Fortsetzung V

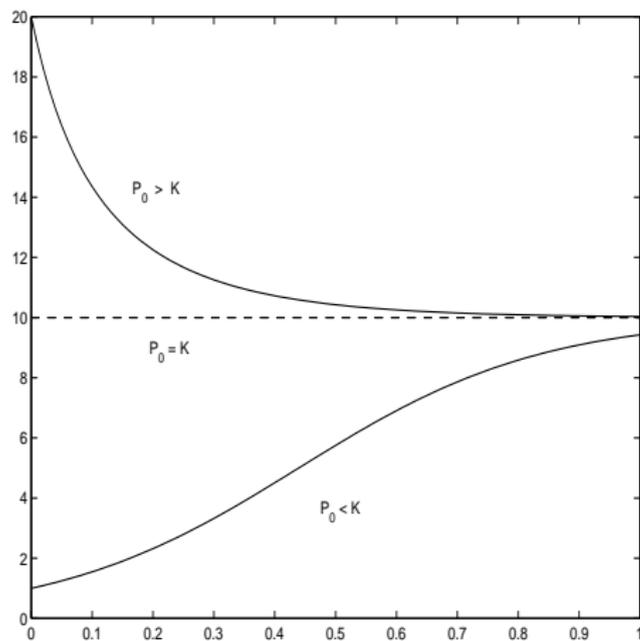


Abbildung: Logistisches Wachstum

## Lsg., Fortsetzung VI

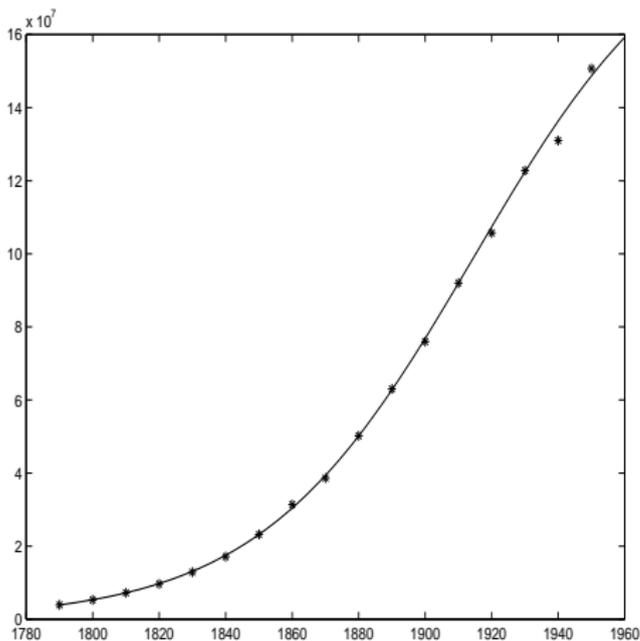


Abbildung: Bevölkerung der USA 1790 – 1950

## Lsg., Fortsetzung VII

Als konkrete Anwendung des logistischen Wachstums betrachten wir die Bevölkerungszunahme in den USA im Zeitraum 1790 – 1950. Die Ergebnisse der Volkszählungen der Jahre 1790, 1850 und 1910 wurden verwendet, um die Geburten- und Sterberate zu bestimmen:  $\alpha = 0.03134$  und  $\delta = 1.5886 \cdot 10^{-10}$ . Dies ergibt die Trägerkapazität  $K = 1.973 \cdot 10^8$ . Abbildung 4 zeigt den Vergleich der Modellrechnung (durchgezogen) mit den Ergebnissen der dezentralen Volkszählungen (markiert durch Sterne). Die Ergebnisse sind umso bemerkenswerter, als weder die großen Einwanderungswellen, noch die fünf Kriege, in denen die USA während dieser Zeit verwickelt waren, berücksichtigt wurden.

## Beispiel

Eine Population von Nutztieren soll bejagt werden. Wie groß kann man die Bejagungsintensität wählen, damit einerseits der pro Zeiteinheit erzielte Ertrag maximal wird und andererseits die Population trotzdem konstant bleibt?

## Lösung

Wir gehen von einem logistischen Modell aus:

$$\dot{P}(t) = \lambda KP(t) - \lambda P^2(t)$$

Es sei daran erinnert, daß  $\lambda KP(t)$  die Anzahl der Individuen darstellt, welche pro Zeiteinheit in die Population eintreten und  $\lambda P^2(t)$  die Anzahl der Individuen angibt, welche pro Zeiteinheit die Population verlassen.

## Lsg., Fortsetzung I

Es ist sinnvoll, die Anzahl der pro Zeiteinheit erlegten Tiere, diese entspricht auch dem erzielten Ertrag  $E$ , proportional zu der Anzahl der vorhandenen Tiere anzusetzen

$$E = JP(t).$$

Der Proportionalitätsfaktor  $J$  ist ein Maß für den Aufwand, der bei der Jagd betrieben wird und kann als Bejagungsintensität interpretiert werden. Da die Bejagung eine zusätzliche Reduktion der Population bedeutet, ist es naheliegend den Effekt der Bejagung durch einen zusätzlichen Verlustterm im logistischen Modell zu berücksichtigen:

$$\dot{P}(t) = \lambda KP(t) - \lambda P^2(t) - JP(t). \quad (1.18)$$

## Lsg., Fortsetzung II

Ist nun bei Bejagung überhaupt ein Gleichgewichtszustand möglich? Um diese Frage zu beantworten, müssen wir Lösungen von (1.18) mit  $\dot{P}(t) \equiv 0$  finden. Dies führt auf die Gleichung

$$\lambda KP(t) - \lambda P^2(t) - JP(t) = P(t)(\lambda K - J - \lambda P) = 0,$$

welche zwei Lösungen besitzt: die triviale (uninteressante) Lösung  $P(t) \equiv 0$  und

$$P^*(t) \equiv K - \frac{J}{\lambda}.$$

Durch die Bejagung mit der Intensität  $J$  stellt sich also ein neues Gleichgewicht  $P^* < K$  ein, welches allerdings nur für  $P^* > 0$  sinnvoll ist. Diese Bedingung führt auf folgende Schranke für die Bejagungsintensität

$$J < \lambda K. \tag{1.19}$$

## Lsg., Fortsetzung III

Multipliziert man (1.19) mit  $P(t)$ , erhält man die Bedingung

$$JP(t) < \lambda KP(t) = \beta P(t).$$

Die Bejagungsintensität darf also gerade noch so groß sein, daß die erlegten Tiere durch den natürlichen Nachwuchs ersetzt werden können. Wie bereits erwähnt, ist  $E = JP^*$  ein Maß für den Ertrag, wenn mit einer Intensität  $J$  gejagt wird. Wegen der Konstanz der Population hängt  $E$  nur mehr von der Bejagungsintensität  $J$  ab:

$$E(J) = JP^* = J\left(K - \frac{J}{\lambda}\right). \quad (1.20)$$

Die Bejagungsintensität, welche den Ertrag maximiert, ergibt sich aus  $E'(J) = 0$  zu

$$J^* = \frac{1}{2}\lambda K = \frac{1}{2}\beta.$$

## Lsg., Fortsetzung IV

(Man kann sich leicht überlegen, daß der Ertrag in  $J^*$  ein Maximum annimmt). Setzt man  $J^*$  in (1.20) ein, ergibt sich der maximal erzielbare Ertrag

$$E(J^*) = J^* P^* = \frac{1}{4} \lambda K^2 = \frac{1}{4} \beta K,$$

die Population stabilisiert sich bei der Größe

$$P^*(J^*) = \frac{1}{2} K.$$

Als Anwendung betrachten wir die Blauwalpopulation. Die Trägerkapazität der Ozeane wird auf  $K = 150.000$  Tiere

## Lsg., Fortsetzung V

geschätzt, ihre natürliche Zuwachsrate auf  $\beta = \lambda K = 0.08$  pro Jahr. Dies ergibt eine maximale Fangquote von

$$E(J^*) = \frac{1}{4} \cdot 0.08 \cdot 150.000 = 3000$$

Walen pro Jahr, bei der sich die Population auf

$$P^* = \frac{1}{2} K = 75.000$$

Tiere einstellen würde.

Mathematische Grundlagenforschung beschäftigt sich vor allem mit dem Problem, wie weit sich mathematisches Schließen auf die Grundlagen der formalen Logik und Mengenlehre zurückführen läßt. Dabei stößt man auf diffizile logische Probleme. Der Anwender hingegen verwendet die Mengenlehre *naiv*, nämlich als bequemes und kompaktes Ausdrucksmittel.

## Definition

- i) Eine **Menge** ist eine Zusammenfassung von Objekten zu einer Gesamtheit.
- ii) Jedes in der Menge enthaltene Objekt heißt **Element** der Menge. Mit  $a \in M$  bzw.  $a \notin M$  symbolisiert man, daß das Objekt  $a$  zur Menge  $M$  gehört, bzw. nicht gehört.

Es folgt, daß zwei Mengen genau dann gleich sind, wenn sie dieselben Elemente enthalten. Wesentliches Charakteristikum einer Menge ist, daß für jedes Objekt  $x$  zumindest prinzipiell entscheidbar ist, ob  $x$  der Menge angehört oder nicht. Die Erkenntnis, daß die Definition 2.1 einer Menge diesem Anspruch nicht genügt, hat eine Grundlagenkrise in der Mathematik ausgelöst. In den Anwendungen vermeidet man diese Probleme, indem man nur Objekte aus einer wohlbestimmten Grundgesamtheit  $X$  zu einem Ganzen zusammenfaßt, von der man bereits weiß, daß sie eine Menge ist.

Mengen können durch Aufzählen ihrer Elemente beschrieben werden, z.B.

$$P = \{2, 4, 6, 8\}.$$

Man beachte, daß die Reihenfolge der Elemente keine Rolle spielt und auch Wiederholungen zulässig sind. Es gilt also auch beispielsweise

$$P = \{2, 8, 6, 4\} = \{8, 2, 6, 4\} = \{2, 2, 6, 8, 8, 8, 4, 4, 4, 4\}.$$

Diese Art, eine Menge zu festzulegen, ist vorteilhaft für Mengen mit einer geringen (jedenfalls endlichen) Anzahl von Elementen. Eine andere Möglichkeit, eine Menge zu beschreiben, besteht darin, eine Eigenschaft  $P$  anzugeben, welche die Zugehörigkeit eines

Elementes aus einer festen Grundgesamtheit  $X$  zu dieser Menge charakterisiert. Man schreibt

$$M = \{x \in X : P(x)\}.$$

Dies ist folgendermaßen zu lesen:  $M$  ist die Menge aller Elemente  $x$  aus der Grundgesamtheit (Menge)  $X$ , welche die Eigenschaft  $P$  besitzen. Wählt man beispielsweise als Grundgesamtheit  $X$  die Menge der positiven, geraden Zahlen und steht  $P(x)$  für  $x < 10$ , dann wird durch

$$Q = \{x \in X : x < 10\}$$

eine Menge  $Q$  bestimmt, welche die Elemente 2, 4, 6, 8 enthält. Es gilt also

$$P = Q.$$

Es hat sich als praktisch erwiesen, eine Menge einzuführen, welche kein Element enthält. Sie heißt **leere Menge** und wird mit dem

Symbol  $\emptyset$  bezeichnet. Weitere Beispiele von Mengen, welche im Folgenden immer wieder verwendet werden, sind:

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$	... Menge der <b>natürlichen</b> Zahlen
$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$	... Menge der <b>ganzen</b> Zahlen
$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$	... Menge der <b>rationalen</b> Zahlen
$\mathbb{R}$	... Menge der <b>reellen</b> Zahlen
$\mathbb{C} = \{a + ib : a, b \in \mathbb{R}\}$	... Menge der <b>komplexen</b> Zahlen

(Manche Autoren zählen die Null nicht zu den natürlichen Zahlen). Es fällt auf, daß in dieser Zusammenstellung die Menge der reellen Zahlen nicht näher beschrieben wurde. Wir werden auf diesen Punkt später noch einmal zurückkommen.

## Definition

Es seien  $A$  und  $B$  Mengen.

- 1  $A$  heißt **Teilmenge** von  $B$ ,  $A \subset B$ , wenn jedes Element von  $A$  auch in  $B$  enthalten ist.

Man nennt  $B$  auch **Obermenge** von  $A$ .

- 2 Die Menge aller Teilmengen einer Menge  $A$  heißt **Potenzmenge** von  $A$ ,  $\mathcal{P}(A)$

$$\mathcal{P}(A) = \{M : M \subset A\}.$$

Ausgehend von zwei Mengen führen folgende Operationen wieder auf eine Menge:

### Definition

Es seien  $A$  und  $B$  Teilmengen einer Grundmenge  $X$ .

$$A \cap B = \{x \in X : x \in A \text{ und } x \in B\} \quad \dots \text{Durchschnitt von } A \text{ und } B$$

$$A \cup B = \{x \in X : x \in A \text{ oder } x \in B\} \quad \dots \text{Vereinigung von } A \text{ und } B$$

$$A \setminus B = \{x \in X : x \in A \text{ und } x \notin B\} \quad \dots \text{Differenzmenge } A \text{ ohne } B$$

Gilt  $A \cap B = \emptyset$ , dann nennt man die Mengen  $A$  und  $B$  **disjunkt**. Die Differenzmenge von  $A$  auf  $X$  nennt man auch **Komplement** von  $A$  in  $X$  und schreibt

$$\mathbb{C}A = X \setminus A.$$

Die Abbildungen 5, 6 und 7 veranschaulichen die Mengenbildungen in Definition 2.3.

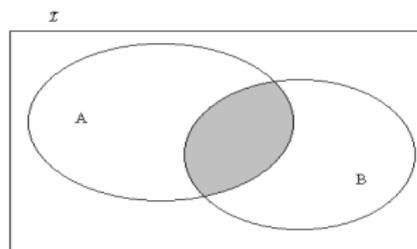


Abbildung: Durchschnitt

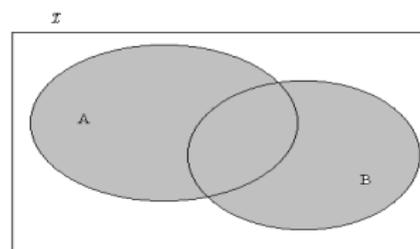


Abbildung: Vereinigung

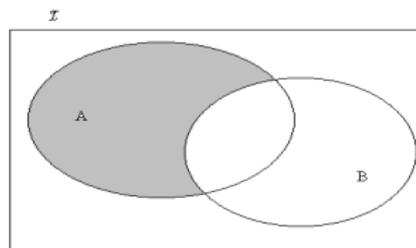


Abbildung: Differenzmenge

## Definition

Es seien  $M_1, \dots, M_n$  Mengen. Ein **geordnetes n-Tupel**  $(x_1, \dots, x_n)$  faßt  $n$  Objekte  $x_1 \in M_1, \dots, x_n \in M_n$  in einer bestimmten Reihenfolge zusammen. Die Menge

$$M_1 \times \cdots \times M_n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_1 \in M_1, \dots, x_n \in M_n\}$$

heißt **Produktmenge** oder auch **Cartesisches Produkt** der Mengen  $M_1, \dots, M_n$ .

Gilt  $M_i = M$ ,  $i = 1, \dots, n$ , setzt man  $M^n = M \times \cdots \times M$ .

Ist  $n = 2$  ( $n = 3$ ,  $n = 4$ ), nennt man ein geordnetes  $n$ -Tupel auch **geordnetes Paar (Tripel, Quadrupel)**.

Beachten sie

$$(a, b) \neq (b, a) \text{ wenn } a \neq b,$$

$$(a, a) \neq a,$$

$$\{a, b\} = \{b, a\}$$

$$\{a, a\} = \{a\}$$

## Definition

Enthält eine Menge  $M$  nur endlich viele Elemente,  
 $M = \{a_1, \dots, a_n\}$ , so heißt die Anzahl ihrer Elemente  
**Mächtigkeit** von  $M$ ,

$$\#M = n.$$

Die Mächtigkeit einer Menge ist stets eine natürliche Zahl, für die  
Mächtigkeit der leeren Menge gilt

$$\#\emptyset = 0.$$

Für das Rechnen mit Mächtigkeiten gelten einsichtige Regeln:

## Satz

*Es seien  $A$  und  $B$  endliche Mengen mit den Mächtigkeiten  $\#A$  bzw.  $\#B$ . Dann gilt*

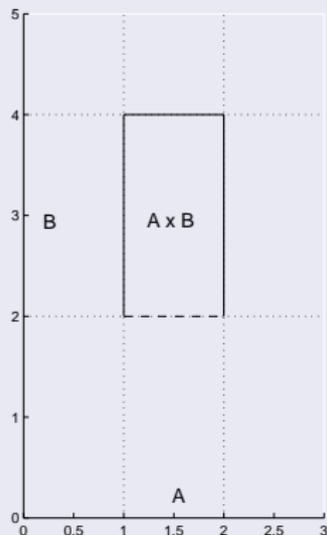
$$\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B)$$

$$\#A \times B = \#A \cdot \#B$$

$$\#\mathcal{P}(A) = 2^{\#A}$$

## Beispiel

Das Cartesische Produkt der Mengen  $A = \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq x \leq 2\}$  und  $B = \{y \in \mathbb{R} : 2 < y \leq 4\}$  ist gegeben durch  $A \times B = \{(x, y) : 1 \leq x \leq 2, 2 < y \leq 4\}$  und beschreibt anschaulich folgenden rechteckigen Bereich, vgl. Abbildung 8



Eine einfache Folgerung aus Satz 2.1 ist folgendes fundamentale Zählprinzip

### Satz

*Es seien  $M_1, \dots, M_k$  Mengen mit jeweils  $n_1, \dots, n_k$  (unterscheidbaren) Elementen. Dann gibt es*

$$n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$$

*Möglichkeiten, aus jeder Menge ein Element auszuwählen.*

Oft interessiert man sich für die Anzahl der Möglichkeiten, die Elemente einer endlichen Menge in verschiedener Reihenfolge anzuordnen. In der Sprechweise der Definition 2.4 ist dies gerade die Anzahl der verschiedenen geordneten  $n$ -Tupel, welche man mit den Elementen einer  $n$ -elementigen Menge bilden kann. In diesem Zusammenhang nennt man eine spezielle Anordnung von  $n$  Elementen **Permutation**.

Betrachten wir als Beispiel die Menge  $M = \{a, b, c\}$ .

Offensichtlich gibt es folgende 6 Permutationen ihrer Elemente

 $a b c$  $b a c$  $c a b$  $a c b$  $b c a$  $c b a.$ 

Um das allgemein gültige Ergebnis bequemer formulieren zu können, führen wir folgenden Begriff ein:

## Definition

Für jede natürliche Zahl  $n$  setzt man

$$n! = n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1, \quad n \geq 1$$

$$0! = 1$$

(gesprochen:  $n$ -Faktorielle). Man nennt  $n!$  **Fakultät** von  $n$ .

## Satz

- 1 Die Anzahl der verschiedenen Anordnungen von  $n$  unterschiedlichen Elementen beträgt  $n!$ .
- 2 Die Anzahl der Reihenfolgen, in denen man  $n$  unterschiedliche Elemente auf  $k \leq n$  Plätze verteilen kann, beträgt  $n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot (n - k + 1) = \frac{n!}{(n-k)!}$ .

Dieses Ergebnis kann man sich leicht plausibel machen. Wir möchten  $n$  unterschiedliche Elemente auf  $k$  Plätze verteilen. Für den 1. Platz stehen alle  $n$  Elemente zur Verfügung, für den 2. Platz nur mehr  $n - 1$  Elemente, für den  $k$ -ten schließlich nur mehr  $n - (k - 1)$  Elemente. Die Behauptung ergibt sich nun aus Satz 2.2.

Die Fakultät wächst sehr rasch an:

$n$	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$n!$	2	6	24	120	720	5040	40320	362880	3628800

Im folgenden Beispiel verzichten wir teilweise auf die Unterscheidbarkeit der Elemente.

### Beispiel

Vor der Kasse eines Supermarktes stehen 20 Personen an. Davon sind 9 Frauen, 8 Männer und 3 Kinder. Wieviele verschiedene Warteschlangen sind möglich, wenn die Wartenden nur danach unterschieden werden, ob sie Frau, Mann oder Kind sind.

## Lösung

Die Lösung überlegt man sich folgendermaßen: Geht man von 20 unterscheidbaren Personen aus, gibt es  $20!$  verschiedene Warteschlangen. Betrachten wir nun eine feste Warteschlange. Nach dem Zählprinzip in Satz 2.2 gibt es  $9!8!3!$  Permutationen dieser Warteschlange mit derselben Abfolge von Frau–Mann–Kind. Gibt man die Unterscheidbarkeit der Frauen, Männer und Kinder auf, sind diese Permutationen nicht mehr unterscheidbar. Die gesuchte Anzahl  $z$  ergibt sich daher aus  $20! = 9!8!3!z$  zu

$$z = \frac{20!}{9!8!3!}.$$

Allgemeiner gilt

### Satz

*Unterteilt man eine Menge von  $n$  Elementen in  $r$  Gruppen, welche je  $k_i$ ,  $i = 1, \dots, r$  Elemente enthalten und verzichtet man auf die Unterscheidbarkeit der Elemente in den einzelnen Gruppen, dann ist die Anzahl der möglichen Anordnungen der  $n$  Elemente gegeben durch*

$$\frac{n!}{k_1!k_2!\dots k_r!}, \quad k_1 + k_2 + \dots + k_r = n.$$

Wir betrachten nun die Anzahl der Möglichkeiten,  $k$  Elemente aus einer Menge von  $n$  Elementen auszuwählen. Dabei ist zu beachten, ob die Reihenfolge, in der die Elemente gezogen werden, wesentlich ist und ob ein Element mehrfach gezogen werden kann. Probleme dieser Art treten auf, wenn aus einer Grundmenge Stichproben vom Umfang  $k$  nach gewissen Richtlinien gezogen werden.

Wir betrachten zuerst den Fall, daß die Reihenfolge der Ziehung berücksichtigt werden muß.

### Satz

*Aus einer Menge von  $n$  Elementen kann man auf*

$$n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot (n - k + 1) = \frac{n!}{(n - k)!}$$

*verschiedene Arten geordnete Stichproben vom Umfang  $k \leq n$  ohne Wiederholung ziehen.*

Dies ist natürlich nur eine andere Formulierung von Satz 2.3.

### Beispiel

Bei der Pferdewette kann auf die Reihenfolge der drei schnellsten Pferde gesetzt werden. Wieviele Möglichkeiten gibt es in einem Feld von 20 Pferden?

### Lösung

Es gibt offenbar  $20 \cdot 19 \cdot 18 = 6840$  Möglichkeiten.

Soll die Reihenfolge der Elemente in der Stichprobe nicht berücksichtigt werden, gruppiert man die Elemente in zwei Klassen. In der einen werden jene  $k$  Elemente zusammengefaßt, welche bei der Ziehung ausgewählt wurden, in der anderen die restlichen  $n - k$  Elemente. Wendet man nun Satz 2.4 mit  $r = 2$ ,  $k_1 = k$  und  $k_2 = n - k$  an erhält man

### Satz

*Aus einer Menge von  $n$  Elementen kann man auf*

$$\frac{n!}{(n - k)! k!}$$

*verschiedene Arten ungeordnete Stichproben vom Umfang  $k \leq n$  ohne Wiederholung ziehen. Dies entspricht der Anzahl der  $k$ -elementigen Teilmengen der Ausgangsmenge.*

## Beispiel

Beim Lotto werden 6 aus 45 Zahlen gezogen. Wieviele verschiedene Tips sind möglich.

## Lösung

Da es auf die Reihenfolge, in der die Zahlen gezogen werden, nicht ankommt und jede Zahl höchstens einmal gezogen werden kann, gibt es

$$\frac{45!}{6!39!} = \frac{45 \cdot 44 \cdot 43 \cdot 42 \cdot 41 \cdot 40}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 8145060$$

verschiedene Lottotips.

Satz 2.6 motiviert folgenden Begriff:

### Definition

Es seien  $n, k \in \mathbb{N}$ . Man nennt die natürliche Zahl

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{(n-k)! k!} & k \leq n \\ 0 & k > n \end{cases}$$

**Binomialkoeffizient** (gesprochen: “ $n$  über  $k$ ”).

Satz 2.6 zeigt, daß die Binomialkoeffizienten tatsächlich natürliche Zahlen sind.

Bisher haben wir nur Stichproben betrachtet, bei welchen keine Wiederholungen zulässig waren. Stellt man sich vor, daß eine Auswahl mit Wiederholungen dadurch realisiert wird, daß das jeweils ausgewählte Element wieder in die Grundmenge zurückgelegt wird, stehen bei jedem Zug wieder alle Elemente der Grundmenge zur Verfügung. Eine unmittelbare Folgerung aus Satz 2.2 ist somit

### Satz

*Aus einer Menge von  $n$  Elementen kann man auf  $n^k$  verschiedene Arten geordnete Stichproben mit Wiederholung vom Umfang  $k$  ziehen.*

## Beispiel

Im Braille System werden für die Kodierung Zeichen in der Form eines Sechсers auf einem Würfel verwendet. Jedes Auge des Sechсers wird als eine für Blinde tastbare Erhebung bzw. Vertiefung ausgeführt. Wieviele verschiedene Symbole sind mit dem Braille System darstellbar?

## Lösung

Es gibt 2 unterschiedliche Elemente (Erhebung, Vertiefung), welche auf 6 Plätze (Wiederholungen sind zulässig) aufzuteilen sind. Die Abfolge (= Position) der Erhebungen bzw. Vertiefungen ist essentiell. Da für jede der 6 Positionen prinzipiell beide Möglichkeiten zur Verfügung stehen, sind insgesamt

$$2^6 = 64$$

Zeichen darstellbar.

Etwas komplizierter zu berechnen ist die Anzahl der ungeordneten Stichproben, in denen Elemente mehrfach auftreten können. Das mehrfache Auftreten eines Elementes in einer Stichprobe kann durch Zurücklegen des gewählten Elementes realisiert werden, wodurch der Ausgangszustand wiederhergestellt wird. Dann ist die Anzahl der ungeordneten Stichproben vom Umfang  $k$  aus der Menge  $\{1, 2, \dots, n\}$  mit Zurücklegen gleich der Anzahl der ungeordneten Stichproben vom Umfang  $k$  aus der Menge  $\{1, 2, \dots, n, n + 1, \dots, n + k - 1\}$  ohne Zurücklegen (durch das Zurücklegen wird  $k - 1$  mal der Ausgangszustand wiederhergestellt). Darauf kann man Satz 2.6 anwenden und erhält

## Satz

*Aus einer Menge von  $n$  Elementen kann man auf*

$$\binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}$$

*verschiedene Arten ungeordnete Stichproben mit Wiederholung vom Umfang  $k$  entnehmen.*

## Beispiel

Wieviele verschiedene Würfe können auftreten, wenn 3 gleiche Würfel gleichzeitig geworfen werden?

## Lösung

Da die Würfel gleichzeitig geworfen werden, können Augenzahlen mehrfach auftreten und deren Reihenfolge spielt keine Rolle. Die gesuchte Anzahl  $x$  ist somit die Zahl der ungeordneten Stichproben vom Umfang  $k = 3$  (3 Würfel) aus der Menge von  $n = 6$  Augenzahlen, also  $x = \binom{6+3-1}{3} = 56$ .

Abschließend stellen wir die Anzahl der Stichproben vom Umfang  $k$  aus einer Menge von  $n$  Elementen in folgender Tabelle übersichtlich zusammen.

	mit Reihenfolge	ohne Reihenfolge
ohne Wiederholung	$\frac{n!}{(n-k)!}$	$\binom{n}{k}$
mit Wiederholung	$n^k$	$\binom{n-1+k}{k}$

## Satz

Für natürliche Zahlen  $n \geq 1$  und  $k \leq n$  gilt:

①  $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$

②  $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

③  $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}, \quad 1 \leq k \leq n$



Eine wichtige Anwendung der Binomialkoeffizienten ist

### Satz (Binomischer Lehrsatz)

*Für alle  $n \in \mathbb{N}$ , für alle  $a, b \in \mathbb{R}$  gilt*

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{n-1} a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n} a^0 b^n.$$

Spezialfälle des binomischen Lehrsatzes sind die bekannten Formeln:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Die natürlichen Zahlen sind jene Zahlen, welche zum Abzählen bzw. Numerieren von Objekten verwendet werden. Rationale Zahlen sind beispielsweise jene Zahlen, welche als Ergebnisse praktischer Messungen auftreten. Die Regeln, welche dem Rechnen mit rationalen Zahlen zugrunde liegen, werden im Folgenden als bekannt vorausgesetzt. Manchmal ist es nützlich auf folgendes Modell der rationalen Zahlen zurückzugreifen: Auf einer Geraden wähle man zwei Punkte aus, den linken, man nennt ihn *Ursprung*, identifiziert man mit der Zahl 0, den rechten mit der Zahl 1. Die Lage aller anderen Zahlen auf der Geraden ist dann bereits durch ein entsprechendes Vielfaches des Abstandes der Zahl 1 von 0 festgelegt. Alle positiven Zahlen liegen (vereinbarungsgemäß) rechts von der Zahl Null, die negativen links davon. Man nennt dieses Modell **Zahlengerade**

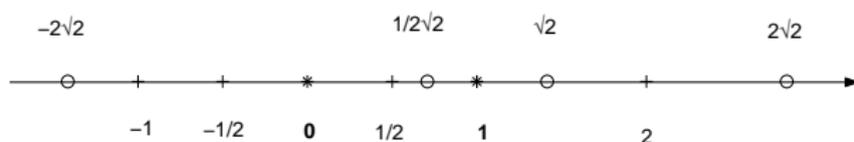


Abbildung: Zahlengerade

Mit den rationalen Zahlen allein kommt man jedoch nicht aus: es war bereits den alten Griechen bekannt, daß die Länge der Diagonale eines Quadrates mit der Seitenlänge 1 nicht rational ist:  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ . Die rationalen Zahlen füllen also die Zahlengerade nicht lückenlos auf. Die *irrationalen* Zahlen wurden daher eingeführt, um diese Lücken aufzufüllen. Die rationalen Zahlen und die irrationalen Zahlen zusammen ergeben die *reellen* Zahlen. Eine exakte Begründung der reellen Zahlen ist in diesem Rahmen nicht möglich

und sinnvoll. Im Laufe der Jahre hat sich jedoch in jedem von uns bereits ein bestimmter Zahlbegriff entwickelt. Wir haben uns bereits so an das Hantieren mit reellen Zahlen gewöhnt, daß deren exakte Begründung nicht mehr erforderlich scheint. Für unsere Zwecke ist das Modell der Zahlengeraden vollkommen ausreichend: jeder Punkt auf der Zahlengeraden entspricht genau einer reellen Zahl. Das Modell der Zahlengeraden legt nahe, daß man die reellen Zahlen der Größe nach ordnen kann: die Zahlen werden größer, wenn man auf der Zahlengeraden nach rechts fortschreitet. Folgende Schreibweisen sind gebräuchlich:

$x \neq y$  steht für  $x$  ist ungleich  $y$

$x < y$  steht für  $x \neq y$  und  $x$  ist kleiner als  $y$

$x \leq y$  steht für  $x = y$  oder  $x < y$

$y > x$  steht für  $x \neq y$  und  $y$  ist größer als  $x$

$y \geq x$  steht für  $x = y$  oder  $y > x$

Beim Manipulieren von Ungleichungen sind folgende Regeln zu beachten:

### Satz

Für reelle Zahlen  $x$  und  $y$  gilt:

- ① Wenn  $x \leq y$ , dann 
$$\begin{cases} x + z \leq y + z & \text{für alle } z \in \mathbb{R} \\ \lambda x \leq \lambda y & \text{für alle } \lambda > 0 \\ \lambda x \geq \lambda y & \text{für alle } \lambda < 0, \end{cases}$$
- ②  $xy > 0$  genau dann, wenn  $x$  und  $y$  dasselbe Vorzeichen haben,
- ③  $xy < 0$  genau dann, wenn  $x$  und  $y$  verschiedenes Vorzeichen haben.

## Definition

Es seien  $a$  und  $b$  reelle Zahlen. **Intervalle** sind Mengen reeller Zahlen folgenden Typs:

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$$

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$$

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$$

Die Intervalle  $[a, b]$  enthalten die beiden Randpunkte  $a$  und  $b$ , man nennt sie **abgeschlossen**. Die Intervalle  $(a, b)$  enthalten die beiden Randpunkte nicht, man nennt sie **offen**.

## Definition

Der **Betrag** einer reellen Zahl  $x$  ist definiert durch

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

Im Bild der Zahlengeraden gibt der Betrag einer reellen Zahl deren Abstand vom Ursprung an. Mittels der Zahlengeraden kann man sich auch leicht von folgenden Eigenschaften des Betrages überzeugen:

## Satz (Eigenschaften des Betrages )

- 1  $|x| = 0$  genau dann, wenn  $x = 0$ ,
- 2  $|\lambda x| = |\lambda| |x|$ , für alle  $\lambda, x \in \mathbb{R}$ ,
- 3  $|x + y| \leq |x| + |y|$  für alle  $x, y \in \mathbb{R}$  (**Dreiecksungleichung**).

Es hat sich als vorteilhaft herausgestellt, die Menge der reellen Zahlen durch zwei weitere Objekte zu ergänzen: durch  $-\infty$ , welches dadurch charakterisiert ist, daß es kleiner sein soll als jede reelle Zahl, und durch  $\infty$ , welches größer als jede reelle Zahl sein soll. Es gilt also für alle reellen Zahlen  $x$

$$-\infty < x < \infty.$$

Man beachte allerdings, daß die Elemente  $\pm\infty$  *nicht* zu den reellen Zahlen gerechnet werden. Der Umgang mit den neuen Symbolen erfordert daher besondere Vorsicht. Wir werden sie im folgenden vorwiegend nur dazu verwenden, um anzudeuten, daß bestimmte Größen beliebig groß werden können. Die Schreibweise

$$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$$

bringt z.B. besonders plakativ zum Ausdruck, daß das Intervall beliebig kleine negative Zahlen enthält. Die *unbeschränkten* Intervalle  $(-\infty, a]$ ,  $(a, \infty)$  und  $[a, \infty)$  sind analog definiert.

Da das Rechnen mit Betragsgleichungen meist große Schwierigkeiten bereitet, sei das Vorgehen an einem einfachen Beispiel demonstriert.

### Beispiel

Gesucht sind die Lösungen der Ungleichung

$$|x + 1| > 2x - 3 \quad (2.1)$$

## Lösung

Wegen der Definition des Betrages ist eine Fallunterscheidung nach dem Vorzeichen des Argumentes des Betrages (also jener Größe, welche zwischen den Betragsstrichen steht) durchzuführen:

Fall 1: Es sei  $x + 1 \geq 0$ , d.h.  $x \geq -1$ .

In diesem Falle gilt

$$|x + 1| = x + 1.$$

Die Ungleichung läßt sich also schreiben in der Form

$$x + 1 > 2x - 3, \tag{2.2}$$

## Lsg., Fortsetzung I

wegen Satz 2.11 ist dies gleichwertig mit

$$x < 4$$

Da man auf die Form (2.2) jedoch nur kommt, wenn  $x \geq -1$  gilt, kommen nur die reellen Zahlen mit

$$-1 \leq x < 4.$$

in Frage. Im Fall 1 erhält man somit die Lösungsmenge

$$\mathcal{L}_1 = [-1, 4).$$

Fall 2: Es sei nun  $x + 1 < 0$ , d. h.  $x < -1$ . Nun gilt

$$|x + 1| = -(x + 1),$$

## Lsg., Fortsetzung II

sodaß die Ungleichung (2.1) gleichwertig ist mit

$$-x - 1 > 2x - 3 \quad (2.3)$$

bzw.

$$x < \frac{2}{3}.$$

Auf diese Lösungen sind wir jedoch nur unter der Annahme  $x < -1$  gekommen. Die zulässige Lösungsmenge von (2.3) ist demnach das Intervall

$$\mathcal{L}_2 = (-\infty, -1).$$

Als Lösungsmenge für die Ungleichung (2.1) findet man daher

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2 = (-\infty, 4).$$

## Beispiel

In manchen Fällen kann man die Lösungsmenge einer Ungleichung mit Hilfe der geometrischen Bedeutung des Betrages unmittelbar angeben. Dazu veranschauliche man sich, daß  $|x - x_0|$  den Abstand des Punktes  $x$  vom Punkt  $x_0$  auf der Zahlengeraden angibt. Somit wird beispielsweise die Ungleichung

$$|x + 1| > 3$$

genau von jenen reellen Zahlen gelöst, deren Abstand von  $x_0 = -1$  größer als 3 ist, also  $\mathcal{L} = (-\infty, -4) \cup (2, \infty)$ . Als Übung überzeuge man sich davon, daß die Lösung der Ungleichung durch Fallunterscheidung dieselbe Lösungsmenge ergibt.

An diese Anschauung knüpft auch folgender nützliche Begriff an:

### Definition

Es sei  $x_0$  eine reelle Zahl und  $\varepsilon > 0$ . Man nennt das Intervall

$$(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \varepsilon\}$$

**$\varepsilon$ -Umgebung** von  $x_0$ .

Die Nullstellen der quadratischen Gleichung ( $p, q \in \mathbb{R}$ )

$$x^2 + px + q = 0 \quad (2.4)$$

sind gegeben durch

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}, \quad (2.5)$$

sofern die Bedingung

$$\frac{p^2}{4} - q \geq 0 \quad (2.6)$$

erfüllt ist. Ist diese Bedingung verletzt, dann besitzt die Gleichung (2.4) keine Lösung in  $\mathbb{R}$ . Beispielsweise ist

$$x^2 + 1 = 0$$

nicht lösbar in  $\mathbb{R}$ . Nach dem Vieta'schen Wurzelsatz gelten für die Lösungen  $x_{12}$  von (2.4) die Beziehungen

$$x_1 + x_2 = -p$$

$$x_1 x_2 = q.$$

Interessanterweise gelten diese Beziehungen auch dann, wenn (2.6) verletzt ist. Vergessen wir für den Augenblick, daß in diesem Falle die Ausdrücke (2.5) vorerst sinnlos sind, und rechnen *formal*

$$\begin{aligned} x_1 x_2 &= \left(-\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right) \left(-\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right) = \left(\left(-\frac{p}{2}\right)^2 - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}^2\right) \\ &= \frac{p^2}{4} - \left(\frac{p^2}{4} - q\right) = q \end{aligned}$$

Besonders deutlich wird dieser Formalismus bei den formalen “Lösungen”  $x_{1,2} = \pm\sqrt{-1}$  der Gleichung  $x^2 + 1 = 0$ :

$$x_1 x_2 = \sqrt{-1}(-\sqrt{-1}) = -\sqrt{-1}^2 = -(-1) = 1.$$

Diese formalen Lösungen haben sich nicht nur im Zusammenhang mit den Nullstellen von Polynomen als überaus fruchtbar erwiesen, sodaß auf diesen Formalismus ein neuer Zahlbegriff aufgebaut wurde.

## Definition

1. Das Symbol  $i$ , definiert durch

$$i^2 = -1 \tag{2.7}$$

heißt **imaginäre Einheit**.

2. Die Elemente der Menge

$$\underset{\text{Df}}{\mathbb{C}} = \{z : z = a + ib, a, b \in \mathbb{R}\}$$

heißten **komplexe Zahlen**.

## Def., Fortsetzung I

3. Es sei  $z = a + ib$  eine komplexe Zahl. Man nennt

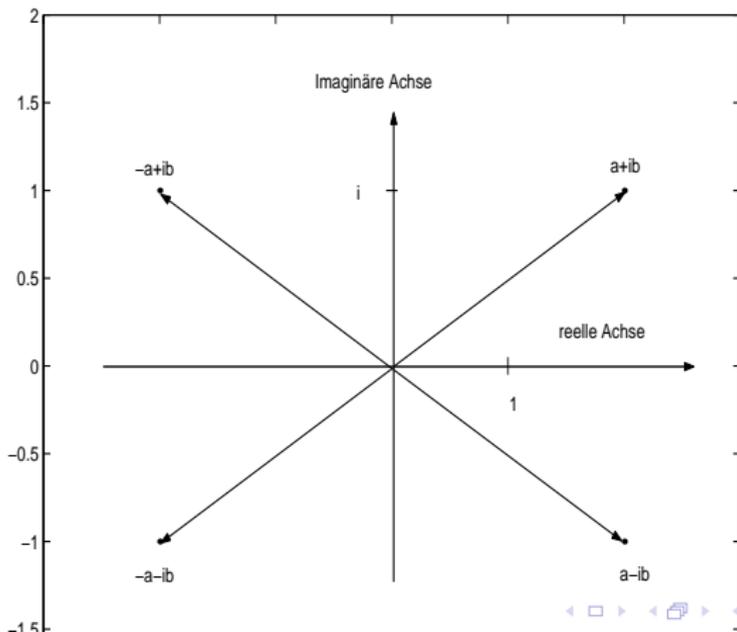
- ①  $a$  **Realteil** von  $z$  und schreibt  $a = \Re z$ ,
- ②  $b$  **Imaginärteil** von  $z$  und schreibt  $b = \Im z$ ,
- ③  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$  **Absolutbetrag** von  $z$ ,
- ④  $\bar{z} = a - ib$  die zu  $z$  **konjugiert komplexe Zahl**.

4. Die Elemente der Menge

$$\{ix : x \in \mathbb{R}\}$$

heißen **imaginäre Zahlen**.

Eine komplexe Zahl ist demnach eindeutig durch die Angabe von Real- und Imaginärteil festgelegt. Man kann daher die komplexe Zahl  $z$  mit dem Punkt  $(\Re z, \Im z)$  in der Ebene identifizieren. Man nennt die Ebene, deren Punkte als komplexe Zahlen aufgefaßt werden **Gaußsche Zahlenebene**:



Wir müssen noch festlegen, wie man mit den neuen Zahlen rechnet. Wir vereinbaren, daß die Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division komplexer Zahlen den in  $\mathbb{R}$  geltenden Regeln, welche um die Definition der imaginären Einheit,  $i^2 = -1$ , ergänzt werden, folgen soll.

## Beispiel

Es sei  $z = a + ib$ ,  $y = \alpha + i\beta$ . Die obige Vereinbarung bedeutet also:

$$z \pm y = (a + ib) \pm (\alpha + i\beta) = a \pm \alpha + i(b \pm \beta),$$

$$\begin{aligned} z \cdot y &= (a + ib) \cdot (\alpha + i\beta) = a\alpha + i\alpha b + ia\beta + i^2 b\beta \\ &= a\alpha - b\beta + i(\alpha b + a\beta). \end{aligned}$$

Die konkrete Durchführung der Division schieben wir noch etwas auf. Setzt man  $b = \beta = 0$  erhält man die üblichen Verknüpfungen reeller Zahlen. Die Arithmetik komplexer Zahlen mit  $\Im z = 0$  ist also mit der Arithmetik reeller Zahlen identisch. Man kann daher die komplexen Zahlen mit  $\Im z = 0$  mit den reellen Zahlen identifizieren. Dies erklärt auch die Bezeichnung *reelle Achse* für die Punkte  $(a, 0)$ ,  $a \in \mathbb{R}$  der Gaußschen Zahlenebene.

## Satz (Eigenschaften komplexer Zahlen)

Es sei  $z = a + ib$  eine komplexe Zahl. Dann gilt:

- 1  $\Re z = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \quad \Im z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}),$
- 2  $z\bar{z} = |z|^2, \quad \text{somit } \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2},$

Der zweite Punkt von Satz 2.13 macht deutlich, wie die Division komplexer Zahlen auszuführen ist:

$$\frac{x}{y} = x \frac{1}{y} = \frac{x \bar{y}}{|y|^2}.$$

## Beispiel

Man berechne  $\frac{1+2i}{3-4i}$ .

## Lösung.

Mit  $x = 1 + 2i$ ,  $y = 3 - 4i$  findet man

$$\frac{1}{y} = \frac{\bar{y}}{|y|^2} = \frac{3 + 4i}{3^2 + 4^2} = \frac{1}{25}(3 + 4i),$$

$$\frac{x}{y} = \frac{1}{25}(1 + 2i)(3 + 4i) = \frac{1}{25}(3 - 8 + i(4 + 6)) = \frac{1}{25}(-5 + 10i).$$



## Satz (Eigenschaften der Konjugation)

Für komplexe Zahlen  $x, y$  gilt:

- 1  $\overline{x + y} = \bar{x} + \bar{y},$
- 2  $\overline{x \cdot y} = \bar{x} \cdot \bar{y},$
- 3  $|x| = |\bar{x}|.$

## Satz (Eigenschaften des Betrages komplexer Zahlen)

Für den Betrag komplexer Zahlen  $x, y$  gilt:

- 1  $|x| = 0$  genau dann, wenn  $x = 0$ ,
- 2  $|xy| = |x| \cdot |y|$ ,
- 3  $|x + y| \leq |x| + |y|$ .

Geometrisch kann man den Betrag einer komplexen Zahl deuten als deren Abstand vom Ursprung in der Gaußschen Zahlenebene.

Abschließend sei noch auf einen wesentlichen Unterschied zwischen den reellen und komplexen Zahlen hingewiesen: die reellen Zahlen können der Größe nach geordnet werden. Dies ist für komplexe Zahlen nicht möglich. *Ungleichungen zwischen komplexen Zahlen sind daher sinnlos.*

Es ist manchmal sinnvoll, mehrere Größen zu einer Einheit zusammenzufassen: im Beispiel 1.3 bauen die Anzahlen der Individuen in den einzelnen Altersklassen im Jahre  $j$  die gesamte Alterspyramide im Jahre  $j$  auf. In diesem Abschnitt soll geklärt werden, wie man mit solchen zusammengesetzten Objekten umgeht. Wir erinnern daran, daß die Lage eines jeden Punktes in der Ebene (des Raumes) eindeutig durch seine Koordinaten in Bezug auf ein Cartesisches Koordinatensystem beschrieben werden kann. Jeder Punkt kann somit mit einem geordneten Paar (Tripel) identifiziert werden. Allgemeiner fassen wir nun alle geordneten  $n$ -Tupel reeller, bzw. komplexer Zahlen in einer Menge zusammen:

## Definition

$$\mathbb{R}^n = \{(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) : \mathbf{x}_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n\}$$

$$\mathbb{C}^n = \{(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) : \mathbf{x}_i \in \mathbb{C}, i = 1, \dots, n\}$$

Man nennt die Elemente von  $\mathbb{R}^n$  bzw.  $\mathbb{C}^n$  **Vektoren** und schreibt  $\vec{\mathbf{x}} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ . Die Elemente des zugrundeliegenden Zahlenkörpers  $\mathbb{R}$  bzw.  $\mathbb{C}$  heißen **Skalare**.

## Def., Fortsetzung I

Die Elemente des geordneten  $n$ -Tupels  $x_i$ , welche den Vektor  $\vec{x}$  aufbauen, heißen **Standardkoordinaten** oder kurz **Koordinaten** von  $\vec{x}$ . Manchmal ist es zweckmäßig, einen Vektor als Spalte zu schreiben,

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

man spricht dann auch von einem **Spaltenvektor**, im Gegensatz zum Zeilenvektor, bei dem die Koordinaten des Vektors als Zeile angeordnet werden. Der Vektor, dessen sämtliche Koordinaten Null sind, heißt **Nullvektor** und wird  $\vec{0}$  geschrieben.

Das Symbol  $\mathbb{K}^n$  deutet im Folgenden stets an, daß die entsprechenden Ausführungen sowohl für reelle als auch komplexe Vektoren zutreffen.

Geometrisch kann man Vektoren auch folgendermaßen deuten: Ein Vektor beschreibt eine feste Translation der Punkte in der Ebene, die sich darin äußert, daß zu jeder Koordinate eines Punktes eine feste Zahl, welche natürlich für die einzelnen Koordinaten des Punktes i.A. verschieden ist, addiert wird. Natürlich kann man zwei Translationen auch hintereinander ausführen. Dies wird durch die Addition von zwei Vektoren beschrieben:

## Definition

Zwei Vektoren  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$  und  $\vec{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n$  werden addiert, indem man ihre Koordinaten addiert, also

$$\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n).$$

Ein Vektor  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$  wird mit einem Skalar  $\lambda \in \mathbb{K}$  multipliziert, indem man jede Koordinate mit  $\lambda$  multipliziert, also

$$\lambda \vec{x} = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n).$$

Geometrisch beschreibt die Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar eine Streckung oder Stauchung. Im nächsten Satz stellen wir die Eigenschaften der Addition von Vektoren und der Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar zusammen:

**Satz**

Es seien  $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{K}^n$  Vektoren und  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$  Skalare. Dann gilt

$$\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$$

$$\vec{x} + (\vec{y} + \vec{z}) = (\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z}$$

$$\vec{x} + \vec{0} = \vec{x}$$

$$\lambda(\vec{x} + \vec{y}) = \lambda\vec{x} + \lambda\vec{y}$$

$$(\lambda + \mu)\vec{x} = \lambda\vec{x} + \mu\vec{x}$$

$$(\lambda\mu)\vec{x} = \lambda(\mu\vec{x})$$

$$1\vec{x} = \vec{x}, \quad 0\vec{x} = \vec{0}$$

Diese Eigenschaften machen  $\mathbb{K}^n$  zu einem **Vektorraum**.

## Definition

Es sei  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ . Man nennt

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2}$$

**Norm** (Länge) des Vektors  $\vec{x}$ .

Im folgenden wird festgehalten, daß  $\|\cdot\|$  tatsächlich jene Eigenschaften hat, welche man von einem vernünftigen Abstands begriff erwarten kann:

### Satz (Eigenschaften der Norm)

Es seien  $\vec{x}$ ,  $\vec{y}$  und  $\vec{z}$  Vektoren im  $\mathbb{K}^n$  und  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Dann gilt

- 1  $\|\vec{x}\| \geq 0$
- 2  $\|\vec{x}\| = 0$  genau dann, wenn  $\vec{x} = \vec{0}$
- 3  $\|\lambda\vec{x}\| = |\lambda| \|\vec{x}\|$
- 4  $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$  (Dreiecksungleichung).

Anschaulich kann  $\|\vec{x}\|$  auch als Abstand des Punktes  $\vec{x}$  vom Ursprung, und  $\|\vec{x} - \vec{y}\|$  als Abstand des Punktes  $\vec{x}$  vom Punkt  $\vec{y}$  interpretiert werden. In Analogie zu Definition 2.10 treffen wir folgende Vereinbarung:

### Definition

Es sei  $\vec{x}_0$  ein Vektor in  $\mathbb{K}^n$  und  $\varepsilon > 0$ . Man nennt die Menge

$$K(\vec{x}_0, \varepsilon) = \{\vec{x} \in \mathbb{K}^n : \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \varepsilon\}$$

**$\varepsilon$ -Umgebung** von  $\vec{x}_0$ . Ist  $n = 2$  ( $n = 2$ ), dann beschreibt  $K(\vec{x}_0, \varepsilon)$  eine Kreisscheibe (Kugel) ohne Rand mit Mittelpunkt  $\vec{x}_0$  und Radius  $\varepsilon$ .

Funktionen sind uns schon bisher auf vielfältige Weise begegnet. In diesem Abschnitt präzisieren wir diesen Begriff.

## Definition

Es seien  $D, W$  Mengen ( $D \neq \emptyset$ )

- 1 Eine **Funktion** (Abbildung)  $f$  von  $D$  nach  $W$  ist eine Vorschrift, welche jedem Element  $x \in D$  genau ein  $y \in W$  zuordnet. Man schreibt kompakt:  $f: D \rightarrow W, y = f(x)$ .
- 2  $y$  heißt **Bild** von  $x$  und  $x$  **Urbild** von  $y$ .
- 3 Die Menge  $D$  heißt der **Definitionsbereich**,  $W$  **Bildbereich** (oder Wertevorrat) von  $f$  und  $f(D) = \{y \in W : y = f(x) \text{ für mindestens ein } x \in D\}$  **Bild** von  $D$  unter  $f$ .
- 4 Die Menge

$$G(f) \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, f(x)) \in D \times W : x \in D\}$$

heißt **Graph** von  $f$ .

Dieser Funktionsbegriff ist sehr allgemein: Bezeichnet  $D$  die Menge der österreichischen Staatsbürger und  $W = \mathbb{N}$ , wird durch die Vorschrift, jedem Bürger eine Sozialversicherungsnummer zuzuordnen, eine Funktion definiert. Ist  $D$  die Menge der in Graz wohnhaften Mütter und  $W$  die Menge ihrer Kinder, definiert die Mutter-Kind Beziehung keine Funktion, da eine Mutter ja mehrere Kinder haben kann.

Im Folgenden werden wir uns vorwiegend auf reelle Funktionen konzentrieren, das sind Funktionen mit  $D \subset \mathbb{R}^n$ ,  $W \subset \mathbb{R}$ . Für  $n \leq 2$  kann man den Graph einer Funktion als *Kurve* im  $\mathbb{R}^2$ , bzw. als *Fläche* im  $\mathbb{R}^3$  darstellen. Funktionen in mehr als zwei Veränderlichen lassen sich nicht unmittelbar graphisch veranschaulichen.

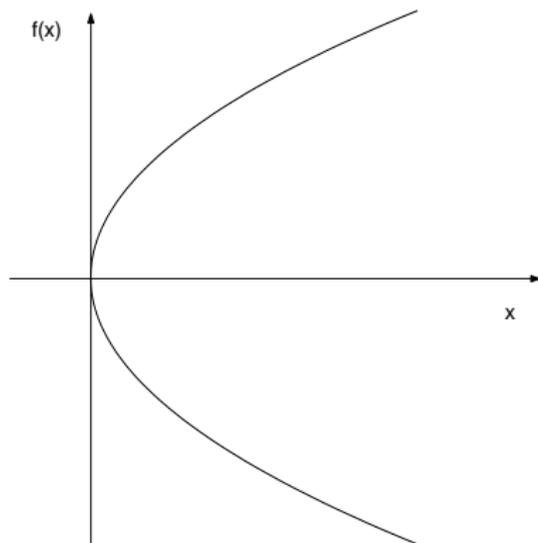


Abbildung: Keine Funktion

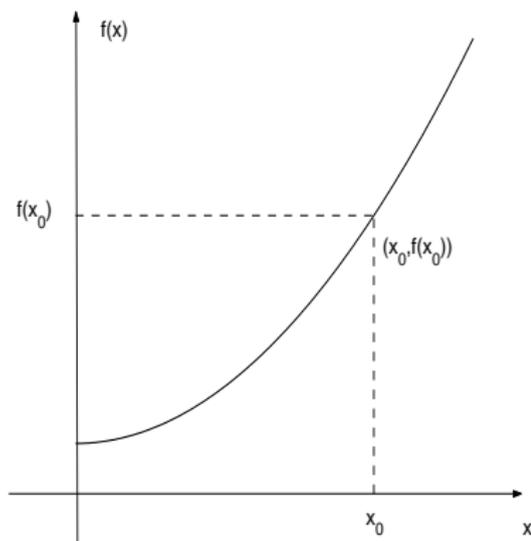


Abbildung: Funktion

Der Graph in der Abbildung 11 stellt keine Funktion dar, da der Funktionswert nicht eindeutig festgelegt ist, Abbildung 12 zeigt eine Funktion in einer Veränderlichen, Abbildung 13 zeigt den

Graph einer Funktion in zwei Veränderlichen. Ist der Definitionsbereich keine Zahlenmenge, kann man zur Illustration ein *Stabdiagramm* verwenden. Abbildung 14 faßt die tägliche Sonnenscheindauer im Februar 2000 zusammen.

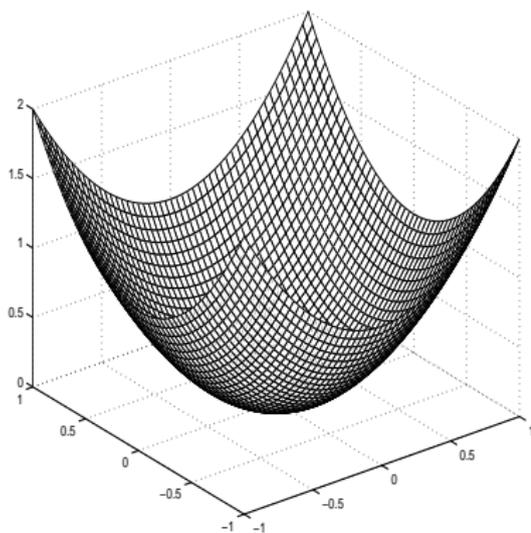


Abbildung:  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

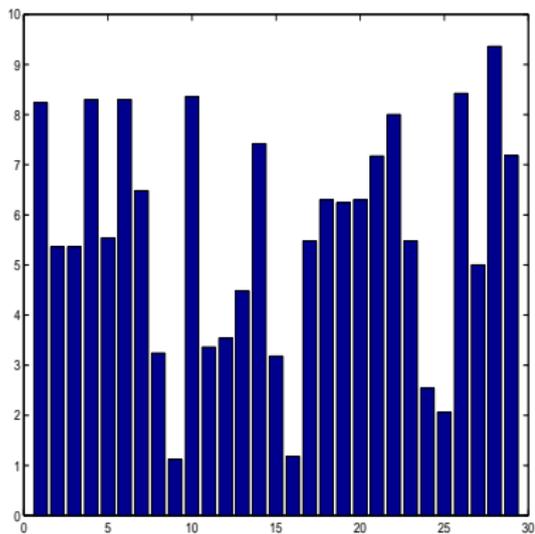


Abbildung: Stabdiagramm

## Bemerkung

1. Eine Funktion wird eindeutig durch die Abbildungsvorschrift, den Definitionsbereich und den Wertevorrat festgelegt. Ändert man eine dieser Komponenten ergibt sich eine neue Funktion. Dies wird besonders deutlich in folgender Schreibweise, welche man gelegentlich in Mathematik Lehrbüchern findet:

$$f: \begin{cases} D \rightarrow W \\ x \mapsto f(x). \end{cases}$$

Wenn kein Zweifel am Wertevorrat besteht, schreibt man meist einfacher  $y = f(x)$ ,  $x \in D$ . Zwei Abbildungen  $f$  und  $g$  sind somit genau dann gleich, wenn sie denselben Definitionsbereich und Wertevorrat haben und  $f(x) = g(x)$  für alle  $x \in D$  gilt.

# Bem., Fortsetzung I

2. Eine Funktion schöpft ihren Wertevorrat meist nicht aus. Es kann also ohne weiteres in  $W$  Elemente geben, welche nicht Bild eines Elementes  $x \in D$  sind.
3. Durch die Angabe von  $x \in D$  ist  $y = f(x) \in W$  eindeutig festgelegt. Natürlich kann aber auch  $\tilde{x} \neq x$  auf dasselbe  $y$  abgebildet werden. Ausgeschlossen wird durch die Definition 2.16 eine mehrdeutige Vorschrift, welche einem  $x \in D$  zwei verschiedene Elemente  $y \in W$  und  $\tilde{y} \in W$  zuordnet.
- Unterscheiden Sie nach Möglichkeit  $f$  und  $f(x)$ :  $f$  bezeichnet eine Abbildung und  $f(x)$  steht für den Wert der Abbildung an der Stelle  $x$ . Manchmal jedoch läßt sich dies nicht ohne überbordende Notation durchziehen.

## Beispiel

1.) Durch die Abbildungsvorschrift  $x \mapsto x^2 - 2x + 1$  wird eine Funktion  $f$  von  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definiert. Die Abbildung  $g(x) = (x - 1)^2$ ,  $x \in \mathbb{R}$  führt auf dieselben Funktionswerte. Die beiden Abbildungen sind daher gleich.

2) Die Abbildungsvorschrift  $h: x \mapsto \frac{1}{x+1}$  ist für alle  $x \neq -1$  sinnvoll. Zu  $x = -1$  existiert kein Bild. Der Definitionsbereich der Funktion  $h$  ist also  $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ .

## bes. Funktionen I

Wir wenden uns nun einigen einfachen Funktionen zu:

- Jeder reellen Zahl  $c$  läßt sich die **konstante Funktion** zuordnen:

$$f: \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto c. \end{cases}$$

- Auf einer Menge  $M \neq \emptyset$  ist die **Identität** definiert durch

$$id_M: \begin{cases} M \rightarrow M \\ x \mapsto x. \end{cases}$$

- Die **Betragsfunktion** auf  $\mathbb{R}$  ist definiert durch

$$|\cdot|: \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto |x|. \end{cases}$$

## bes. Funktionen II

- Eine Abbildung

$$x: \begin{cases} \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K}^m \\ n \mapsto x(n) \end{cases}$$

nennt man eine **Folge** in  $\mathbb{K}^m$ . Anstelle von  $x(n)$  schreibt man üblicherweise  $x_n$ .

Die Abbildungen 15, 16 und 17 zeigen die Graphen der konstanten Funktion, der Identität und der Absolutbetragfunktion.

## bes. Funktionen III

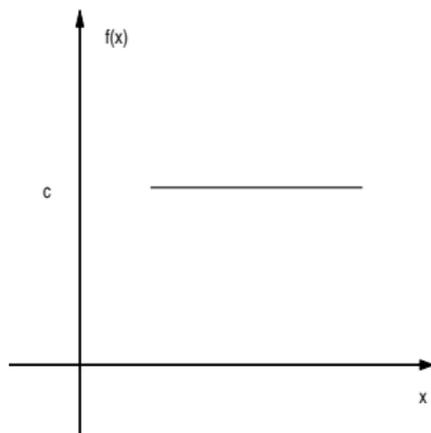


Abbildung:

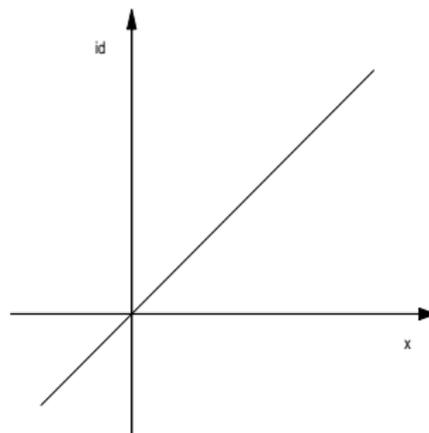


Abbildung:

## bes. Funktionen IV

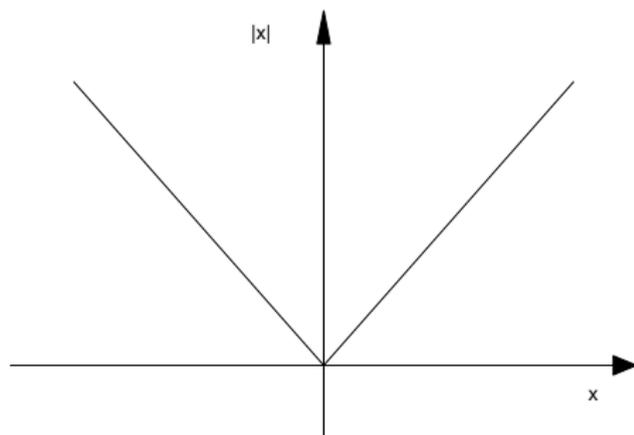


Abbildung:

## Definition

Es sei  $f: D \rightarrow W$  eine Funktion.

- 1  $f$  heißt **surjektiv** genau dann, wenn zu jedem  $y \in W$  *mindestens* ein  $x \in D$  mit  $y = f(x)$  existiert.
- 2  $f$  heißt **injektiv** genau dann, wenn für alle  $x, \tilde{x} \in D$  aus  $x \neq \tilde{x}$  auf  $f(x) \neq f(\tilde{x})$  geschlossen werden kann.
- 3  $f$  heißt **bijektiv** genau dann, wenn  $f$  injektiv und surjektiv ist.

Eine surjektive Funktion schöpft also ihren Wertevorrat voll aus: jedes Element  $y \in W$  tritt tatsächlich als Bild auf. Üblich ist auch die Sprechweise,  $f$  bildet  $D$  auf  $W$  ab. Die Injektivität einer Funktion kann auch folgendermaßen charakterisiert werden: Aus  $f(x) = f(\tilde{x})$  folgt notwendigerweise  $x = \tilde{x}$ . Jedes Element  $y \in W$  tritt also höchstens einmal als Bild auf. Graphisch erkennt man dies daran, daß eine Parallele zur x-Achse den Graphen von  $f$  in höchstens einem Punkt schneidet. Die Betragsfunktion ist nicht injektiv, es ist ja z.B.  $|-1| = |1|$ .

Will man für gegebenes  $y$  die Gleichung

$$f(x) = y$$

nach  $x$  auflösen, bedeutet die Injektivität von  $f$ , daß diese Gleichung höchstens eine (möglicherweise keine) Lösung besitzt, ist  $f$  surjektiv, gibt es für alle  $y \in W$  mindestens eine (möglicherweise mehrere) Lösungen. Ist  $f$  bijektiv, hat die Gleichung für alle  $y \in W$  genau eine Lösung in  $D$ .

## Beispiel

Ist die Abbildung  $x \mapsto \frac{1}{x+1}$  injektiv? Ist sie surjektiv?

## Lösung

Ohne Angabe des Definitionsbereiches und des Wertevorrats ist die Fragestellung nicht sinnvoll. Es wurde aber bereits früher erwähnt, daß der natürliche Definitionsbereich von  $f$  die Menge  $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$  ist. Als Wertevorrat wählen wir vorerst  $\mathbb{R}$ . Für die Untersuchung auf Injektivität gehen wir von der

$$f(x) = f(y), \quad \text{also} \quad \frac{1}{x+1} = \frac{1}{y+1}$$

aus, welche äquivalent ist zu

$$x + 1 = y + 1, \quad \text{also} \quad x = y.$$

# Lsg., Fortsetzung I

Die Funktion ist somit injektiv. Sie ist aber nicht surjektiv: da stets  $\frac{1}{x+1} \neq 0$  gilt, nimmt  $f$  den Wert 0 nicht an.

Eine überaus nützliche Eigenschaft, welche jedoch nur für **reelle** Funktionen, also Funktionen mit  $D, W \subset \mathbb{R}$ , sinnvoll ist, ist die Monotonie:

## Definition (Monotonie)

Es sei  $I$  ein nichtleeres Intervall,  $I \subset D$  und  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion.

- $f$  heißt **(streng) monoton wachsend** auf  $I$  genau dann, wenn für alle  $x, y \in I$  mit  $x < y$  auf  $f(x) \leq f(y)$  ( $f(x) < f(y)$ ) geschlossen werden kann.
- $f$  heißt **(streng) monoton fallend** auf  $I$  genau dann, wenn für alle  $x, y \in I$  mit  $x < y$  auf  $f(x) \geq f(y)$  ( $f(x) > f(y)$ ) geschlossen werden kann.
- $f$  heißt **(streng) monoton** auf  $I$  genau dann, wenn  $f$  auf  $I$  (streng) monoton wachsend bzw. (streng) monoton fallend ist

Wir haben Monotonie in Bezug auf das Intervall  $I$  definiert, um zum Ausdruck zu bringen, daß diese Eigenschaft nicht auf dem gesamten Definitionsbereich der Funktion gelten muß. Man überzeugt sich leicht davon, daß  $f$  genau dann (streng) monoton fällt, wenn  $-f$  (streng) monoton wächst. Die unmittelbare Anwendung der Definition ist in den meisten Fällen recht unhandlich. Wir verfolgen daher die Monotonie einer Funktion an dieser Stelle nicht weiter, da wir später bequemere Methoden angeben können, das Monotonieverhalten einer großen Klasse von Funktionen untersuchen zu können. Wir halten außerdem fest:

## Satz

*Eine streng monotone Funktion ist injektiv.*

## Definition

$f, g: D \rightarrow \mathbb{K}$  seien Funktionen,  $D \subset \mathbb{K}^m$  und  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Man definiert die Funktionen  $\lambda f, f + g, fg, \frac{f}{g}: D \rightarrow \mathbb{K}$

- $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$
- $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
- $(fg)(x) = f(x)g(x)$
- $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$  falls  $g(x) \neq 0$ .

Funktionen werden also addiert (multipliziert, etc.) indem man ihre Funktionswerte addiert (multipliziert, etc.). Zu beachten ist allerdings, daß diese Operationen natürlich nur auf dem Durchschnitt des Definitionsbereiches der beteiligten Funktionen sinnvoll sind. Eine der nützlichsten Operationen für Funktionen ist ihre Hintereinanderausführung. Sie erlaubt es, sehr komplexe Abbildungen in ihre einfacheren Bausteine zu zerlegen.

## Definition

Es sei  $f: A \rightarrow B$ ,  $g: C \rightarrow D$  Abbildungen und  $C \supset B$ . Die Abbildung

$$g \circ f = \begin{cases} A \rightarrow D \\ a \mapsto g(f(a)) \end{cases}$$

heißt **Komposition** (Hintereinanderausführung) der Funktionen  $f$  und  $g$ , gesprochen:  $g$  nach  $f$

Abbildung 18 illustriert das Prinzip der Hintereinanderausführung von Funktionen.

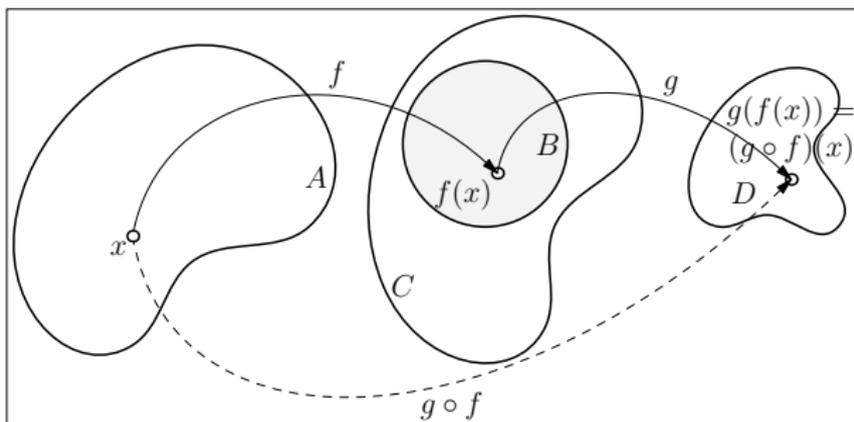


Abbildung: Hintereinanderausführung von Funktionen

Die Bedingung  $C \supset B$  stellt sicher, daß man die Funktion  $g$  an der Stelle  $f(x)$  für  $x \in B$  auswerten kann, somit die Komposition  $g \circ f$  überhaupt sinnvoll erklärt werden kann. Man beachte, daß i.A.

$$g \circ f \neq f \circ g$$

gilt. Es muß  $f \circ g$  nicht einmal existieren, wenn  $g \circ f$  definiert ist. Als Beispiel betrachten wir die Funktionen  $u(t) = t^2 - 3$  und  $v(t) = 5t + 1$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Eine einfache Rechnung ergibt

$$(u \circ v)(t) = u(v(t)) = v(t)^2 - 3 = (5t + 1)^2 - 3 = 25t^2 + 10t - 2$$

$$(v \circ u)(t) = v(u(t)) = 5u(t) + 1 = 5t^2 - 15 + 1 = 5t^2 - 14.$$

In der Differential- und Integralrechnung ist es oft zweckmäßig eine gegebene Funktion als Hintereinanderausführung einfacherer Funktionen zu betrachten.

## Beispiel

Man bestimme zwei Funktionen  $g$  und  $h$  so, daß für  $x \rightarrow F(x) = \frac{1}{x^2+1}$  die Beziehung  $F = g \circ h$  gilt.

## Lösung

Eine mögliche Lösung geht davon aus, daß  $F$  für jedes  $x$  zuerst  $x^2 + 1$  berechnet und dann den Kehrwert bildet. Somit kann man  $h(x) = x^2 + 1$ ,  $g(x) = \frac{1}{x}$  setzen. Beachtet man  $D(g) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$  und  $h(\mathbb{R}) = [1, \infty)$ , folgt die Gültigkeit von  $F = g \circ h$ .

Zur Motivation des folgenden Begriffes betrachten wir folgendes Beispiel:

### Beispiel

Wir haben in Beispiel 2.12 gezeigt, daß die Abbildung  $x \mapsto \frac{1}{x+1}$  als Abbildung von  $\mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$  nicht surjektiv ist. Wir möchten daher das genaue Bild von  $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$  unter  $f$  berechnen.

## Lösung

Dazu ist es notwendig, zu untersuchen, für welche  $y \in \mathbb{R}$  die Gleichung  $y = f(x)$  mindestens eine Lösung  $x \in D$  besitzt. Es sei also  $y \in \mathbb{R}$  und

$$y = \frac{1}{x+1}.$$

## Lsg., Fortsetzung I

Löst man diese Gleichung nach  $x$  auf, erhält man schrittweise

$$xy + y = 1$$

$$xy = 1 - y$$

$$x \stackrel{*}{=} \frac{1}{y} - 1.$$

Lediglich die mit \* markierte Umformung bedarf der Einschränkung  $y \neq 0$ . Da offensichtlich  $\frac{1}{y} - 1 \neq -1$  gilt, also im Definitionsbereich von  $f$  liegt, kann man schließen, daß  $y = f(x)$  für jedes  $y \neq 0$  eine Lösung in  $D$  besitzt. Betrachtet man daher  $f$  als Abbildung  $\mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , dann ist  $f$  *surjektiv* (streng genommen sollte man ein neues Symbol für diese Funktion verwenden, dies ist aber nicht üblich).

## Lsg., Fortsetzung II

Da die Injektivität von  $f$  in Beispiel 2.12 bereits nachgewiesen wurde, folgt die Eindeutigkeit der Lösung von  $f(x) = y$  für alle  $y \neq 0$ . Man kann daher eine neue Funktion

$g: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ ,  $y \mapsto \frac{1}{y} - 1$  definieren. Für diese Funktion verifiziert man

$$(f \circ g)(y) = \frac{1}{g(y) + 1} = \frac{1}{\left(\frac{1}{y} - 1\right) + 1} = y, \quad \text{also } f \circ g = id_W,$$

$$(g \circ f)(x) = \frac{1}{f(x)} - 1 = (x + 1) - 1 = x, \quad \text{also } g \circ f = id_D.$$

## Definition

Es seien  $D, W$  Mengen ( $D \neq \emptyset$ ) und  $f: D \rightarrow W$  eine bijektive Funktion. Durch die Vorschrift  $x = f^{-1}(y)$  genau dann, wenn  $y = f(x)$  ist, wird eine Abbildung

$$f^{-1}: W \rightarrow D$$

erklärt. Diese Abbildung heißt **Umkehrfunktion** von  $f$ .

## Satz

Es sei  $f: D \rightarrow W$  eine Bijektion. Dann gilt

①

$$f \circ f^{-1} = id_W \quad f^{-1} \circ f = id_D$$

- ② Es seien  $D, W \subset \mathbb{R}$  und  $f$  streng monoton. Dann ist die Umkehrfunktion im selben Sinne streng monoton wie  $f$ .

Man kann diesen Satz verwenden, um die Umkehrfunktion zu berechnen:

### Beispiel

Man berechne die Umkehrfunktion von  $f(x) = x^2 + 2$ ,  $x \in [0, 2]$ .

## Lösung

Aus  $0 \leq x < y$  folgt  $0 \leq x^2 < y^2$  und somit auch  $0 \leq x^2 + 2 < y^2 + 2$ . Die Abbildung  $f$  ist somit auf  $[0, 2]$  streng monoton steigend und somit injektiv. Die Umkehrfunktion  $f^{-1}$  existiert daher auf  $f([0, 2]) = [2, 6]$  und ist dort ebenfalls streng monoton steigend. Ausgangspunkt für die Berechnung von  $f^{-1}$  ist die Identität  $f(f^{-1}(y)) = y$ . Schreibt man  $x = f^{-1}(y)$  ist die Gleichung

$$f(x) = y, \quad \text{also} \quad x^2 + 2 = y$$

nach  $x$  aufzulösen.

## Lsg., Fortsetzung I

Dies ergibt

$$x = f^{-1}(y) = \pm\sqrt{y-2}.$$

Da  $f^{-1}(y) \in [0, 2]$  erfüllt sein muß, wählen wir das positive Vorzeichen der Wurzel,

$$f^{-1}(y) = \sqrt{y-2}, \quad y \in [2, 6].$$

Die graphische Darstellung der Umkehrfunktion einer Bijektion  $f: D \rightarrow W$  ergibt sich aus folgender Überlegung:

$$\begin{aligned}G(f) &= \{(x, y) : x \in D, y = f(x)\} \\G(f^{-1}) &= \{(y, x) : y \in W, x = f^{-1}(y)\} \\&= \{(y, x) : y \in W, y = f(x)\} \\&= \{(y, x) : x \in D, y = f(x)\}\end{aligned}$$

Der Graph von  $f^{-1}$  ergibt sich also aus dem Graph von  $f$  durch Vertauschen der Rollen von  $x$  und  $y$ , d.h. durch Spiegelung an der Geraden  $y = x$ , vgl. Abbildung 19.

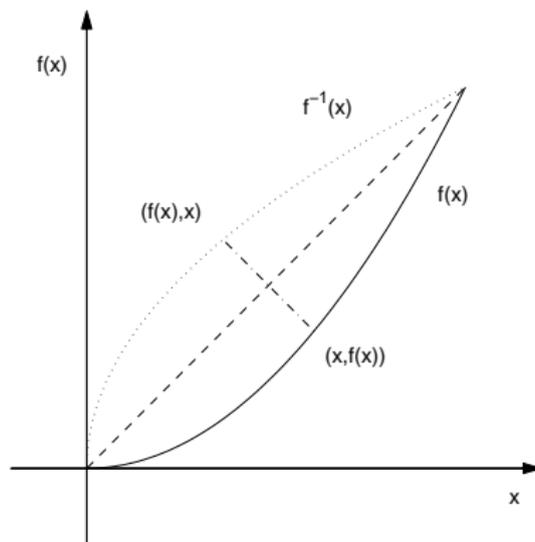


Abbildung: Umkehrfunktion

In diesem Abschnitt beginnen wir die systematische Untersuchung **reeller Funktionen**, das sind Funktionen, welche auf einer Teilmenge von  $\mathbb{R}$  definiert sind und Werte in  $\mathbb{R}$  annehmen. Wir wenden uns vorerst der Frage zu, wie sich eine Funktion in einer Umgebung eines Elementes des Definitionsbereiches, bzw. in einer Umgebung einer Lücke ihres Definitionsbereiches verhält.

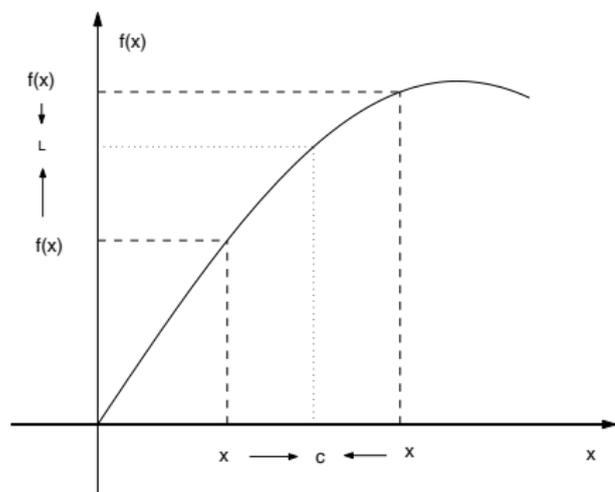


Abbildung:

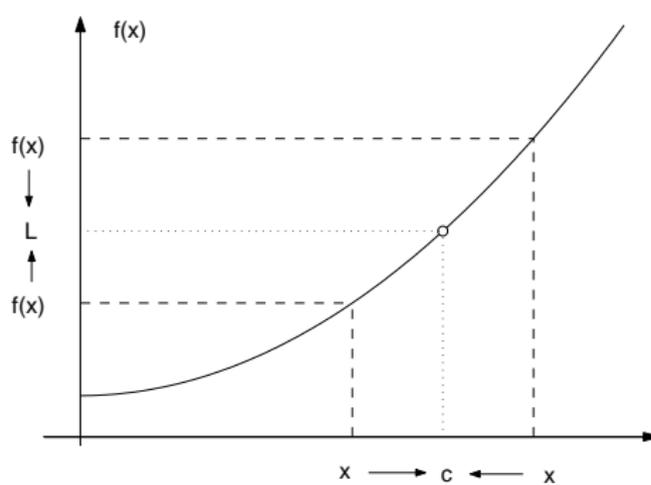


Abbildung:

Die Abbildungen 20 und 21 suggerieren, daß bei Annäherung an die Stelle  $c$  die Funktionswerte  $f(x)$  einer Zahl  $L$  beliebig nahe kommen. Dies ist offenbar unabhängig davon, ob die Funktion an der Stelle  $c$  definiert ist, wie in Abbildung 20, oder der Definitionsbereich in  $c$  eine Lücke hat, wie in Abbildung 21, da die Funktion  $f$  bei dieser Betrachtung nie in  $c$  ausgewertet wird. Für die in den Abbildungen 22 und 23 dargestellten Funktionen gibt es keine eindeutig bestimmte Zahl  $L$ , der sich die Funktionswerte nähern, wenn man an  $c$  bzw. den Koordinatenursprung herangeht. Es wird jedoch ein qualitativer Unterschied zwischen beiden Funktionen sichtbar: Nähert man sich in Abbildung 22 der Stelle  $c$  nur von links, kommen die Funktionswerte dem Wert  $L^-$  beliebig nahe, bei einer rechtsseitigen Annäherung an  $c$  streben die Funktionswerte gegen  $L^+$ . Dies ist in der Abbildung 23 nicht der Fall. Diese heuristischen Überlegungen und insbesondere die vagen

Formulierungen „sich annähern an“, „beliebig nahe kommen“ etc. werden durch den Begriff des Grenzwertes präzisiert. Dazu vereinbaren wir, eine Zahl  $x_0$  **Häufungspunkt** einer Vereinigung  $I$  von endlich vielen Intervallen zu nennen, wenn  $x_0 \in I$  gilt oder  $x_0$  Randpunkt eines der Teilintervalle ist. Als typische Beispiele seien die Definitionsbereiche der Funktionen  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $g(x) = \log(x)$  und  $h(x) = \sqrt{x}$ , also  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,  $(0, \infty)$  und  $[0, \infty)$  erwähnt. In allen drei Fällen ist  $x_0 = 0$  ein Häufungspunkt des jeweiligen Definitionsbereiches.

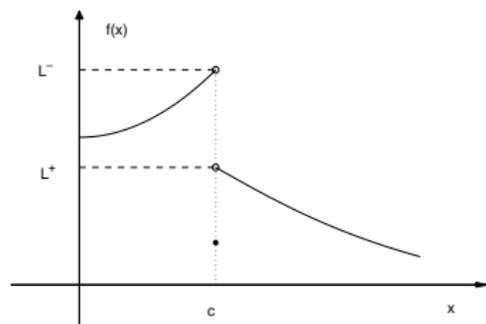


Abbildung:

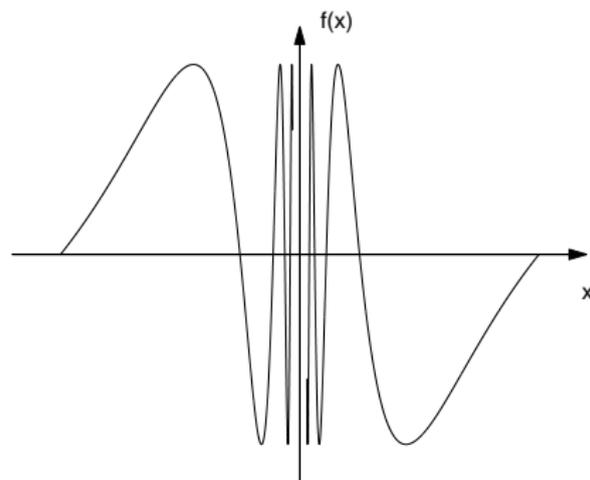


Abbildung:

## Definition

Es sei  $I \subset \mathbb{R}$  eine Vereinigung von endlich vielen Intervallen  
 $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion und  $x_0 \in \mathbb{R}$  ein Häufungspunkt von  $I$ .  
Eine reelle Zahl  $L$  heißt **Grenzwert von  $f$  für  $x$  gegen  $x_0$**  genau  
dann, wenn es zu jeder  $\varepsilon$ -Umgebung  $K(L, \varepsilon)$  von  $L$  eine  
 $\delta$ -Umgebung  $K(x_0, \delta)$  von  $x_0$  gibt mit

$$f((K(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}) \cap I) \subset K(L, \varepsilon).$$

Symbolisch wird dieses Verhalten durch

$$L = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

angedeutet. Man kann sich überlegen, daß es höchstens eine Zahl  $L$   
mit dieser Eigenschaft geben kann.

Ausführlicher geschrieben bedeutet dies folgendes: Zu jedem  $\varepsilon > 0$  kann man (zumindest theoretisch) ein  $\delta > 0$  finden, so daß

$$|f(x) - L| < \varepsilon \quad \text{für alle } x \in I \text{ mit } 0 < |x - x_0| < \delta$$

zutrifft.

### Beispiel

Um zu demonstrieren, daß man mit dieser Definition tatsächlich arbeiten kann, zeigen wir  $\lim_{x \rightarrow 2} (1 - 2x) = -3$ .

## Lösung

Dazu wählen wir  $\varepsilon > 0$  beliebig, und müssen zeigen, daß es dazu ein  $\delta > 0$  gibt, so daß

$$|f(x) - L| = |(1 - 2x) - (-3)| < \varepsilon \text{ gilt, wenn nur } 0 < |x - 2| < \delta \text{ ist.}$$

Um einen Zusammenhang zwischen  $|(1 - 2x) - (-3)|$  und  $|x - 2|$  herzustellen, berücksichtigen wir

$$|(1 - 2x) - (-3)| = |4 - 2x| = 2|x - 2|.$$

## Lsg., Fortsetzung I

Wegen  $|x - 2| < \delta$  folgt

$$|(1 - 2x) - (-3)| = 2|x - 2| < 2\delta.$$

Wir können also  $|(1 - 2x) - (-3)| < \varepsilon$  für  $|x - 2| < \delta$  erreichen, wenn wir

$$2\delta \leq \varepsilon,$$

also  $\delta \leq \frac{\varepsilon}{2}$  wählen (Dies zeigt, daß  $\delta$  durch die Bedingung in Definition 3.1 nicht eindeutig festgelegt wird: ist ein  $\delta$  gefunden, ist jede kleinere Zahl ebenfalls zulässig).

Wir können uns nun als Probe davon überzeugen, daß diese Wahl von  $\delta$  funktioniert: Gilt nämlich  $|x - 2| < \frac{\varepsilon}{2}$  für ein  $x \in \mathbb{R}$ , folgt  $|(1 - 2x) - (-3)| = 2|x - 2| < 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ .

In der Praxis ist es jedoch meist nicht notwendig, bei der Berechnung von Grenzwerten auf die Definition zurückzugehen. In den meisten Fällen ist es möglich, durch eine gezielte Anwendung von Rechenregeln einen gesuchten Grenzwert auf einfachere, bekannte Grenzwerte zurückzuführen.

## Satz (Rechenregeln für Grenzwerte)

Es seien  $x_0 \in \mathbb{R}$  und  $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$  Funktionen mit  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = F$  und  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = G$ .

① Dann besitzen auch die Abbildungen  $f \pm g$ ,  $\lambda f$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ , und  $fg$  einen Grenzwert an  $x_0$  und zwar

①  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f \pm g)(x) = F \pm G$ ,

②  $\lim_{x \rightarrow x_0} (\lambda f)(x) = \lambda F$ ,

③  $\lim_{x \rightarrow x_0} (fg)(x) = FG$ .

② Falls  $G \neq 0$  besitzt auch  $\frac{f}{g}$  einen Grenzwert an  $x_0$ , nämlich

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{F}{G}$$

③ Gilt für alle  $x \in I$ :  $f(x) \leq g(x)$ , dann folgt  $F \leq G$ .

Als unmittelbare Folge dieser Rechenregeln und der leicht verifizierbaren Grenzwerte

$$\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0 \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} a = a$$

(im zweiten Beispiel ist der Grenzwert für eine konstante Funktion gemeint) erhält man für eine **Polynomfunktion**

$$P: x \rightarrow P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0).$$

Sind  $P$  und  $Q$  Polynome, ergibt die Quotientenformel für die **rationale Funktion**  $R = \frac{P}{Q}$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} R(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}, \quad \text{falls } Q(x_0) \neq 0.$$

In diesen Fällen läuft also die Berechnung des Grenzwertes auf eine einfache Funktionsauswertung hinaus. Beispielsweise gilt

$$\lim_{x \rightarrow -1} (x^3 + 3x^2 - 2) = (-1)^3 + 3(-1)^2 - 2 = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 1}{x^2 + 2} = \frac{2 - 1}{2^2 + 2} = \frac{1}{6}.$$

Es ist auch wichtig zu erkennen, wann ein Grenzwert nicht existieren kann. Dazu notieren wir folgendes Resultat.

### Satz

*Es seien  $x_0 \in \mathbb{R}$  und  $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$  Funktionen mit  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = F$  und  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ . Ist  $F \neq 0$ , dann existiert  $\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f}{g}\right)(x)$  nicht.*

Besondere Vorsicht ist bei der Berechnung des Grenzwertes

$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f}{g}\right)(x)$  geboten, wenn sowohl  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$  als auch  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$  gilt.

## Beispiel

Man berechne folgende Grenzwerte, falls sie existieren:

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x - 3},$$

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + 1}{(2x^2 + 7x + 5)^2}$$

## Lösung

1) Da  $x = 3$  eine Nullstelle sowohl des Zähler als auch des Nenners ist, kann man weder die Quotientenregel noch Satz 3.2 anwenden. Berücksichtigt man aber

$$x^2 - x - 6 = (x + 2)(x - 3),$$

folgt für  $x \neq 3$

$$\frac{x^2 - x - 6}{x - 3} = x + 2$$

und somit

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x + 2) = 5.$$

## Lsg., Fortsetzung

2) Auch hier ist  $x = -1$  eine Nullstelle von Zähler und Nenner. Dividiert man  $2x^2 + 7x + 5$  durch  $x + 1$  erhält man

$$2x^2 + 7x + 5 = (2x + 5)(x + 1),$$

also

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + 1}{(2x^2 + 7x + 5)^2} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{(2x + 5)^2(x + 1)}.$$

Der letzte Grenzwert existiert nach Satz 3.2 nicht, somit existiert auch der ursprüngliche Grenzwert nicht.

Es gibt zahlreiche Varianten des Grenzwertbegriffes, welche durch einen passenden Umgebungsbegriff in das Schema der Definition 3.1 eingepasst werden können: lässt man beispielsweise nur einseitige Umgebungen von  $x_0$  zu, also nur Intervalle der Form  $(x_0 - \delta, x_0]$  bzw.  $[x_0, x_0 + \delta)$  erhält man den **links-** bzw. **rechtsseitigen Grenzwert von  $f$  für  $x$  gegen  $x_0^-$  ( $x_0^+$ )**, symbolisch

$$f(x_0^\pm) = \lim_{x \rightarrow x_0^\pm} f(x), \quad \text{oder auch}$$

$$f(x_0^-) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0, \\ x < x_0}} f(x), \quad f(x_0^+) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0, \\ x > x_0}} f(x)$$

Mit  $+$  ( $-$ ) wird angedeutet, daß nur eine Annäherung von rechts (links) an  $x_0$  erlaubt ist. Für die in Abbildung 22 dargestellte Funktion gilt also  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L^-$  und  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L^+$ . Das asymptotische Verhalten von  $f$  wird durch Definition 3.1 erfaßt, wenn man  $x_0 = \infty$  ( $x_0 = -\infty$ ) und  $K(\infty, \delta) = (\delta, \infty)$

$(K(-\infty, \delta) = (-\infty, \delta))$  setzt. Die Sätze 3.1 und 3.2 gelten auch für einseitige Grenzwerte bzw. für Grenzwerte mit  $x_0 = \pm\infty$ .

Zwischen den einseitigen Grenzwerten einer Funktion und ihrem Grenzwert an einer Stelle  $x_0$  besteht ein enger Zusammenhang:

### Satz

*Es ist  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$  genau dann, wenn  
 $\lim_{x \rightarrow x_0, x < x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0, x > x_0} f(x) = L$  gilt.*

Dieser Satz zeigt, daß die Existenz des Grenzwertes von  $f$  durch 2 Bedingungen sichergestellt wird:

- es existieren sowohl links-, als auch rechtsseitiger Grenzwert,
- die beiden einseitigen Grenzwerte sind gleich.

Der gemeinsame Wert von links- und rechtsseitigem Grenzwert ist dann der Grenzwert der Funktion  $f$ . Es gibt daher folgende Ursachen für das Fehlen eines Grenzwertes von  $f$  an  $x_0$ :

- Die einseitigen Grenzwerte existieren, sind aber nicht gleich (eine derartige Stelle nennt man **Sprungstelle**), Abbildung 22
- Mindestens einer der beiden einseitigen Grenzwerte existiert nicht, Abbildung 23.

Einseitige Grenzwerte treten naturgemäß auf, wenn man an einer Stelle  $x_0$  zwei verschiedene Funktionen verklebt:

### Beispiel

Man untersuche den Grenzwert von  $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & x \leq 0, \\ x^2 - x & x > 0 \end{cases}$  in  $x_0 = 0$ .

## Lösung

In Hinsicht auf Satz 3.3 untersuchen wir zuerst die einseitigen Grenzwerte. Für  $x \leq 0$  gilt  $f(x) = 2x + 1$  und somit  $\lim_{x \rightarrow 0, x < 0} f(x) = 1$ , für  $x \geq 0$  hat man  $f(x) = x^2 - x$  und somit  $\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} f(x) = 0$ . Es existieren somit die einseitigen Grenzwerte in  $x_0 = 0$ . Da sie verschieden sind, besitzt die Funktion an dieser Stelle keinen Grenzwert.

## Beispiel

Man untersuche den Grenzwert von  $f(x) = \begin{cases} 1 + x^3 & x \leq 1, \\ 3 & x = 1, \text{ in} \\ 4 - 2x & x > 1 \end{cases}$

$$x_0 = 1.$$

## Lösung

Aus der Definition von  $f$  folgt

$$\lim_{x \rightarrow 1, x < 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1, x < 1} (1 + x^3) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1, x > 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1, x > 1} (4 - 2x) = 2.$$

## Lsg., Fortsetzung I

Die beiden einseitigen Grenzwerte existieren und sind gleich, somit existiert der Grenzwert von  $f$  in  $x_0 = 1$  und es ist

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2.$$

Man beachte, daß die Zuweisung  $f(1) = 3$  für diese Rechnung vollkommen ohne Bedeutung war.

Werden die Absolutbeträge der Funktionswerte von  $f$  bei Annäherung an eine Stelle  $x_0$  beliebig groß, kann die Funktion  $f$  an dieser Stelle keinen Grenzwert haben. Es ist jedoch sinnvoll, die in den Abbildungen 24 und 25 dargestellten Möglichkeiten zu unterscheiden.

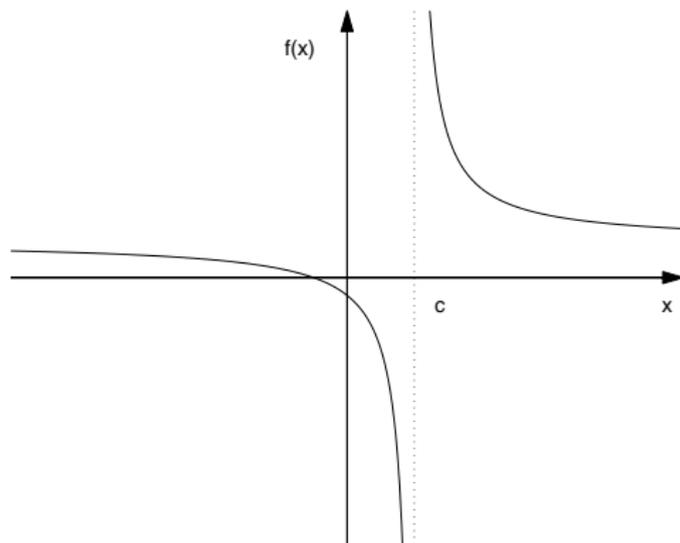


Abbildung:

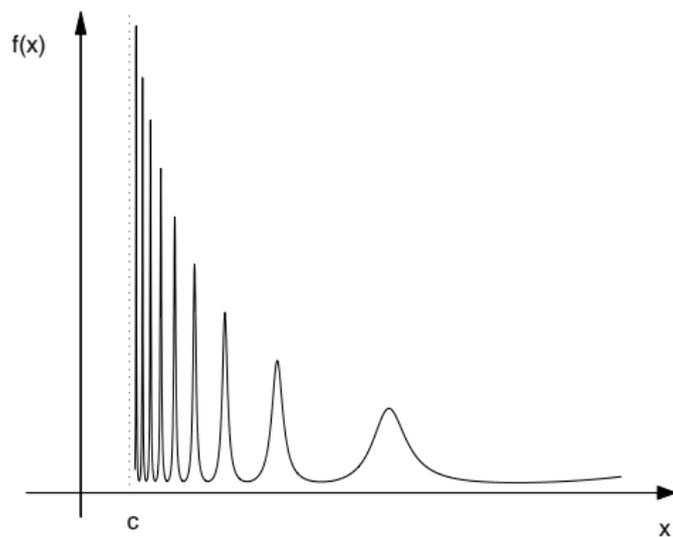


Abbildung:

Nähert man sich in Abbildung 24 der Stelle  $c$  von rechts, werden die Funktionswerte immer größer und übertreffen schließlich jede vorgegebene reelle Zahl, bei der Annäherung von links, werden die Funktionswerte immer stärker negativ. Diese Situation wird erfasst, indem man der Funktion  $f$  an der Stelle  $c$  den **uneigentlichen rechtsseitigen Grenzwert**  $\infty$  und den **uneigentlichen linksseitigen Grenzwert**  $-\infty$  zuweist. Der Zusatz “uneigentlich” erinnert daran, daß die Objekte  $\pm\infty$  nicht zu den reellen Zahlen gehören. Symbolisch wird dies ausgedrückt durch

$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = \infty \quad \text{bzw.} \quad \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = -\infty.$$

Existieren an einer Stelle  $c$  sowohl der links-, als auch der rechtsseitige uneigentliche Grenzwert und sind beide gleich, spricht man von einem **uneigentlichen Grenzwert**. Auch dieses Konzept wird durch die Definition 3.1 erfasst, indem man die Intervalle

$(\xi, \infty)$  als Umgebung von  $\infty$ , bzw. die Intervalle  $(-\infty, \xi)$  als Umgebung von  $-\infty$  auffasst (wir ersetzen  $\varepsilon$  durch  $\xi$ , um anzudeuten, daß  $\xi$  betragsmäßig sehr groß zu wählen ist). Der Ausdruck

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \infty$$

bedeutet daher folgendes:

*Zu jeder  $\xi$ -Umgebung  $K(\infty, \xi)$  von  $\infty$ , gibt es eine  $\delta$ -Umgebung  $K(c, \delta)$  von  $c$  mit der Eigenschaft*

$$f(K(c, \delta) \setminus \{c\}) \subset K(\infty, \xi),$$

bzw. ausführlich geschrieben:

*Zu jeder reellen Zahl  $\xi$  (egal wie groß sie gewählt wird),  
gibt es ein  $\delta > 0$ , so daß*

$$f(x) > \xi \quad \text{für alle} \quad 0 < |x - c| < \delta$$

*zutrifft.*

Für das Rechnen mit den Objekten  $\pm\infty$  gelten folgende Regeln:

- $\infty + \infty = \infty$ ,
- $x \cdot \infty = \infty$  für alle  $x > 0$  und  $x \cdot \infty = -\infty$  für alle  $x < 0$
- $\frac{x}{\infty} = 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}$
- $\infty \cdot \infty = \infty$
- $-\infty < x < \infty$  für alle  $x \in \mathbb{R}$

Ausdrücke der Form  $0 \cdot \infty$ ,  $\infty - \infty$ ,  $\frac{\infty}{\infty}$  sind nicht definiert und bedürfen einer eigenen Analyse.

Wir können nun den Satz 3.2 etwas präzisieren:

### Satz

*Es existiere  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  und es sei  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ . Ist und ist  $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$  für  $x \neq x_0$ , dann gilt  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$ , ist  $\frac{f(x)}{g(x)} < 0$  für  $x \neq x_0$ , dann gilt  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$ .*

Eine entsprechende Aussage gilt auch für die einseitigen uneigentlichen Grenzwerte. Nützlich ist auch folgendes Resultat:

### Satz

*Ist  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = F$  und  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$ , dann gilt  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ .*

## Beispiel

Man untersuche die Grenzwerte  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x-7}{x^2-4}$  und  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{x-1}$ .

## Lösung

ad 1) Wegen  $\lim_{x \rightarrow 2} (3x - 7) = -1$  und  $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 4) = 0$  kann  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  im eigentlichen Sinne nicht existieren. Wegen  $x^2 - 4 > 0$  für  $x > 2$  und  $x^2 - 4 < 0$  für  $x < 2$  (zumindest nahe bei 2) kann man Varianten von Satz 3.5 anwenden und auf die Existenz der einseitigen, uneigentlichen Grenzwerte schließen. Es gilt

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3x - 7}{x^2 - 4} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3x - 7}{x^2 - 4} = \infty.$$

## Lsg., Fortsetzung

ad 2) Dieser Grenzwert führt auf die unbestimmte Form  $\frac{\infty}{\infty}$ .  
Dividiert man Zähler und Nenner durch  $x$ , also

$$\frac{x+1}{x-1} = \frac{1 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}},$$

und berücksichtigt man  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$ , somit  
 $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x}) = \lim_{x \rightarrow \infty} (1 - \frac{1}{x}) = 1$ , folgt mit Hilfe der  
Rechenregeln Satz 3.1

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x+1}{x-1} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})}{\lim_{x \rightarrow \infty} (1 - \frac{1}{x})} = 1.$$

## Definition

Es sei  $f$  eine Abbildung  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  und  $x_0 \in I$ .

- 1  $f$  heißt **stetig** in  $x_0$  genau dann, wenn
  - $f$  an der Stelle  $x_0$  einen Grenzwert besitzt,
  - $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .
- 2  $f$  heißt stetig auf  $I$  genau dann, wenn  $f$  in jedem Punkt  $x_0 \in I$  stetig ist.

Wir haben im Anschluss an die Regeln in Satz 3.1 als Konsequenz festgehalten, daß der Grenzwert für Polynomfunktionen und für rationale Funktionen (außerhalb der Nullstellen des Nenners) durch den jeweiligen Funktionswert gegeben ist. Diese Funktionen sind daher stetig.

Setzt man die Definition 3.1 des Grenzwertes ein, erhält man folgende Charakterisierung der Stetigkeit:

### Satz

*Eine Funktion  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig in  $x_0$  genau dann, wenn zu jeder  $\varepsilon$ -Umgebung  $(f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$  von  $f(x_0)$  eine  $\delta$ -Umgebung  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  von  $x_0$  gefunden werden kann, für welche*

$$f((x_0 - \delta, x_0 + \delta)) \subset (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$$

*gilt.*

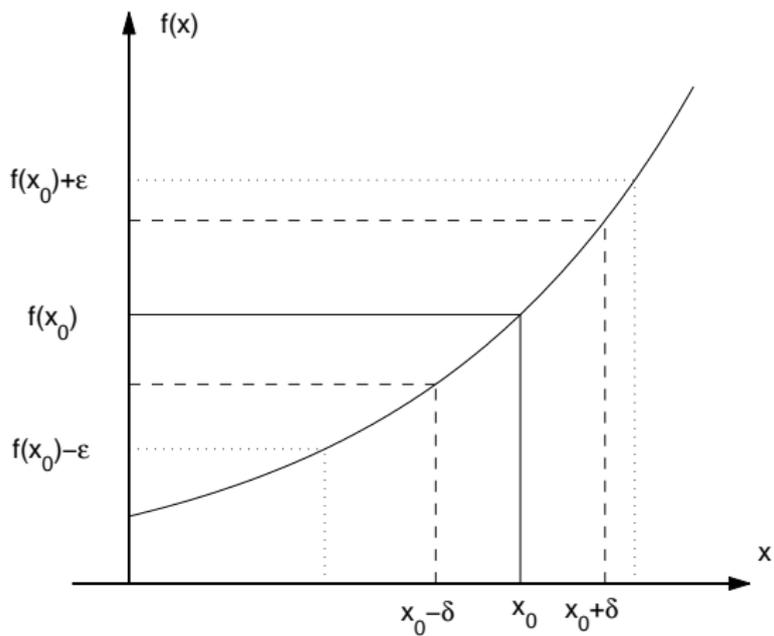


Abbildung:

Abbildung 26 veranschaulicht die charakteristische Eigenschaft stetiger Funktionen: Geringe Abweichungen im Argument bedingen nur geringe Abweichungen im Funktionswert. Interpretiert man  $\varepsilon$  als maximalen tolerierbaren Fehler bei der Auswertung von  $f$  in  $x_0$ , bedeutet  $\delta$  die Genauigkeit des Inputs, welche erforderlich ist, um die Fehlertoleranz einzuhalten. Ohne diese Eigenschaft wäre ein sinnvolles numerisches Rechnen nicht möglich. Wir haben im Anschluss an die Regeln in Satz 3.1 als Konsequenz festgehalten, daß der Grenzwert für Polynomfunktionen und für rationale Funktionen (außerhalb der Nullstellen des Nenners) durch den jeweiligen Funktionswert gegeben ist. Diese Funktionen sind daher stetig.

Setzt man die Definition 3.1 des Grenzwertes ein, erhält man folgende Charakterisierung der Stetigkeit:

### Satz

*Eine Funktion  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig in  $x_0$  genau dann, wenn zu jeder  $\varepsilon$ -Umgebung  $(f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$  von  $f(x_0)$  eine  $\delta$ -Umgebung  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  von  $x_0$  gefunden werden kann, für welche*

$$f((x_0 - \delta, x_0 + \delta)) \subset (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$$

*gilt.*

Da man  $x_0$  auch auffassen kann als  $x_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} x$ , lässt sich die für die Stetigkeit charakteristische Eigenschaft  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$  auch einprägsam schreiben als

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(\lim_{x \rightarrow x_0} x).$$

Bei stetigen Funktionen darf man also Abbildungsvorschrift und Grenzwert vertauschen.

Die Rechenregeln für Grenzwerte aus Satz 3.1 führen zu folgenden Regeln für stetige Funktionen.

Mit ihrer Hilfe kann man in den meisten Fällen die Stetigkeit einer Funktion aus der Stetigkeit ihrer elementaren Bausteinen ableiten.

### Satz

*[Rechenregeln für stetige Funktionen] Die Funktionen  $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$  seien stetig in  $x_0$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Dann sind auch die Abbildungen  $f \pm g$ ,  $fg$  und  $\lambda f$  stetig in  $x_0$ . Ist  $g(x_0) \neq 0$ , dann ist auch  $\frac{f}{g}$  stetig in  $x_0$ .*

Eine der nützlichsten Regeln betrifft die Stetigkeit der Komposition von Funktionen:

### Satz

*[Stetigkeit der Komposition] Für die Abbildungen  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  und  $g: J \rightarrow \mathbb{R}$  sei die Verknüpfungsbedingung  $J \supset f(I)$  erfüllt,  $f$  sei stetig in  $x_0$  und  $g$  sei stetig in  $f(x_0)$ . Dann ist die Hintereinanderausführung  $g \circ f$  ebenfalls stetig in  $x_0$ .*

Die Verkettung stetiger Funktionen führt also i. A. wieder auf eine stetig Funktion.

## Beispiel

Die Abbildung  $x \rightarrow f(x) = \left(\frac{1+x}{1+x^2}\right)^2$  ist stetig auf  $\mathbb{R}$

## Lösung

Wegen  $1 + x^2 > 0$  ist  $f$  auf  $\mathbb{R}$  definiert. Die Behauptung folgt nun unmittelbar aus der Beobachtung, daß  $f$  eine rationale Funktion ist. Man kann sich dies aber auch ohne Rückgriff auf die rationalen Funktionen überlegen: Die Polynomfunktionen  $x \rightarrow 1 + x$ , bzw.  $x \rightarrow 1 + x^2$  sind stetig. Da  $1 + x^2 \neq 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt, ist nach Satz 3.8 die Abbildung  $h: x \rightarrow \frac{1+x}{1+x^2}$  stetig auf  $\mathbb{R}$ . Auch die Abbildung  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y \rightarrow y^2$  ist stetig auf  $\mathbb{R}$ . Wegen  $f = g \circ h$  folgt nun die Behauptung aus Satz 3.9.

Überraschenderweise ist die Stetigkeit einer Umkehrfunktion bereits unter sehr schwachen Voraussetzungen gesichert:

### Satz

*[Stetigkeit der Umkehrfunktion] Die Abbildung  $f$  sei auf einem Intervall  $I$  definiert und streng monoton. Dann existiert  $f^{-1}$  auf  $f(I)$ ,  $f^{-1}$  ist auf  $f(I)$  stetig.*

Als Beispiel betrachten wir die Abbildung

$$f: \begin{cases} [0, \infty) \rightarrow [0, \infty) \\ x \rightarrow \sqrt{x} \end{cases}, \text{ welche die Umkehrfunktion von}$$
$$p: \begin{cases} [0, \infty) \rightarrow [0, \infty) \\ x \rightarrow x^2 \end{cases} \text{ ist. Wegen Satz 3.10 ist } f \text{ stetig.}$$

Wir betrachten nun Funktionen, deren Definitionsbereich an einer Stelle  $c$  eine Lücke hat, vgl. Abbildung 21. Existiert der Grenzwert  $L = \lim_{x \rightarrow c} f(x)$ , kann man die Lücke schließen, indem man  $f(x_0) = L$  setzt. Dies ist *die* natürliche Wahl für den Funktionswert von  $f$ , da dadurch  $f$  an der Stelle  $x_0$  automatisch stetig ist.

Im Folgenden betrachten wir nur stetige Funktionen auf einem *Intervall*.

### Satz (Zwischenwertsatz)

*Die Abbildung  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I$  ein Intervall, sei stetig. Dann ist  $f(I)$  ebenfalls ein Intervall.*

Einprägsamer ist vielleicht folgende Formulierung von Satz 3.11: Das stetige Bild eines Intervalles ist wieder ein Intervall. Als Folgerung, welche die Bezeichnung Zwischenwertsatz rechtfertigt, erhält man:

### Korollar

*Ist  $f$  auf  $[\alpha, \beta]$  stetig und liegt  $\lambda$  zwischen  $f(\alpha)$  und  $f(\beta)$ , dann gibt es mindestens eine Zahl  $\xi$  mit  $\alpha \leq \xi \leq \beta$  und  $f(\xi) = \lambda$ .*

Aus der Zwischenwerteigenschaft kann allerdings nicht auf die Stetigkeit geschlossen werden. Ist  $\alpha\beta < 0$  und  $\lambda = 0$ , erhält man:

### Korollar

*Haben die Funktionswerte einer stetigen Abbildung  $f$  an den Randpunkten eines Intervalles  $[a, b]$  verschiedene Vorzeichen, dann besitzt  $f$  in  $(a, b)$  eine Nullstelle.*

## Lsg., Fortsetzung I

Der Zwischenwertsatz bildet die theoretische Grundlage für das sogenannte Bisektionsverfahren zur Berechnung der Nullstelle einer stetigen Funktion. Ausgangspunkt dieses Verfahrens ist ein Intervall  $[a, b]$ , an dessen Endpunkten die Funktionswerte von  $f$  verschiedenes Vorzeichen besitzen, etwa  $f(a) < 0$  und  $f(b) > 0$  (ein solches Intervall kann beispielsweise aus einer graphischen Darstellung der Funktion abgelesen werden). Nach dem Zwischenwertsatz muß  $f$  im Intervall  $(a, b)$  mindestens eine Nullstelle besitzen. Als nächstes berechnet man den Mittelpunkt  $\frac{a+b}{2}$  und den zugehörigen Funktionswert  $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ . Gilt zufälligerweise  $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$ , ist man fertig, ansonsten wählt man jenes Teilintervall, in dem die Funktionswerte am Rand verschiedenes Vorzeichen besitzen, und ist wieder bei der Ausgangssituation angelangt, allerdings mit einem Intervall, welches

## Lsg., Fortsetzung II

nur halb so lang wie das Ausgangsintervall ist. Führt man diese Vorgangsweise weiter, ergibt sich folgender Algorithmus:

BISEKTIONSVERFAHREN:

Schritt 0: Wähle eine Fehlertoleranz  $tol$

Wähle ein Intervall  $[a_0, b_0]$  mit  $f(a_0)f(b_0) < 0$

Schritt k: verfügbar ein Intervall  $[a_k, b_k]$  mit  $f(a_k)f(b_k) \leq 0$

berechne  $m_k = (a_k + b_k)/2$  und  $f(m_k)$

bestimme das Intervall  $[a_{k+1}, b_{k+1}] = [a_k, m_k]$  bzw.  $[m_k, b_k]$

mit  $f(a_{k+1})f(b_{k+1}) \leq 0$

falls  $\frac{1}{2}(b_{k+1} - a_{k+1}) < tol$  stop

Der Vorteil dieses Verfahrens ist, daß es pro Iterationsschritt nur eine Funktionsauswertung und die Berechnung eines arithmetischen Mittels benötigt und relativ leicht zu implementieren ist. Darüber

## Lsg., Fortsetzung III

hinaus erhält man für die gesuchte Nullstelle  $\xi$  stets obere und untere Schranken. Aus einer einfachen Überlegung ergibt sich nämlich folgende Abschätzung

$$|m_k - \xi| \leq \frac{b - a}{2^k},$$

welche allerdings gleichzeitig auch den gravierenden Nachteil des Verfahrens aufzeigt: es konvergiert vergleichsweise langsam, benötigt man doch für die Erhöhung der Genauigkeit um einen Faktor  $\frac{1}{8}$  im Mittel 3 Iterationen.

## Definition

Es sei  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I$  ein Intervall, eine Funktion.

- 1  $f$  nimmt in  $x_0 \in I$  das **globale Maximum (Minimum)** genau dann an, wenn  $f(x) \leq f(x_0)$  ( $f(x) \geq f(x_0)$ ) für alle  $x \in I$  gilt.
- 2  $f$  nimmt in  $x_0 \in I$  ein **lokales Maximum (Minimum)** an genau dann, wenn es ein  $\delta > 0$  gibt, sodaß  $f(x) \leq f(x_0)$  ( $f(x) \geq f(x_0)$ ) für alle  $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap I$  gilt.
- 3 Ein Maximum oder Minimum einer Funktion nennt man **Extremum**.

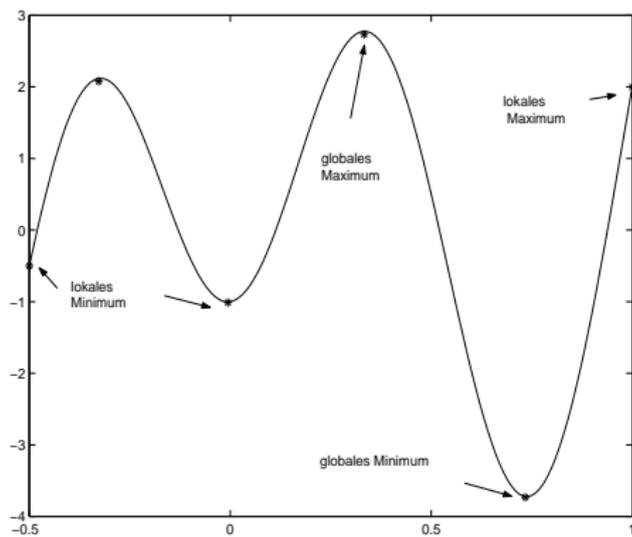


Abbildung: Extrema

Der Wert des globalen Maximums (Minimums) einer Funktion ist eindeutig bestimmt. Es ist natürlich möglich, daß das globale Extremum an mehreren Stellen angenommen wird. Die Werte der lokalen Extrema sind im Allgemeinen verschieden. Es ist meist schwierig, Stellen zu identifizieren, an denen das globale Extremum angenommen wird. Numerische Optimierungspakete beispielsweise finden meist nur Stellen lokaler Extrema, welche zudem von einem zu spezifizierenden Startwert abhängen können. Der folgende Satz gibt eine Bedingung an, unter der ein Optimierungsproblem in einer Variablen eine Lösung besitzt.

### Satz (Weierstraß)

*Eine stetige Funktion nimmt auf einem abgeschlossenen und beschränkten Intervall  $[a, b]$  das globale Maximum und Minimum an.*

In diesem Abschnitt spezialisieren wir den Begriff des Grenzwertes auf Funktionen, welche auf den natürlichen Zahlen definiert sind:  $x: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K}$ . Man nennt solche Funktionen **Folgen** und schreibt anstelle von  $x(n)$  meist  $x_n$ . Um den Folgenaspekt hervorzuheben verwenden wir  $(x_n) \subset \mathbb{K}$  anstelle von  $x: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K}$ .

Wendet man das allgemeine Konzept des Grenzwertes aus Definition 3.1 auf Folgen an, ergibt sich:

## Definition

[Konvergenz einer Folge]

- 1 Eine Folge  $(x_n) \subset \mathbb{K}$  heißt **konvergent** gegen  $x \in \mathbb{K}$  genau dann, wenn es zu jedem  $\varepsilon > 0$  einen Index  $N(\varepsilon)$  gibt, so daß alle Folgenglieder  $x_n$  mit  $n \geq N(\varepsilon)$  in der  $\varepsilon$ -Umgebung von  $x$  liegen. Man nennt  $x$  **Grenzwert** der Folge und schreibt

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

- 2  $(x_n)$  heißt **divergent**, wenn  $(x_n)$  nicht konvergent ist.
- 3 Eine konvergente Folge  $(x_n)$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$  heißt **Nullfolge**.

## Satz

*Wenn der Grenzwert existiert, ist er eindeutig bestimmt.*

Die Konvergenz einer Folge kann auch folgendermaßen formuliert werden: in jeder  $\varepsilon$ -Umgebung von  $x$ , egal wie klein  $\varepsilon > 0$  auch gewählt wird, liegen *alle* Folgenglieder bis auf höchstens *endlich viele* Ausnahmen. Im Fall einer Folge reeller Zahlen enthält also jedes Intervall  $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$  *alle* Folgenglieder bis auf höchstens *endlich viele* Ausnahmen. Da Konvergenz das asymptotische Verhalten der Folge betrifft, sind die Konvergenz und der Grenzwert einer Folge nicht betroffen, wenn man endlich viele Glieder der Folge abändert.

Die Begriffe der Konvergenz und des Grenzwertes machen auch für Vektoren Sinn. Betrachtet man z. B. eine Folge  $(\vec{x}_n)$  von Vektoren im  $\mathbb{R}^2$  mit dem Grenzwert  $\vec{x}$ , sind die  $\varepsilon$ -Umgebungen von  $\vec{x}$  Kreisscheiben mit Radius  $\varepsilon$  und Mittelpunkt  $\vec{x}$ . Es sei  $(\vec{x}_n) = ((x_1^n, x_2^n))$  und  $\vec{x} = (x_1, x_2)$  (der Übersichtlichkeit halber wurde der Folgenindex bei den Koordinaten hochgestellt). Bei gegebenem  $\varepsilon > 0$  gilt also für hinreichend große  $n$

$$\|\vec{x}_n - \vec{x}\| = (|x_1^n - x_1|^2 + |x_2^n - x_2|^2)^{1/2} < \varepsilon.$$

Dies kann jedoch nur gelten, wenn

$$|x_1^n - x_1| < \varepsilon, \quad \text{und} \quad |x_2^n - x_2| < \varepsilon$$

gleichzeitig für hinreichend große  $n$  zutreffen, d.h. wenn die beiden Koordinatenfolgen gegen  $x_1$ , bzw.  $x_2$  konvergieren. Man kann zeigen, daß auch die Umkehrung richtig ist. Diese Überlegung hat folgende wichtige Konsequenz:

## Satz

*Eine Folge von Vektoren  $(\vec{x}_n) = ((x_1^n, \dots, x_k^n))$  konvergiert genau dann gegen den Vektor  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_k)$  in  $\mathbb{K}^k$ , wenn alle Koordinatenfolgen  $(x_i^n) \subset \mathbb{K}$  gegen  $(x_i)$  konvergieren ( $i = 1, \dots, k$ ).*

Dieses Ergebnis erlaubt es die weiteren Konvergenzbetrachtungen ohne Beschränkung der Allgemeinheit nur für Folgen reeller oder komplexer Zahlen durchzuführen.

Ein Nachteil von Definition 3.4 ist, daß ihre Verifikation die Kenntnis des Grenzwertes voraussetzt. Dieser ist aber meist nicht bekannt. Es gibt allerdings Kriterien, mit deren Hilfe man die Konvergenz einer Folge aus ihren qualitativen Eigenschaften ableiten kann:

### Definition

- 1  $(x_n) \subset \mathbb{K}$  heißt **beschränkt** genau dann, wenn es ein  $M > 0$  gibt, so daß  $|x_n| \leq M$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt.
- 2  $(x_n) \subset \mathbb{R}$  heißt **monoton wachsend (fallend)** genau dann, wenn  $x_n \leq x_{n+1}$  ( $x_n \geq x_{n+1}$ ) für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt.

## Satz

*Jede monotone und beschränkte Folge reeller Zahlen ist konvergent.*

Dieses Resultat ist eine typische Existenzaussage: es wird nur behauptet, daß es einen Grenzwert gibt, über den Grenzwert selbst wird nichts ausgesagt. Recht praktisch ist manchmal folgende Konvergenzbedingung:

## Satz

*Es sei  $(x_n) \subset \mathbb{K}$  eine Nullfolge und  $(y_n) \subset \mathbb{K}$  beschränkt. Dann ist auch  $(x_n y_n)$  eine Nullfolge.*

Nützlich sind folgende Grenzwerte:

### Satz

- 1  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$  für alle  $\alpha > 0$ .
- 2 Die Folge der Potenzen  $(q^n)$  für  $q \in \mathbb{C}$  ist konvergent genau dann, wenn  $|q| < 1$  oder  $q = 1$  ist. Es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \begin{cases} 0 & \Leftrightarrow |q| < 1 \\ 1 & \Leftrightarrow q = 1. \end{cases}$$

- 3 Für jede reelle Zahl  $\alpha > 0$  gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha^{\frac{1}{n}} = 1.$$

- 4  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$ .
- 5  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = 2.71828182845905 \dots$  (**Euler'sche Zahl**)

Es gelten die bereits vertrauten Regeln für Grenzwerte:

### Satz

- 1 Es seien  $(x_n)$ ,  $(y_n)$  konvergente Folgen mit  $x_n \leq y_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Dann gilt auch  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ .
- 2 Es seien  $(x_n)$ ,  $(y_n)$  konvergente Folgen mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ . Gelten für alle Glieder einer weiteren Folge  $(z_n)$  die Abschätzungen

$$x_n \leq z_n \leq y_n,$$

dann ist auch die Folge  $(z_n)$  konvergent mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

## Satz

Es seien  $(x_n)$ ,  $(y_n)$  konvergente Folgen und  $\lambda \in \mathbb{K}$ .

- 1 Dann sind auch die Folgen  $(\lambda x_n)$ ,  $(x_n y_n)$ ,  $(x_n \pm y_n)$  konvergent und es gilt
  - $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda x_n = \lambda \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ ,
  - $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ ,
  - $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \pm y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ ,
- 2 Falls  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n \neq 0$  konvergiert auch die Quotientenfolge  $(\frac{x_n}{y_n})$  und es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n}.$$

Man überzeugt sich leicht an Hand des Beispiels

$x_n = y_n = (-1)^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , daß die Konvergenz der Folgen eine unverzichtbare Voraussetzung in den Rechenregeln von Satz 3.19 ist. Satz 3.19 ermöglicht es, die Untersuchung der Konvergenz und Berechnung des Grenzwertes zahlreicher komplizierter Folgen auf die entsprechende Untersuchung einfacherer Folgen (mit bekanntem Resultat) zurückzuführen:

## Beispiel

Man berechne den Grenzwert der durch  $x_n = \frac{n^7+2n^2+1}{3n^7+4n^4+7n}$  definierten Folge.

## Lösung

Das  $n$ -te Folgenglied ist als Quotient zweier Polynome definiert. In solchen und ähnlichen Beispielen ist es günstig, zuerst die höchste Potenz in Zähler und Nenner herauszuheben:

$$x_n = \frac{n^7(1 + \frac{2}{n^5} + \frac{1}{n^7})}{n^7(3 + \frac{4}{n^3} + \frac{7}{n^6})} = \frac{(1 + \frac{2}{n^5} + \frac{1}{n^7})}{(3 + \frac{4}{n^3} + \frac{7}{n^6})} = \frac{y_n}{z_n}.$$

Als nächstes untersucht man getrennt die Folgen im Zähler und Nenner.

## Lsg., Fortsetzung

Satz 3.17 zeigt, daß beispielsweise die Zählerfolge als Summe konvergenter Folgen aufgefaßt werden kann. Somit ist Satz 3.19 anwendbar, d.h. die Zählerfolge ist konvergent und es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 1 + 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^5} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^7} = 1 + 0 + 0 = 1.$$

Analog findet man

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 3 + 4 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} + 7 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^6} = 3.$$

Wegen  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n \neq 0$  kann man Satz 3.19 auf die Quotientenfolge  $(\frac{y_n}{z_n})$  anwenden und erhält schließlich

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{z_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} z_n} = \frac{1}{3}.$$

## Beispiel

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n - 1}{4^n - 4^{n-1}} = \frac{4}{3}.$$

## Lösung

Analog zum vorigen Beispiel kürzt man zuerst durch  $4^n$  und erhält

$$x_n = \frac{4^n - 1}{4^n - 4^{n-1}} = \frac{1 - \frac{1}{4^n}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3} \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right)$$

Mit Hilfe von Satz 3.17 und Satz 3.19 ergibt sich daher

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{4}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right) = \frac{4}{3} \left(1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n\right) = \frac{4}{3} (1 - 0) = \frac{4}{3}.$$

Manchmal ist es zweckmäßig auch unbeschränkten Folgen wie etwa  $(x_n) = (n)$  einen Grenzwert zuzuweisen. Dazu verwenden wir wieder die Objekte  $\pm\infty$ .

### Definition

Eine Folge  $(x_n) \subset \mathbb{R}$  heißt **divergent (uneigentlich konvergent)** gegen  $\infty$  ( $-\infty$ ) genau dann, wenn für alle  $\xi \in \mathbb{R}$  ein Index  $N(\xi)$  existiert, so daß

$$x_n \geq \xi \quad (x_n \leq \xi)$$

für alle  $n \geq N(\xi)$  zutrifft. Das Symbol  $\pm\infty$  nennt man **uneigentlichen Grenzwert** der Folge  $(x_n)$ . Symbolisch drückt man dies aus durch  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ , bzw.  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$ .

## Satz

Es seien  $(x_n), (y_n) \subset \mathbb{R}$  Folgen und  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \in \mathbb{R}$ .

- 1 Ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \infty$ , dann gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = 0$ .
- 2 Ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$  und  $\frac{x_n}{y_n} > 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , dann gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \infty$ .
- 3 Ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$  und  $\frac{x_n}{y_n} < 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , dann gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = -\infty$ .

Da das Konvergenzverhalten einer Folge nicht von einem endlichen Abschnitt der Folge abhängt, genügt es, wenn die Vorzeichenbedingung für den Quotienten in Satz 3.20 für alle hinreichend großen Indizes erfüllt ist.

### Beispiel

Zu berechnen sind die Grenzwerte der Folgen

$$(x_n) = \left( \frac{n^2 - 3n + 5}{-2\sqrt{n} + 7} \right), \quad \text{und} \quad (y_n) = \left( \frac{3n - 1}{\sqrt{5n^3} - 6n + 2} \right)$$

## Lösung

Beide Beispiele führen auf die unbestimmte Form  $\frac{\infty}{\infty}$ . Erweitert man jedoch die Folgeglieder  $x_n$  mit  $\frac{1}{n^2}$ , bzw.  $y_n$  mit  $\frac{1}{\sqrt{n^3}}$  erhält man

$$x_n = -\frac{1 - \frac{3}{n} + \frac{5}{n^2}}{\frac{2}{\sqrt{n^3}} - \frac{7}{n^2}},$$

$$y_n = \frac{\frac{3}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n^3}}}{\sqrt{5} - \frac{6}{\sqrt{n}} + \frac{2}{\sqrt{n^3}}}$$

## Lsg., Fortsetzung

Da die Zählerfolge in  $x_n$  gegen 1 konvergiert, die Nennerfolge eine Nullfolge ist, kann man wegen

$$\frac{2}{\sqrt{n^3}} - \frac{7}{n^2} = \frac{1}{\sqrt{n^3}} \left( 2 - \frac{7}{\sqrt{n}} \right) > 0, \quad \text{für } n \text{ hinreichend groß}$$

Satz 3.20 anwenden und auf

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$$

schließen. Die Zählerfolge in  $y_n$  ist eine Nullfolge, die Nennerfolge konvergiert gegen  $\sqrt{5}$ , somit folgt aus Satz 3.19

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0.$$

## Definition

Es sei  $x \in \mathbb{R}$  und  $n \in \mathbb{N}$ . Die **n-te Potenz** von  $x$  ist definiert durch

$$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{n\text{-mal}},$$

für  $x \neq 0$  setzt man

$$x^0 = 1.$$

Man nennt  $x$  **Basis** und  $n$  **Exponent**.

Für das Rechnen mit Potenzen gelten folgende wohlbekannte Regeln:

### Satz (Rechenregeln für Potenzen)

- 1  $x^n x^m = x^{n+m},$
- 2  $(x^n)^m = x^{nm},$
- 3  $(xy)^n = x^n y^n,$
- 4 Falls  $0 < x < y$  gilt  $0 < x^n < y^n.$
- 5 Falls  $0 < x < 1$  und  $m > n,$  dann gilt  $0 < x^m < x^n.$
- 6 Falls  $x > 1$  und  $m > n,$  dann gilt  $x^m > x^n.$

Für einen festen Exponenten  $n$  nennt man die Funktion  $x \rightarrow x^n$  **Potenzfunktion**. Sie ist für alle  $x \in \mathbb{R}$  definiert. Um die Referenz auf diese Funktion zu erleichtern, führen wir vorübergehend die Bezeichnung  $p_n(x) = x^n$  ein.

Satz (Eigenschaften der Potenzfunktion  $p_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ )

- 1  $p_n$  ist stetig auf  $\mathbb{R}$ .
- 2  $p_n$  ist **gerade** für  $n$  gerade, d.h.  $p_n(x) = p_n(-x)$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ .
- 3  $p_n$  ist **ungerade** für  $n$  ungerade, d.h.  $p_n(x) = -p_n(-x)$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ .
- 4  $p_n$  ist strikt monoton wachsend für  $n$  ungerade.
- 5  $\lim_{x \rightarrow \infty} p_n(x) = \infty$ , für alle  $n \in \mathbb{N}$ .
- 6  $\lim_{x \rightarrow -\infty} p_n(x) = \begin{cases} \infty & \text{für } n \text{ gerade,} \\ -\infty & \text{für } n \text{ ungerade.} \end{cases}$

Die beiden Abbildungen 28 und 29 fassen diesen Satz noch einmal anschaulich zusammen.

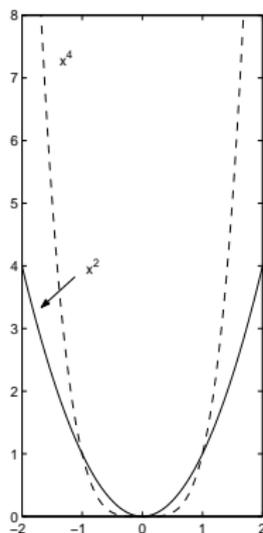


Abb.: gerade Potenzen

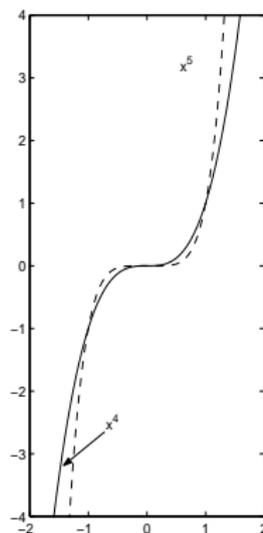


Abb.: ungerade Potenzen

$p_n$  ist auf  $[0, \infty)$  für  $n$  gerade und auf  $\mathbb{R}$  für  $n$  ungerade streng monoton wachsend und besitzt daher eine Umkehrfunktion. Die Umkehrfunktion der Potenzfunktion ist die Wurzelfunktion. Nach Satz 3.10 ist die Wurzelfunktion stetig.

## Definition

- ① Die **Wurzelfunktion**  $w_n$  ist für
- $n$  gerade:  $w_n : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$
  - $n$  ungerade:  $w_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

definiert durch

$$\sqrt[n]{y} = x \Leftrightarrow y = x^n$$

- ② Schreibweise:  $\sqrt[n]{y} \equiv y^{1/n}$ .

## Satz (Eigenschaften der Wurzelfunktion)

- 1  $w_n$  ist stetig.
- 2  $w_n$  ist streng monoton wachsend.
- 3  $\lim_{x \rightarrow \infty} w_n(x) = \infty$
- 4  $w_n$  ist ungerade für  $n$  ungerade.
- 5 Für  $0 < y < 1$  und  $m > n$  gilt  $y^{\frac{1}{m}} > y^{\frac{1}{n}}$ .
- 6 Für  $y > 1$  und  $m > n$  gilt  $y^{\frac{1}{m}} < y^{\frac{1}{n}}$ .

Abbildung 30 illustriert die Eigenschaften der Wurzelfunktion.

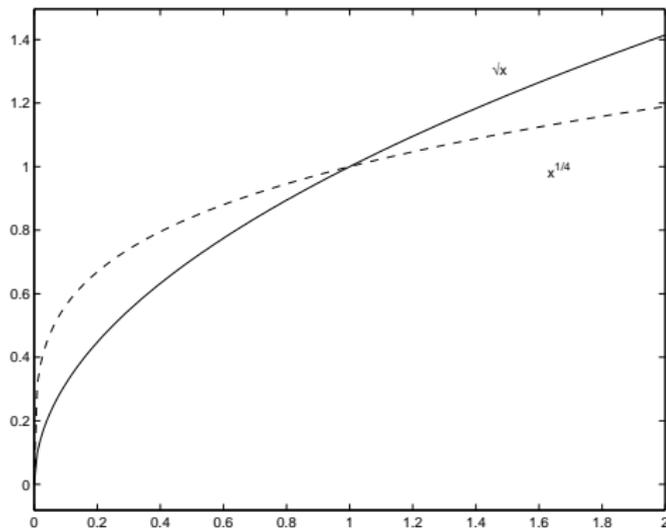


Abbildung: Wurzelfunktion

Für  $y \in [0, \infty)$  und  $p, q \in \mathbb{N}$  kann man nun einerseits  $\sqrt[q]{y^p}$ , andererseits  $(\sqrt[q]{y})^p$  betrachten. Es stellt sich heraus, daß beide Zahlen gleich sind. Es ist also unerheblich, ob man zuerst potenziert und dann die entsprechende Wurzel zieht, oder ob man umgekehrt vorgeht. Man kann daher auch  $y^{\frac{p}{q}}$  schreiben. Die Darstellung einer positiven rationalen Zahl als Quotient zweier natürlicher Zahlen ist jedoch nicht eindeutig. Man kann allerdings zeigen:

Ist  $\frac{p}{q} = \frac{r}{s}$ , dann gilt auch  $x^{\frac{p}{q}} = x^{\frac{r}{s}}$  für alle  $x > 0$ .

Die Definition der Potenz mit positiven rationalen Exponenten und positiver Basis ist somit eindeutig. Es gelten die Rechenregeln aus Satz 4.1, (1)–(3). Wir erweitern nun die Definition der Potenz-, und Wurzelfunktion auf negative Exponenten:

### Definition

- 1 Für  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  und  $n \in \mathbb{N}$  setzt man  $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ .
- 2 Für  $x > 0$  und  $p, q \in \mathbb{N}$  setzt man  $x^{-\frac{p}{q}} = \frac{1}{x^{\frac{p}{q}}}$

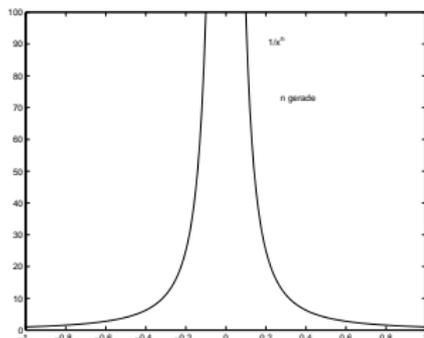
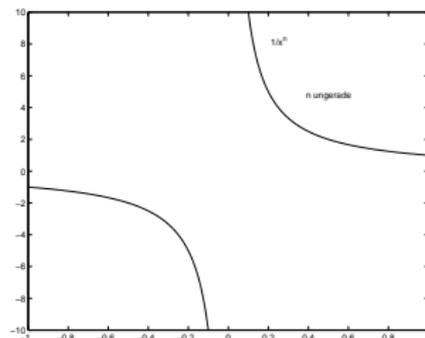
Es gelten die Rechenregeln aus Satz 4.1, (1)–(3). Die Abbildungen 31 und 32 veranschaulichen die Abbildungen  $x \rightarrow \frac{1}{x^n}$  für einen geraden bzw. ungeraden Exponenten. Man erkennt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^n} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^n} = \infty, \quad \text{falls } n \text{ gerade,}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^n} = -\infty, \quad \text{falls } n \text{ ungerade,}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^n} = \infty, \quad \text{falls } n \text{ ungerade,}$$

Abbildung:  $x^{-2n}$ Abbildung:  $x^{-2n+1}$

Jede reelle Zahl läßt sich beliebig genau durch rationale Zahlen approximieren: Für alle  $a \in \mathbb{R}$  gibt es eine Folge  $(r_n) \subset \mathbb{Q}$  mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = a.$$

Für jedes  $r_n \in \mathbb{Q}$  und  $x > 0$  ist  $x^{r_n}$  sinnvoll definiert. Man kann nun zeigen, daß

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^{r_n}$$

existiert und unabhängig ist von der Folge  $(r_n)$ , welche  $x$  approximiert. Somit ist folgende Vereinbarung sinnvoll:

## Definition

Es sei  $x \in (0, \infty)$ ,  $a \in \mathbb{R}$  und  $(r_n) \subset \mathbb{Q}$  eine Folge mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = a$ . Dann ist

$$x^a := \lim_{n \rightarrow \infty} x^{r_n}$$

Für das Rechnen mit reellen Potenzen gelten folgende Regeln:

### Satz

Es seien  $x, y > 0$  und  $a, b \in \mathbb{R}$ . Dann gilt

- 1  $x^{a+b} = x^a x^b,$
- 2  $(xy)^a = x^a y^a,$
- 3  $(x^a)^b = x^{ab} = (x^b)^a,$
- 4  $x^a \neq 0$  und  $x^{-a} = \frac{1}{x^a},$
- 5  $\left(\frac{x}{y}\right)^a = x^a y^{-a}.$
- 6 Für  $a > 0$  und  $0 < x < y$  gilt  $x^a < y^a.$
- 7 Für  $x > 1$  und  $a < b$  gilt  $x^a < x^b.$
- 8 Für  $x \in (0, 1)$  und  $a < b$  gilt  $x^b < x^a.$

## Satz

Es sei  $a \in \mathbb{R}$  und  $a \neq 0$ . Für die allgemeine Potenzfunktion

$$p_a = \begin{cases} (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^a \end{cases}$$

*gilt*

- 1  $p_a$  ist stetig.
- 2  $p_a$  ist eine Bijektion von  $(0, \infty)$  auf  $(0, \infty)$ .
- 3  $p_a$  ist streng monoton wachsend für  $a > 0$  und streng monoton fallend für  $a < 0$ .

Abbildung 33 illustriert das qualitative Verhalten der allgemeinen Potenzfunktion  $p_a$  für verschiedene Exponenten  $a$ .

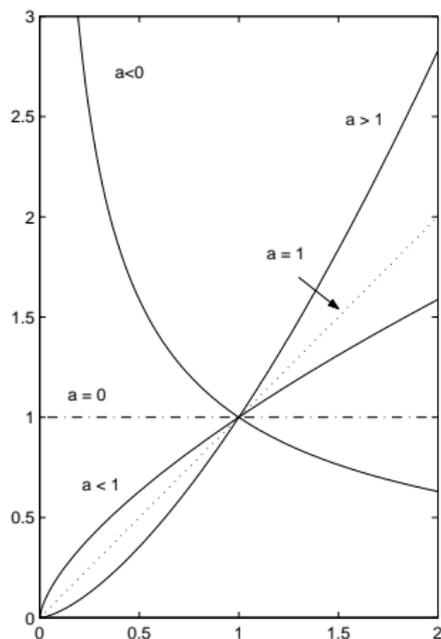


Abbildung: Allgemeine Potenz

Bestandsproportionale Änderungen treten beispielsweise auf

- in der Populationsdynamik :  $\frac{\Delta P(t)}{\Delta t} = \lambda P(t)$ ,
- beim radioaktiven Zerfall:  $-\frac{\Delta m(t)}{\Delta t} = \lambda m(t)$ ,  
( $m(t)$  bezeichnet die Zur Zeit  $t$  vorhandene Substanzmenge)
- in der Reaktionskinetik:  $\frac{\Delta c(t)}{\Delta t} = \lambda c(t)$ ,  
( $c(t)$  bezeichnet die Konzentration einer Substanz zur Zeit  $t$ )

Allen Beispielen gemeinsam ist die Annahme, daß die mittlere Änderungsrate einer Bestandsgröße  $y$  über einem kleinen Zeitintervall  $\Delta t$  proportional ist zum Wert der Bestandsgröße am Beginn des betrachteten Zeitraumes

$$\frac{\Delta y(t)}{\Delta t} = \lambda y(t).$$

## Beispiel

Die Biomasse einer Bakterienkultur verdoppele sich alle 3 Stunden. Anfänglich sind 3 g vorhanden. Wie entwickelt sich die Biomasse im Laufe der Zeit? (Zeiteinheit Stunden)

## Lösung

Es bezeichne  $B(t)$  die Biomasse zur Zeit  $t$  (in Stunden). Zu Beginn des Experimentes ( $t = 0$ ) war  $B(0) = B_0$  g Biomasse vorhanden. Da sich die Biomasse alle 3 Stunden verdoppelt, gilt

$$B(t + 3) = 2B(t).$$

## Lsg., Fortsetzung I

Unter der Annahme einer bestandsproportionalen Zuwachsrates folgt mit  $\Delta t = 1$

$$B(t + 1) - B(t) = \lambda B(t),$$

also

$$B(t + 1) = rB(t)$$

mit  $r = \lambda + 1$ . Für die unbekannte Konstante  $r$  ergibt sich aus

$$B(t + 3) = rB(t + 2) = r^2 B(t + 1) = r^3 B(t) \stackrel{!}{=} 2B(t)$$

die Beziehung

$$r^3 = 2, \quad \text{d.h.} \quad r = \sqrt[3]{2}.$$

## Lsg., Fortsetzung II

Es folgt

$$B(1) = rB_0,$$

$$B(2) = rB(1) = r^2 B_0,$$

$$B(3) = rB(2) = r^3 B_0, \text{ etc.}$$

Man erkennt das Bildungsgesetz für die Dynamik der Biomasse

$$B(t) = B_0 r^t = B_0 2^{\frac{t}{3}}.$$

## Beispiel

Wir betrachten nun die Entwicklung einer Bakterienkultur unter der Annahme

$$P(t + \Delta t) - P(t) \approx \lambda P(t) \Delta t.$$

(vgl. Beispiel 1.4). Dieser Ansatz ist nur für kurze Zeitintervalle  $\Delta t$  sinnvoll, da sich während dieser Zeitspanne die Populationsgröße ändert. Für hinreichend kurze Zeitintervalle kann man allerdings davon ausgehen, daß nur die zur Zeit  $t$  vorhandenen Bakterien sich vermehren können. Die Populationsgröße zur Zeit  $t = 0$  sei  $P(0) = P_0$ , gesucht ist  $P(t)$  für  $t > 0$ .

## Lösung

Um  $P(t)$  zu berechnen, unterteilt man das Intervall  $[0, t]$  in  $n$  gleich lange Teilintervalle der Länge  $\Delta t = \frac{t}{n}$  und setzt  $t_i = \frac{i}{n}t$ ,  $i = 0, \dots, n$ . Es folgt

$$\begin{aligned}P(t_n) &\approx P(t_{n-1}) + \lambda \Delta t P(t_{n-1}) \\&= \left(1 + \lambda \frac{t}{n}\right) P(t_{n-1}) \\&\approx \left(1 + \lambda \frac{t}{n}\right) (P(t_{n-2}) + \lambda \Delta t P(t_{n-2})) \\&= \left(1 + \lambda \frac{t}{n}\right)^2 P(t_{n-2}) = \dots \\&\approx \left(1 + \lambda \frac{t}{n}\right)^n P(t_0).\end{aligned}$$

## Lsg., Fortsetzung

Es liegt nahe zu vermuten, daß eine Verfeinerung der Unterteilung des Zeitintervalles  $[0, t]$  zu einer besseren Approximation von  $P(t)$  führt und im Idealfall

$$P(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \lambda \frac{t}{n}\right)^n P_0$$

gilt. Dieser Grenzwert existiert, denn man kann (mit einigem Aufwand) zeigen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x, \quad x \in \mathbb{R},$$

wobei  $e = 2,71828\dots$  die **Euler'sche Zahl** bezeichnet. Man erhält somit für die Populationsgröße

$$P(t) = P_0 e^{\lambda t}.$$

Die beiden Beispiele führten uns zwanglos auf einen neuen Typ von Funktionen, bei dem die unabhängige Variable im Exponenten steht:

### Definition (Exponentialfunktion)

Die **Exponentialfunktion** ist definiert durch

$$\exp = \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n. \end{cases}$$

Anstelle  $\exp(x)$  schreibt man auch  $e^x$ .

Man kann zeigen, daß  $\exp(x)$  tatsächlich mit der reellen Potenz  $e^x$  übereinstimmt. Dies wurde in der Bezeichnung bereits vorweggenommen. Es gelten somit die Rechenregeln aus Satz 4.4. Manchmal ist es zweckmäßig nicht nur die Eulersche Zahl als Basis für die Exponentialfunktion zur Verfügung zu haben:

## Satz (Satz und Definition)

Die Exponentialfunktion zur Basis  $a > 0$ ,  $a \neq 1$

$$\exp_a := \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto a^x \end{cases}$$

hat folgende Eigenschaften:

- 1  $\exp_a$  ist stetig.
- 2  $\exp_a$  ist eine Bijektion von  $\mathbb{R}$  auf  $(0, \infty)$ .
- 3  $\exp_a$  ist streng monoton wachsend für  $a > 1$  und streng monoton fallend für  $a < 1$ .
- 4 Für alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt  $\exp_a(x) > 0$ ,  $\exp_a(0) = 1$ .
- 5  $\lim_{x \rightarrow \infty} \exp_a(x) = \infty$  und  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp_a(x) = 0$  für  $a > 1$

Abbildung 34 illustriert das qualitative Verhalten von  $\exp_a$  für  $a = 2$  und  $a = \frac{1}{2}$ .

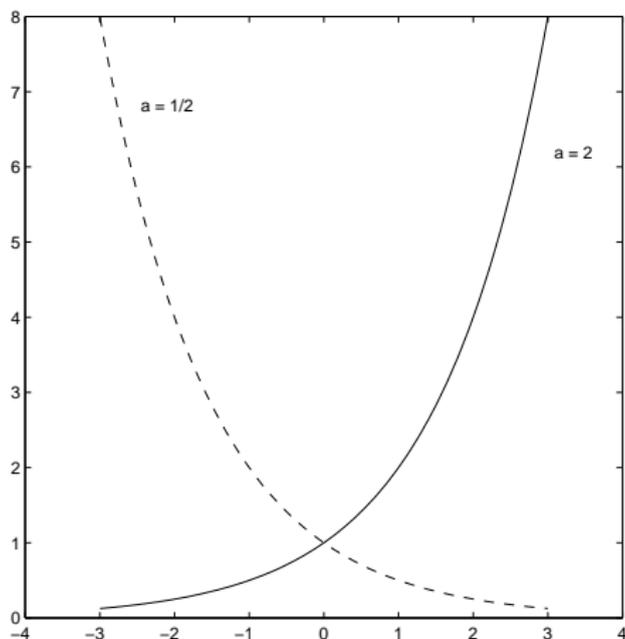


Abbildung:  $\exp_a$

## Satz

- ① Für positive  $\lambda$  wächst die Exponentialfunktion  $e^{\lambda t}$  rascher als jede Potenzfunktion, insbesondere gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^a}{e^{\lambda t}} = 0, \quad \text{für alle } a > 0$$

- ② Für negative  $\lambda$  konvergiert die Exponentialfunktion  $e^{\lambda t}$  rascher gegen Null als jede Potenzfunktion anwächst, insbesondere gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^a e^{\lambda t} = 0, \quad \text{für alle } a > 0$$

Da jede Exponentialfunktion  $\mathbb{R}$  bijektiv auf  $(0, \infty)$  abbildet, existiert die Umkehrfunktion:

### Definition (Logarithmusfunktion)

- 1 Die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion  $\exp_a: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ ,  $a > 0$ ,  $a \neq 1$  definiert die **Logarithmusfunktion zur Basis a**

$$\log_a: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

- 2 Somit gilt:  $x = \log_a(y) \Leftrightarrow y = \exp_a(x) = a^x$
- 3  $\log_a(y)$  heißt **Logarithmus von y zur Basis a**.

## Bemerkung

Von Bedeutung sind die Basen:

- 1  $a = 10$ : dekadische Logarithmen
- 2  $a = 2$ : binäre Logarithmen
- 3  $a = e$ : natürliche Logarithmen

An Stelle von  $\log_a(y)$  schreibt man allgemein  $\ln(y)$ .

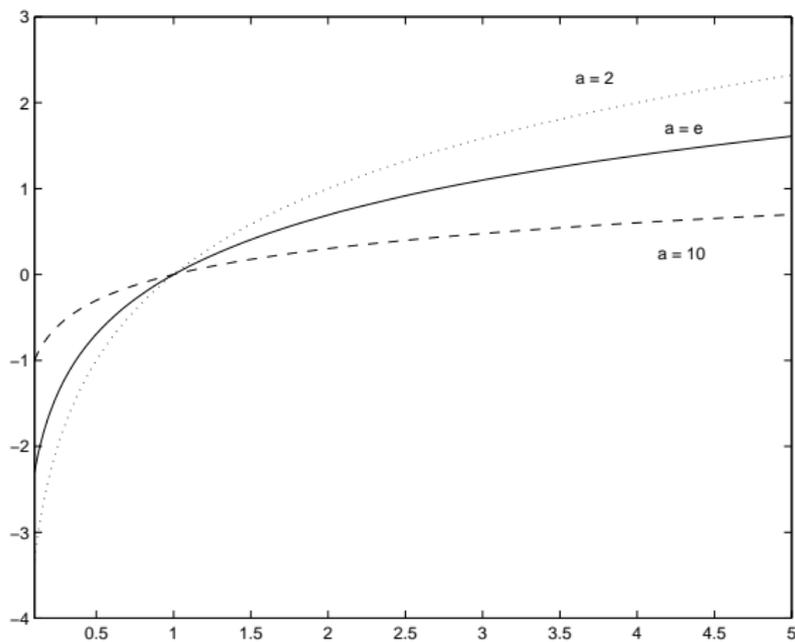


Abbildung: Logarithmus

## Satz (Rechenregeln für den Logarithmus)

Es sei  $a > 0$  und  $a \neq 1$ .

- 1 Für alle  $y \in (0, \infty)$  gilt  $a^{\log_a y} = y$ .
- 2 Für alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt  $\log_a a^x = x$ .
- 3 Die Rechenregeln für die Exponentialfunktion übertragen sich auf die Logarithmusfunktion folgendermaßen: es seien im Folgenden  $x, y > 0$ .
  - 1  $\log_a 1 = 0$ ,
  - 2  $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$ ,
  - 3  $\log_a x^y = y \log_a x$ ,
  - 4  $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$ ,  $y \in \mathbb{R}$
  - 5  $\log_b x = \log_b a \log_a x$ ,  $b > 0, b \neq 1$

Abbildung 35 veranschaulicht die Logarithmusfunktion für die Basen  $a = 2$ ,  $a = e$  und  $a = 10$ .

## Satz (Eigenschaften der Logarithmusfunktion)

- 1  $\log_a$  ist stetig.
- 2  $\log_a$  ist streng monoton wachsend für  $a > 1$ . Ferner gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \log_a x = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = -\infty.$$

- 3 Für  $a > 1$  wächst der Logarithmus langsamer als jede Potenzfunktion. Insbesondere gilt für beliebiges  $\alpha > 0$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^\alpha} \log_a x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \log_a x = 0.$$

## Beispiel

Aus der Definition folgt unmittelbar

$$10^0 = 1 \qquad \log_{10} 1 = 0$$

$$a^0 = 1, \quad a > 0 \qquad \log_a 1 = 0$$

$$10^2 = 100 \qquad \log_{10} 100 = 2$$

$$\frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 2^{-3} \qquad \log_2 \frac{1}{8} = -3$$

$$\sqrt{10} = 10^{1/2} \qquad \log_{10} \sqrt{10} = \frac{1}{2}$$

Logarithmiert man die Identität

$$a^{\log_a y} = y$$

bezüglich einer Basis  $b$ , ergibt sich folgende Umrechnungsformel für Logarithmen

$$\log_b y = \log_b (a^{\log_a y}) = \log_b a \log_a y.$$

Als Beispiel betrachten wir die Umwandlung dekadischer in natürliche Logarithmen ( $b = e$  und  $a = 10$ )

$$\ln y = \ln 10 \log_{10} y.$$

Da der Logarithmus nur sehr langsam wächst, ist er bestens zur Darstellung sehr großer bzw. sehr kleiner Zahlen geeignet:

$$\log_{10} 1 = 0,$$

$$\log_{10} 1000 = 3,$$

$$\log_{10} 10^{10} = 10,$$

$$\log_{10} \frac{1}{1000} = -3,$$

$$\log_{10} 10^{-10} = -10.$$

Eine weitere Anwendung der Logarithmen ergibt sich bei der Auflösung von Exponentialgleichungen.

### Beispiel

Ein radioaktives Isotop zerfalle mit einer Halbwertszeit von 4 sec.  
Man bestimme die charakteristische Zerfallskonstante des Isotops.

## Lösung

Das Gesetz des radioaktiven Zerfalls lautet

$$m(t) = m_0 e^{-\lambda t}, \quad t > 0.$$

Aus  $m(t + 4) = \frac{1}{2}m(t)$  ergibt sich

$$m_0 e^{-\lambda(t+4)} = \frac{1}{2}m_0 e^{-\lambda t},$$

woraus

$$e^{-4\lambda} = \frac{1}{2}$$

folgt.

## Lsg., Fortsetzung

Durch Logarithmieren findet man

$$-4\lambda = \ln \frac{1}{2} = -\ln 2,$$

also

$$\lambda = \frac{1}{4} \ln 2.$$

Logarithmen sind auch hilfreich bei der Entscheidung, ob ein bestimmter Datensatz eher durch ein exponentielles Wachstum

$$y = ae^{bx},$$

oder durch ein Potenzgesetz

$$y = ax^b$$

beschrieben wird.

Logarithmiert man nämlich die beiden Ansätze, ergibt sich

$$\ln y = \ln a + bx, \quad \text{exponentielles Wachstum,} \quad (4.1)$$

$$\ln y = \ln a + b \ln x, \quad \text{Potenzgesetz.} \quad (4.2)$$

Beim exponentiellen Wachstum besteht also ein *linearer* Zusammenhang zwischen  $\ln y$  und  $x$ , beim allometrischen Wachstum hingegen hängt  $\ln y$  *linear* von  $\ln x$  ab. Dies kann sichtbar gemacht werden durch eine **semilogarithmische** bzw. **doppeltlogarithmische** Darstellung der Daten, bei der man  $\ln y$  versus  $x$  bzw.  $\ln x$  aufträgt.

## Beispiel

Gegeben seien die beiden Datensätze

x	0.2	0.6	1.0	1.4	1.8	2.2
y	120.1	73.0	26.3	15.2	9.2	3.3
x	0.11	0.37	0.43	0.69	0.93	1.28
y	6.4	19.2	15.3	24.9	37.3	33.9

Man stelle die Datensätze halb-, bzw. doppelt logarithmisch dar und entscheide, welcher der Datensätze besser durch ein Exponentialgesetz  $y = ce^{\lambda x}$  bzw. ein Potenzgesetz  $y = cx^\lambda$  dargestellt wird. Ferner bestimme man eine Schätzung für  $c$  und  $\lambda$ .

## Lösung

Wir betrachten den ersten Datensatz: im ersten Schritt transformiert man die Daten:

$x$	$y$	$\ln x$	$\ln y$
0.2	120.1	-1.61	4.79
0.6	73.0	-0.51	4.29
1.0	26.3	0	3.27
1.4	15.2	0.34	2.72
1.8	9.2	0.59	2.22
2.2	3.3	0.79	1.19

## Lsg., Fortsetzung I

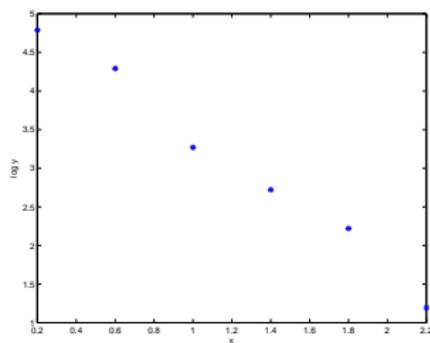


Abbildung: semilogarithmisch

## Lsg., Fortsetzung II

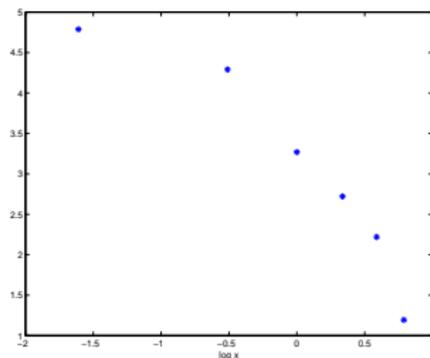


Abbildung: doppeltlogarithmisch

Als nächstes stellt man die transformierten Daten dar. Die Abbildungen 36 und 37 zeigen die semilogarithmische bzw.

## Lsg., Fortsetzung III

doppeltlogarithmische Darstellung des 1. Datensatzes. Da die semilogarithmische Darstellung eher einen linearen Zusammenhang widerspiegelt, wird nahegelegt, daß den Daten ein Exponentialgesetz  $y = ce^{\lambda x}$  zugrunde liegt. Eine Schätzung für die Parameter  $c$  und  $\lambda$  erhält man, indem man durch die transformierten Daten eine **Ausgleichsgerade** legt, d.h. eine Gerade, deren Abweichungen von den Daten sich im Mittel ausgleichen. Dies erfolgt vorerst durch Augenmaß. Abbildung 38 zeigt die transformierten Daten und die Ausgleichsgerade. Da diese die beste Approximation eines transformierten Exponentialgesetzes an die Daten darstellt, wird sie analytisch durch

$$\ln y = \ln c + \lambda x$$

## Lsg., Fortsetzung IV

dargestellt. Die Parameter  $\lambda$  und  $\ln c$  können von der Ausgleichsgeraden abgelesen werden. Ihr Anstieg ergibt  $\lambda$ . Dazu wählen wir 2 Punkte auf der Ausgleichsgeraden (ein transformierter Datenpunkt ist nur zulässig, wenn er *zufällig* auf der Ausgleichsgeraden liegt), hier (man achte auf die unterschiedliche Skalierung der Achsen!)

$$P_1 = (0.4, 4.5)$$

$$P_2 = (2.1, 1.5)$$

und somit

$$\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4.5 - 1.5}{0.4 - 2.1} = -\frac{3}{1.7} = -1.76.$$

## Lsg., Fortsetzung V

Setzt man die Koordinaten etwa von  $P_2$  in die Geradengleichung ein, erhält man

$$\ln c = 1.5 - (-1.76)2.1 = 5.19$$

und somit

$$c = e^{5.19} = 180.5.$$

Der 1. Datensatz ist somit mit dem Exponentialgesetz

$$y = 180.5e^{-1.76x}$$

verträglich.

## Lsg., Fortsetzung VI

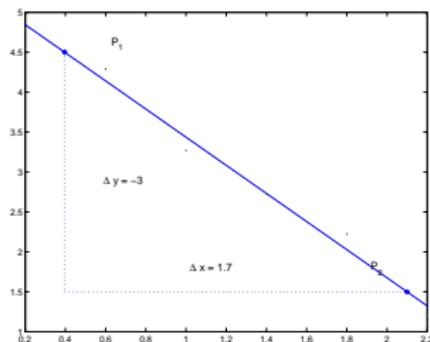


Abbildung: 1. Datensatz

## Lsg., Fortsetzung VII

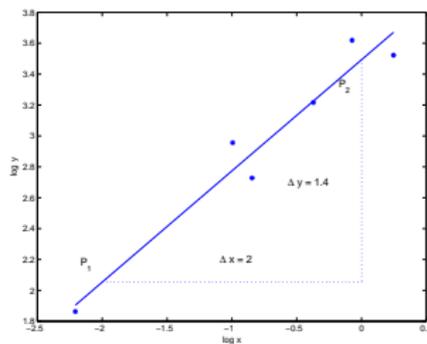


Abbildung: 2. Datensatz

Die Abbildungen 40 und 41 zeigen die semilogarithmische, bzw. doppellogarithmische Darstellungen des 2. Datensatzes, welche auf

## Lsg., Fortsetzung VIII

ein Potenzgesetz schließen lassen. Die entsprechende  
Ausgleichsgerade

$$\ln y = \ln c + \lambda \ln x$$

ist in Abbildung 39 eingetragen. Ihr Anstieg ergibt somit wieder  $\lambda$ .  
Wie vorhin wählen wir 2 Punkte auf der Ausgleichsgeraden, etwa

$$P_1 = (0, 3.5) \qquad P_2 = (-2, 2.1).$$

Dies ergibt

$$\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3.5 - 2.1}{0 - (-2)} = 0.7$$

Da die Gerade die Ordinatenachse schneidet, kann man  $\ln c$  direkt  
ablesen (dies ist auch der Grund für die Wahl von  $P_1$ ):

# Lsg., Fortsetzung IX

$$\ln c = 3.5 \quad \text{also } c = 33.$$

Beim 2. Datensatz kann man somit vom Potenzgesetz

$$y = 33x^{.7}$$

ausgehen.

## Lsg., Fortsetzung X

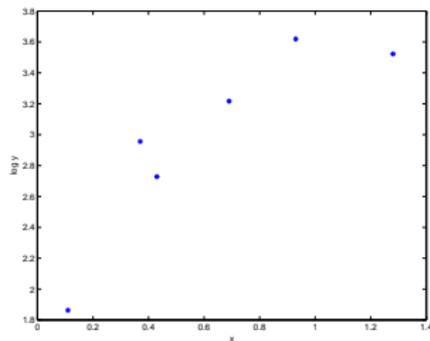


Abbildung: semilogarithmisch

# Lsg., Fortsetzung XI

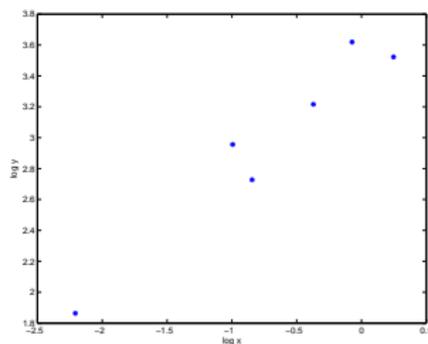


Abbildung: doppeltlogarithmisch

## Definition

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **periodisch** mit Periode  $T > 0$  genau dann, wenn

$$f(t + T) = f(t)$$

für alle  $t \in \mathbb{R}$  gilt

Periodische Vorgänge werden mit Hilfe von **Winkelfunktionen** beschrieben. Wir gehen von der intuitiven Vorstellung eines Winkels aus. Für die Messung der Größe eines Winkels stehen verschiedene Einheiten zur Verfügung: Einerseits kann man den Einheitskreis in 360 gleiche Abschnitte unterteilen. Jedem dieser Abschnitte entspricht ein Winkel von **1 Grad**. Ein Winkel von 1 Grad wird weiter in 60 Minuten, jede Minute in 60 Sekunden unterteilt. Für die Praxis ist damit eine in den meisten Fällen ausreichende Auflösung gegeben.

Schreibweise:  $36^\circ 15' 20''$  entspricht einem Winkel von 36 Grad, 15 Minuten und 20 Sekunden.

Obwohl weit verbreitet, ist diese Einheitenwahl für die Größe eines Winkels für mathematische Anwendungen nicht optimal, da die Unterteilung des Einheitskreises in 360 Abschnitte vollkommen willkürlich ist. Eine andere absolut gleichberechtigte Möglichkeit

wäre die Unterteilung in 400 Abschnitte, bei welcher ein rechter Winkel 100 Grad entspräche. Diese Winkeleinheiten werden **Neugrad** genannt. Natürlicher ist es, die Größe eines Winkels über die Länge des entsprechenden Bogens auf dem Einheitskreis zu messen. Bei dieser Art der Winkelmessung heißt die Einheit **1 Radiant = 1 rad**. Sie ist eine dimensionslose Größe. Die neue Einheit wird fixiert durch die Festlegung, daß einem vollen Umlauf die Bogenlänge  $2\pi$  entspricht. Aus der Definition ergibt sich unmittelbar, daß Bogenmaße (Gradmaße), welche sich um Vielfache von  $2\pi$  ( $360^\circ$ ) unterscheiden, denselben Winkel beschreiben.

$$2\pi \text{ rad} = 360^\circ$$

$$1 \text{ rad} = \left(\frac{360}{2\pi}\right)^\circ$$

$$1^\circ = \frac{2\pi}{360} \text{ rad}$$

Grad	0	30	45	60	90	120	180	270	360
Radiant	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$

Wir fixieren nun im Mittelpunkt des Einheitskreises ein kartesisches Koordinatensystem und ordnen jeder reellen Zahl  $\alpha$  jenen Punkt  $P(\alpha)$  auf dem Einheitskreis zu, dessen Entfernung auf dem Einheitskreis vom Punkt  $(1, 0)$  gemessen entgegen dem (im) Uhrzeigersinn für  $\alpha > 0$  ( $\alpha < 0$ ) gerade  $|\alpha|$  Längeneinheiten beträgt. Die Einheit ist dabei wieder so gewählt, daß der Zahl  $2\pi$  wieder der Ausgangspunkt  $(1, 0)$  entspricht. Schreibt man die kartesischen Koordinaten von  $P(\alpha)$  in der Form  $(\cos \alpha, \sin \alpha)$  ergeben sich die Winkelfunktionen **Kosinus** und **Sinus** naturgemäß als Abbildungen

$$\cos, \sin: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1],$$

vgl. Abbildung 42.

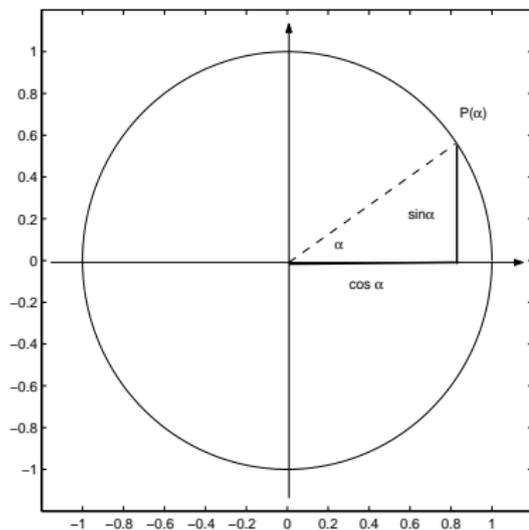


Abbildung:

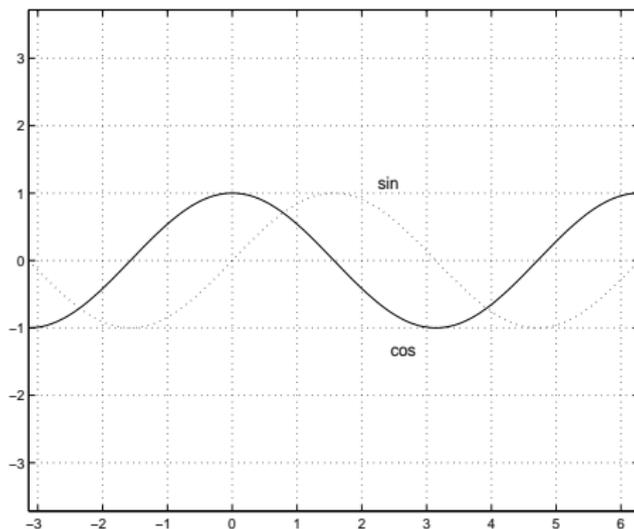


Abbildung:

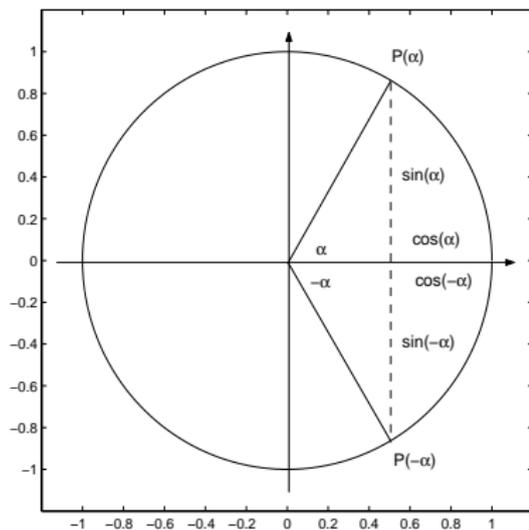


Abbildung:

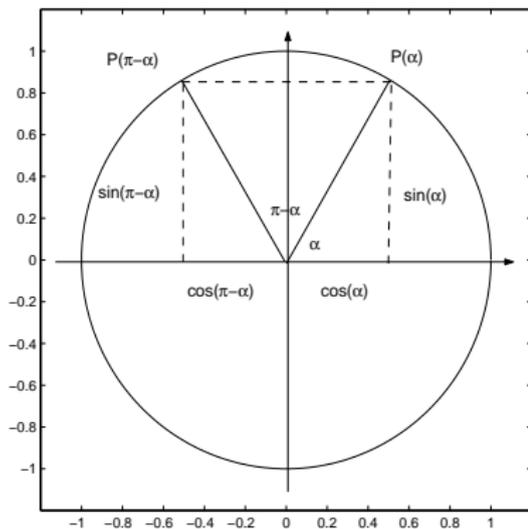


Abbildung:

Aus den Abbildungen 42 – 46 liest man leicht folgende Eigenschaften von Sinus und Kosinus ab:

## Satz

- 1 *Sinus und Kosinus sind  $2\pi$ -periodisch.*
- 2 *Die Nullstellen des Sinus sind  $x_k = k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .*
- 3 *Die Nullstellen des Kosinus sind  $x_k = (2k + 1)\frac{\pi}{2}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .*
- 4 *Für alle Winkel  $\alpha$  gilt:*
  - 1  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ ,
  - 2  $|\sin \alpha| \leq 1$ ,  $|\cos \alpha| \leq 1$ ,
  - 3  $\cos \alpha = \cos(-\alpha)$ ,  $\sin \alpha = -\sin(-\alpha)$ ,
  - 4  $\cos \alpha = -\cos(\pi - \alpha)$ ,  $\sin \alpha = \sin(\pi - \alpha)$ ,
  - 5  $\cos \alpha = -\cos(\pi + \alpha)$ ,  $\sin \alpha = -\sin(\pi + \alpha)$ ,
  - 6  $\cos \alpha = \sin(\frac{\pi}{2} + \alpha)$ ,  $\sin \alpha = -\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha)$

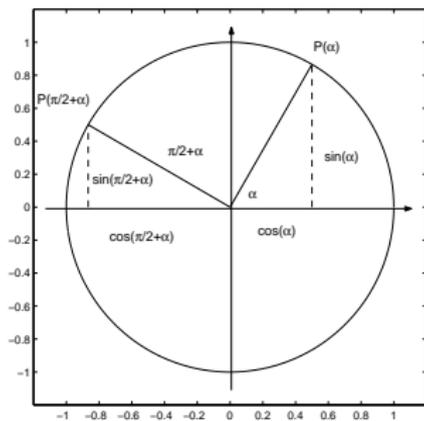


Abbildung:

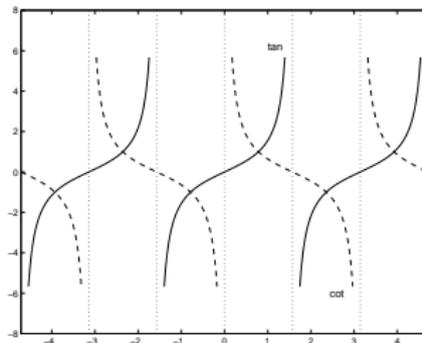


Abbildung:

## Satz (Additionstheorem)

Für alle  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  gilt:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha \pm \beta) &= \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta.\end{aligned}$$

Aus Sinus und Kosinus leiten sich noch folgende Funktionen ab:

## Definition

(Tangens, Kotangens)

### 1 Tangens

$$\tan: \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\} & \rightarrow \mathbb{R} \\ \alpha \mapsto \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \end{cases}$$

### 2 Kotangens

$$\cot: \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{0 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\} & \rightarrow \mathbb{R} \\ \alpha \mapsto \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \end{cases}$$

Es ist also  $\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}$ .

Man beachte aber:

### Satz

*Tangens und Kotangens sind  $\pi$ -periodisch.*

### Beweis.

Es genügt, sich die Behauptung für den Tangens zu überlegen.  
Seine  $\pi$ -Periodizität ergibt sich mit Satz 4.10 aus

$$\tan(\alpha + \pi) = \frac{\sin(\alpha + \pi)}{\cos(\alpha + \pi)} = \frac{-\sin \alpha}{-\cos \alpha} = \tan \alpha.$$



Abbildung 47 zeigt das qualitative Verhalten von Tangens und Kotangens: der Tangens ist im Intervall  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  streng monoton steigend, der Kotangens fällt streng monoton auf  $(0, \pi)$  (wegen der  $\pi$ -Periodizität genügt es das Verhalten der Funktionen auf einem Intervall der Länge  $\pi$  anzugeben).

## Satz

*Sinus, Kosinus, Tangens und Kotangens sind stetige Funktionen.*

Zwischen den trigonometrischen Funktionen und der Geometrie rechtwinkliger Dreiecke besteht ein enger Zusammenhang.

Betrachten wir ein rechtwinkeliges Dreieck mit Hypotenuse  $c$  und den Katheten  $a$  und  $b$ , die Hypotenuse schlieÙe mit der Kathete  $b$  einen Winkel  $\alpha$  ein (man nennt dann  $b$  die Ankathete und  $a$  die Gegenkathete), vgl. Abbildung 48. Der Einheitskreis schneidet die Hypotenuse die Hypotenuse im Punkt  $P(\alpha)$ . Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke  $AQP(\alpha)$  und  $ACB$  ergeben sich die Beziehungen

$$\begin{aligned}c : 1 &= b : \cos \alpha, & \text{also } \cos \alpha &= \frac{b}{c}, \\c : 1 &= a : \sin \alpha, & \text{also } \sin \alpha &= \frac{a}{c}.\end{aligned}$$

Für den Tangens bzw. Kotangens folgt dann

$$\tan \alpha = \frac{a}{b}, \quad \cot \alpha = \frac{b}{a}.$$

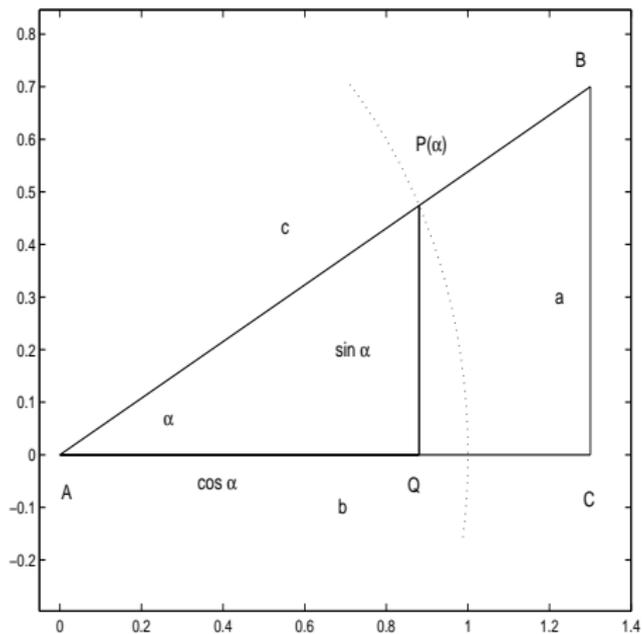


Abbildung:

Aus den Graphen der Winkelfunktionen liest man ab, daß die

	$\sin:$	$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$	
Einschränkungen	$\cos:$	$[0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$	Bijektionen sind und
	$\tan:$	$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$	
	$\cot:$	$(0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$	

daher Umkehrfunktionen, die sogenannten **Arcusfunktionen**, besitzen. Sinus und Tangens sind auf den angegebenen Intervallen streng monoton steigend, Kosinus und Kotangens streng monoton fallend. Nach Satz 3.10 überträgt sich die Monotonie auf die Arcusfunktionen.

## Definition

(Arcusfunktionen)

Arcussinus	$\arcsin$	$[-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ $x = \arcsin y \Leftrightarrow y = \sin x$
Arcuscosinus	$\arccos$	$[-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$ $x = \arccos y \Leftrightarrow y = \cos x$
Arcustangens	$\arctan$	$\mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ $x = \arctan y \Leftrightarrow y = \tan x$
Arcuscotangens	$\operatorname{arccot}$	$\mathbb{R} \rightarrow (0, \pi)$ $x = \operatorname{arccot} y \Leftrightarrow y = \cot x$

Die Abbildungen 49 und 50 veranschaulichen den Zusammenhang zwischen Sinus, Cosinus und Arcussinus bzw. Arcuscosinus, die Abbildungen 51 und 52 stellen Tangens, Cotangens und Arcustangens bzw. Arcuscotangens dar.

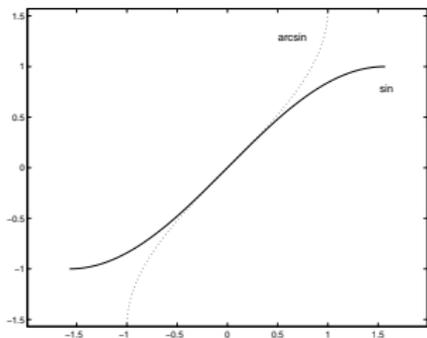


Abbildung:

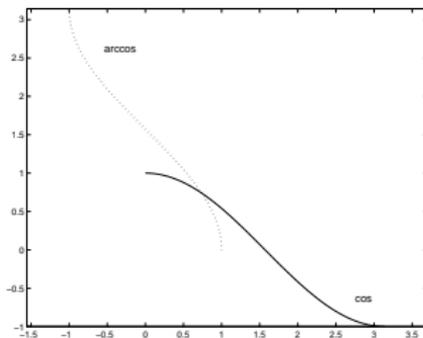


Abbildung:

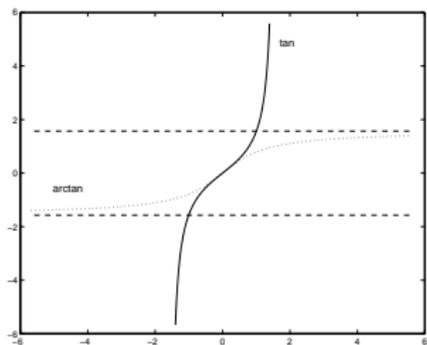


Abbildung:

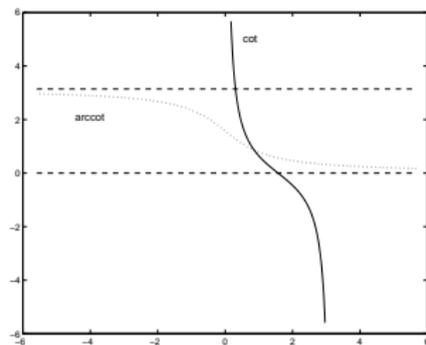


Abbildung:

## Bemerkung

In der Mathematik werden Winkel im Zusammenhang mit den trigonometrischen Funktionen stets im Bogenmaß angegeben. Auf einem Taschenrechner hat man fast immer die Möglichkeit, zwischen verschiedenen Einheiten (Grad, Radiant, Neugrad) zu wählen. Da auf das Rücksetzen der Einheit oft vergessen wird, ist es sinnvoll, beispielsweise die Relation  $\sin \pi = 0$  oder  $\sin 90^\circ = 1$  zu überprüfen.

Ein Punkt in der Ebene ist nicht nur durch seine kartesischen Koordinaten eindeutig festgelegt, sondern auch durch seinen Abstand  $r$  vom Ursprung und dem Polarwinkel  $\varphi$ , das ist der Winkel, gemessen entgegen dem Uhrzeigersinn, zwischen der positiven  $x$ -Achse und der Geraden, welche den Punkt mit dem Ursprung verbindet. Dieser Winkel ist nur bis auf Vielfache von  $2\pi$  eindeutig bestimmt. Meist wählt man  $\varphi \in [0, 2\pi]$ . Man nennt das geordnete Paar  $(r, \varphi)$  **Polarkoordinaten** des Punktes  $(x, y)$ . Aus der Abbildung 53 liest man folgenden Zusammenhang zwischen den Polar- und kartesischen Koordinaten eines Punktes der Ebene ab:

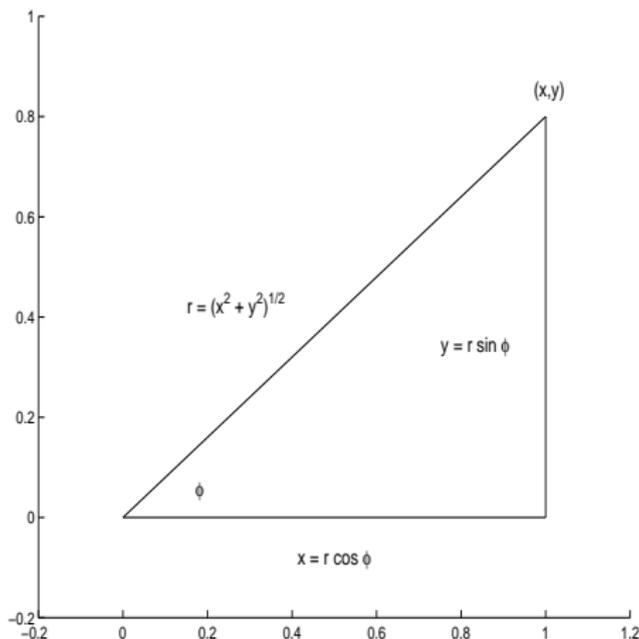
$$x = r \cos \varphi,$$

$$y = r \sin \varphi.$$

Die Berechnung der Polarkoordinaten aus den Kartesischen Koordinaten ist (theoretisch) etwas komplizierter:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},$$
$$\varphi = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x} & x \neq 0, x > 0, \\ \frac{\pi}{2}, & x = 0, y > 0, \\ \arctan \frac{y}{x} + \pi & x < 0, y \neq 0, \\ \frac{3\pi}{2}, & x = 0, y < 0, \\ \arctan \frac{y}{x} + 2\pi, & x > 0, y < 0. \end{cases}$$

In der Praxis ist es jedoch nicht notwendig, die Unterscheidung, in welchem Quadrant der Punkt liegt, selber durchzuführen, da die Konversion von kartesischen auf Polarkoordinaten auf jedem besseren Taschenrechner bereits implementiert ist.



Zahlreiche Schwingungsvorgänge haben einen sinusförmigen Verlauf. Sie können modelliert werden durch

$$f(t) = c + A \sin(\omega t + \phi)$$

mit nicht negativen Konstanten  $A$  und  $\omega$ . Dabei bedeutet

$c$	Mittelwert	
$A$	Amplitude	maximale Schwankung um den Mittelwert
$\omega$	Kreisfrequenz	Anzahl der Perioden in der Zeitspanne $2\pi$
$T = \frac{2\pi}{\omega}$	Periode der Schwingung	
$\nu = \frac{1}{T}$	Frequenz	Anzahl der Perioden pro Zeiteinheit
$\phi$	Phasenverschiebung	

Bei einer Phasenverschiebung von  $\phi$  mißt  $\frac{\phi}{\omega}$  die Zeit, um welche die Schwingung  $f$  der reinen Sinusschwingung  $\sin \omega t$  voraus- bzw. nacheilt.

## Beispiel

Man bestimme die Parameter der Schwingung in Abbildung 54.

## Lösung

In Abbildung 54 ist durchgezogen die Originalschwingung, und punktiert die nicht verschobene Sinusschwingung gleicher Frequenz gezeichnet. Man erkennt, daß die Schwingung um den Mittelwert  $c = 0.8$  erfolgt, die maximale Auslenkung beträgt  $A = 1$ . Zur Bestimmung der Periode  $T$  liest man den Abstand der angedeuteten Nullstellen ab, also

$$T \approx 2.1.$$

Daraus errechnen sich die Frequenz und die Kreisfrequenz

$$\nu = \frac{1}{T} \approx 0.48, \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \approx 3.$$

## Lsg., Fortsetzung I

Zur Bestimmung des Phasenwinkels schreibt man die Schwingung in der Form

$$f(t) = c + A \sin(\omega(t - t_0)),$$

wobei  $t_0$  die erste Nullstelle von  $f$  bezeichnet, welche links oder rechts von  $t = 0$ , der Nullstelle der nicht verschobenen Sinusschwingung, liegt.

## Lsg., Fortsetzung II

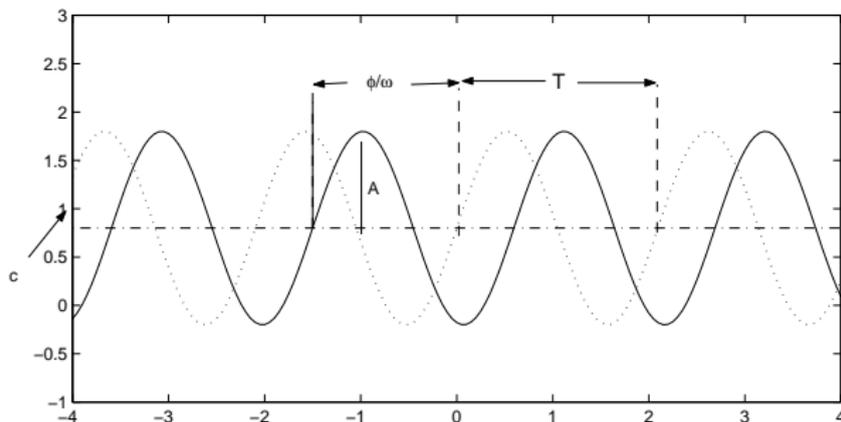


Abbildung:

## Lsg., Fortsetzung III

Man stellt also die Phasenverschiebung in der Form

$$\phi = -\omega t_0$$

dar. Die Schwingung  $f$  hat eine derartige Nullstelle bereits bei  $t = -1.5$ . Daher läuft sie der Sinusfunktion um 1.5 Zeiteinheiten vor. Dies ergibt einen positiven Phasenwinkel (Phasenvorlauf) um

$$\phi \approx -3(-1.5) = 4.5.$$

Man könnte aber auch sagen: Erst zur Zeit  $t_0 = 0.6$  hat  $f$  eine Nullstelle, die sie mit positiver Steigung durchläuft, sie läuft also der Sinusfunktion nach. Dies ergibt einen negativen Phasenwinkel (Phasennachlauf) von

$$\phi = -\omega t_0 \approx -3 \cdot 0.6 = -1.8.$$

## Lsg., Fortsetzung IV

Bogenmaße, die sich um  $2\pi$  unterscheiden, beschreiben aber denselben Winkel. Beachten Sie:  $4.5 - (-1.8) \approx 2\pi$ . Man kann die Schwingung  $f$  also beschreiben durch

$$f(t) = 0.8 + \sin(3t + 4.5),$$

aber auch durch

$$f(t) = 0.8 + \sin(3t - 1.8).$$

Oft verwendet man auch anstelle des Phasenwinkels eine Kombination von Sinus und Cosinus.

### Satz

*Es gilt*

$$A \sin(\omega t + \phi) = p \sin(\omega t) + q \cos(\omega t)$$

*mit*

$$p = A \cos(\phi), \quad q = A \sin(\phi)$$

*Umgekehrt ist*

$$A = \sqrt{p^2 + q^2}$$

*(Die Bestimmung des Phasenwinkels ist etwas komplizierter).*

Natürlich sind nicht alle Schwingungsvorgänge reine Sinus-schwingungen. Man kann allerdings zeigen, daß sich alle Funktionen von praktischer Bedeutung durch Überlagerung von passenden Sinus-schwingungen aufbauen lassen. Als Beispiel gehen wir von einer Rechteckfunktion  $f$  mit der Frequenz und Amplitude 1 aus. In der Graphik 55 sieht man die Funktionen

$$f = \frac{4}{\pi} \sin(2\pi t) + \frac{4}{3\pi} \sin(6\pi t)$$

durchgezogen  
strichpunktiiert  
strichliert  
punktiert.

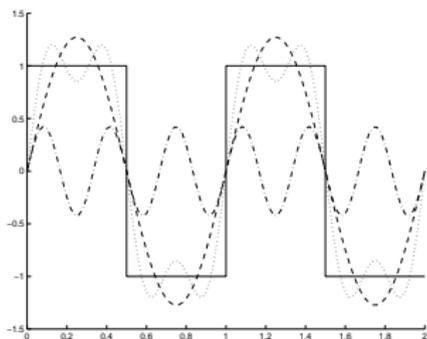


Abbildung:

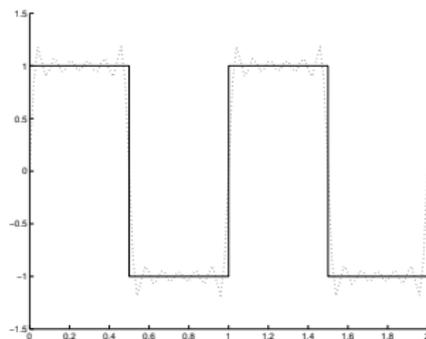


Abbildung:

Wir sehen, daß die Sinusfunktion  $\sin(2\pi t)$  dieselbe Frequenz wie die Rechteckschwingung hat, aber die Rechteckform nur sehr schlecht wiedergibt. Durch Überlagerung einer Sinusschwingung mit der dreifachen Frequenz ergibt sich eine periodische Funktion, die sich dem Rechteck deutlich besser angleicht. Die zweite Graphik entsteht, wenn man die Oberwellen mit der 5-fachen bis 11-fachen Frequenz hinzunimmt. Man wird daher vermuten, daß die Anpassung umso besser ist, je mehr Sinusschwingungen überlagert werden.

Wir beobachten ein Autorennen auf der Geraden nach der Startlinie des Österreichringes. Zur Zeit  $t = t_0$  befindet sich ein bestimmter Bolide auf der Start/Ziellinie, dem Ursprung unseres Koordinatensystems.

Bezeichnet man mit  $x(t)$  den Abstand des Boliden von der Start/Ziellinie zur Zeit  $t$ , also  $x(t_0) = 0$ , dann ist

$$v(t, t_0) = \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}$$

die **mittlere Geschwindigkeit** des Boliden im Zeitintervall  $[t_0, t]$ , also jene *konstante* Geschwindigkeit, die der Fahrer während dieser Zeitspanne hätte einhalten müssen, um in derselben Zeit von  $x(t_0)$  nach  $x(t)$  zu gelangen. Natürlich wird  $v(t, t_0)$  i.A. nicht mit der Anzeige des Tachometers im Boliden zur Zeit  $t$  übereinstimmen. Verkleinert man allerdings den Beobachtungszeitraum, wird der Unterschied zwischen der Geschwindigkeitsanzeige am Tachometer und  $v(t, t_0)$  immer kleiner. Idealisiert man immer weiter und

betrachtet den Grenzfall  $\lim_{t \rightarrow t_0}$  ergibt sich die **Momentangeschwindigkeit**  $v(t)$  des Boliden:

$$v(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} v(t, t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}.$$

Allgemein bezeichnet man den Quotienten

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

**mittlere Änderungsrate** von  $f$  im Intervall  $[x_0, x]$  (bzw.  $[x, x_0]$ ) und den Grenzfall

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

**momentane Änderungsrate** von  $f$  in  $x_0$ . Um in der mathematischen Sprechweise unabhängig von der jeweiligen Anwendung zu sein, nennt man die mittlere Änderungsrate von  $f$

**Differenzenquotient.** Geometrisch bedeutet der Differenzenquotient den Anstieg der Sekante durch die Punkte  $(x, f(x))$  und  $(x_0, f(x_0))$  des Graphen von  $f$ , vgl. Abbildung 57.

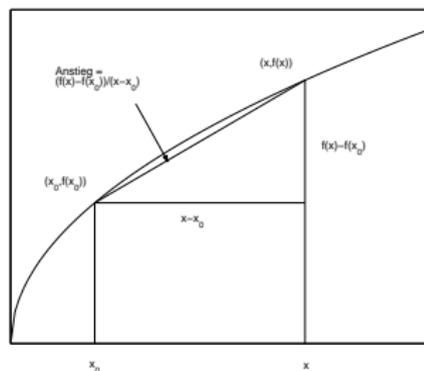


Abbildung:

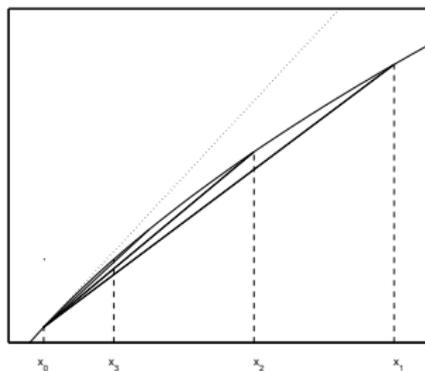


Abbildung: 

## Definition (Differenzierbarkeit)

- 1 Eine Abbildung  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall, heißt **differenzierbar** in  $x_0 \in I$  genau dann, wenn

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert. Der Wert dieses Grenzwertes wird meist  $f'(x_0)$  bzw.  $\frac{df}{dx}(x_0)$  geschrieben und heißt **Wert der Ableitung von  $f$  an der Stelle  $x_0$** .

- 2  $f$  heißt differenzierbar auf  $I$ , wenn  $f$  in allen  $x \in I$  differenzierbar ist.
- 3 Die Abbildung

$$f': \begin{cases} I \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f'(x) \end{cases}$$

heißt **Ableitung** von  $f$ .

Geometrisch kann man sich die Differenzierbarkeitsbedingung dadurch veranschaulichen, daß die Sekanten durch die Punkte  $(x, f(x))$  und  $(x_0, f(x_0))$  für  $x \rightarrow x_0$  einer Grenzlage zustreben, vgl. Abbildung 58. Die Grenzgerade heißt **Tangente** an den Graphen von  $f$  in  $(x_0, f(x_0))$ , der Anstieg der Tangente ist gerade  $f'(x_0)$ . Die Gleichung der Tangente ist demnach gegeben durch

$$p(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Offensichtlich stellt die Tangente zumindest in einer hinreichend kleinen Umgebung von  $x_0$  eine ausgezeichnete Approximation von  $f$  dar: Für den Approximationsfehler  $f(x) - p(x)$  ergibt sich nämlich

$$\begin{aligned} f(x) - p(x) &= f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) \\ &= \left( \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right) (x - x_0) \end{aligned}$$

Aus der Differenzierbarkeit von  $f$  an der Stelle  $x_0$  folgt nun

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - p(x)}{x - x_0} = 0.$$

Die Approximation ist also so gut, daß man den Approximationsfehler sogar noch durch die *kleine* Größe  $x - x_0$  dividieren kann, also sogar die mittlere Änderungsrate des Approximationsfehlers

$$\frac{(f - p)(x) - (f - p)(x_0)}{x - x_0}$$

für  $x \rightarrow x_0$  nach Null strebt, vgl. Abbildung 59.

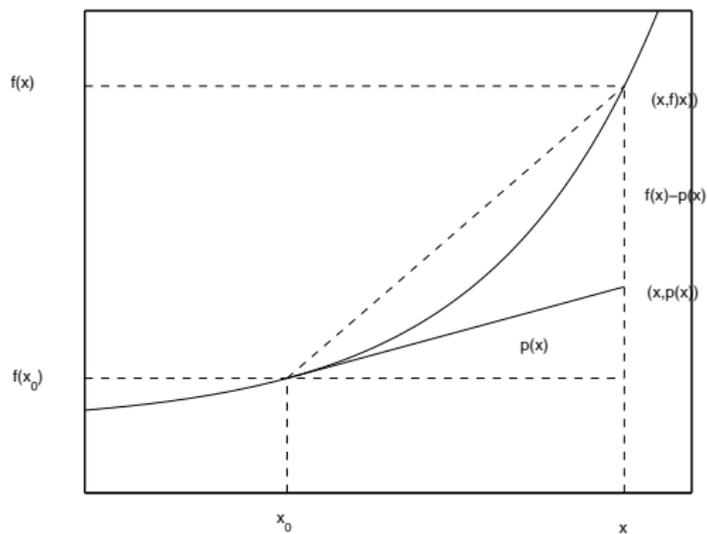


Abbildung:

## Beispiel

Wir zeigen mit Hilfe der Definition  $f'(x) = 3x^2$  für  $f(x) = x^3$ .

## Lösung

Wir berechnen die Ableitung an einer beliebigen Stelle  $x_0 \in \mathbb{R}$ :

$$f(x) - f(x_0) = x^3 - x_0^3 = (x^2 + xx_0 + x_0^2)(x - x_0)$$

und daher

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} (x^2 + xx_0 + x_0^2) = 3x_0^2.$$

## Satz

*Eine in  $x_0$  differenzierbare Abbildung ist an der Stelle  $x_0$  stetig.*

Differenzierbarkeit ist also eine stärkere Forderung an eine Abbildung als Stetigkeit. Daß die Stetigkeit einer Abbildung allein nicht ausreicht, die Differenzierbarkeit zu garantieren, zeigt folgendes einfache Beispiel.

## Beispiel

Die Funktion  $f(x) = |x|$  ist in  $x_0 = 0$  *nicht differenzierbar*.

## Lösung

Wegen

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{|x| - 0}{x - 0} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{x}{x} = 1 \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{|x| - 0}{x - 0} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{-x}{x} = -1$$

existiert der Grenzwert des Differenzenquotienten nicht.

In Tabelle 2 sind die Ableitungen gängiger Funktionen zusammengestellt:

$f(x)$	$f'(x)$
$x^\alpha$	$\alpha x^{\alpha-1}$
$e^x$	$e^x$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\frac{1}{(\cos x)^2}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$e^{\alpha x}$	$\alpha e^{\alpha x}$
$a^x, a > 0$	$a^x \ln a$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$

## Satz

$f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$  seien differenzierbar in  $x_0$ . Dann gilt

- 1  $f \pm g$  ist in  $x_0$  differenzierbar mit  
 $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$ .
- 2 Für alle  $\lambda \in \mathbb{R}$  ist  $\lambda f$  in  $x_0$  differenzierbar mit  
 $(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0)$ .
- 3 (Produktregel)  $f \cdot g$  ist in  $x_0$  differenzierbar mit  
 $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$ .
- 4 (Quotientenregel) Ist  $g(x_0) \neq 0$ , so ist  $\frac{f}{g}$  in  $x_0$  differenzierbar mit  
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - g'(x_0)f(x_0)}{g(x_0)^2}$$
.

## Korollar

*Polynomfunktionen und rationale Funktionen sind differenzierbar.*

## Beispiel

Zur Illustration dieser Regeln berechnen wir die Ableitung von

$$f(x) = \frac{x^3 \sin x}{1+x^2}.$$

## Lösung

Offensichtlich ist  $f$  differenzierbar: Nach der Produktregel definiert der Zähler eine differenzierbare Funktion, der Nenner ist ein Polynom, also differenzierbar, die Quotientenregel garantiert nun die Differenzierbarkeit von  $f$ . Wir wenden zuerst die Quotientenregel an und erhalten

$$f'(x) = \frac{\frac{d(x^3 \sin x)}{dx}(1+x^2) - x^3 \sin x \frac{d(1+x^2)}{dx}}{(1+x^2)^2}$$

Mit Hilfe der Produktregel und Tabelle 2 findet man

$$\frac{d(x^3 \sin x)}{dx} = \frac{dx^3}{dx} \sin x + x^3 \frac{d \sin x}{dx} = 3x^2 \sin x + x^3 \cos x.$$

Insgesamt erhält man

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(3x^2 \sin x + x^3 \cos x)(1+x^2) - x^3 \sin x(2x)}{(1+x^2)^2} = \\ &= \frac{(3x^2 - x^4) \sin x + (x^3 + x^5) \cos x}{(1+x^2)^2}. \end{aligned}$$

Dieses Regelwerk reicht allerdings noch nicht aus, um kompliziertere Funktionen wie z.B.  $f(x) = \sin(x^3)$  ohne Rückgriff auf die Definition zu differenzieren.

### Satz (Kettenregel)

*Es seien  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g: J \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbare Funktionen. Ferner gelte die Verknüpfungsbedingung  $J \supset f(I)$ . Dann ist auch die zusammengesetzte Funktion  $g \circ f: I \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar. Ihre Ableitung ist für alle  $x \in I$  gegeben durch*

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x)$$

Zusammengesetzte Funktionen werden also folgendermaßen differenziert: Zuerst differenziert man die äußere Funktion  $g$  so, als ob es die innere Funktion  $f$  nicht gäbe, wertet die Ableitung  $g'$  an der Stelle  $f(x)$  aus und multipliziert schließlich mit dem Wert der Ableitung  $f'(x)$ .

## Beispiel

Man differenziere  $h(x) = \sin(x^3)$ .

## Lösung

$h(x) = \sin(x^3)$  kann als Komposition  $g \circ f$  der Funktionen  $g: x \mapsto \sin x$ ,  $f: x \mapsto x^3$  aufgefaßt werden. Die Ableitung von  $g$  ist  $\cos$ , ausgewertet in  $f(x) = x^3$  ergibt  $g'(x^3) = \cos x^3$ . Dies muß noch mit der inneren Ableitung  $f'(x) = 3x^2$  multipliziert werden. Insgesamt erhält man somit  $h'(x) = 3x^2 \cos(x^3)$ .

Noch sind wir allerdings nicht in der Lage, die Ableitung der Logarithmusfunktion oder der Arcusfunktionen zu berechnen. Dazu benötigen wir:

### Satz

*$f: I \rightarrow \mathbb{R}$  sei streng monoton (somit existiert die Umkehrfunktion  $f^{-1}$ ) und differenzierbar in  $x_0 \in I$ . Ferner sei  $f'(x_0) \neq 0$ . Dann ist auch die Umkehrfunktion an der Stelle  $y_0 = f(x_0)$  differenzierbar und es gilt*

$$f^{-1}'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}, \quad \text{bzw. } f^{-1}'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

## Beispiel

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}.$$

## Lösung

Die Logarithmusfunktion ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion  $f(x) = e^x$ , also  $f^{-1}(y) = \ln y$ . Wegen  $f'(x) = e^x > 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  ist nach Satz 5.4  $\ln$  differenzierbar. Die Ableitung ergibt sich nach

$$\frac{d}{dy} \ln(y) = \frac{1}{e^{\ln y}} = \frac{1}{y}.$$

(Man beachte:  $f'(x) = e^x$ ,  $f'(f^{-1}(y)) = f'(\ln y) = e^{\ln y}$ ).

## Satz (Mittelwertsatz)

*Es sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und differenzierbar auf  $(a, b)$ . Dann gibt es eine Zwischenstelle  $\xi \in (a, b)$  mit*

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a).$$

Geometrisch bedeutet dieser Satz, daß es im Intervall  $(a, b)$  eine Stelle  $\xi$  gibt, an der die Sekante durch die Punkte  $(a, f(a))$  und  $(b, f(b))$  des Graphen von  $f$  parallel ist zur Tangente an den Graph im Punkt  $(\xi, f(\xi))$ , vgl. Abbildung 60.

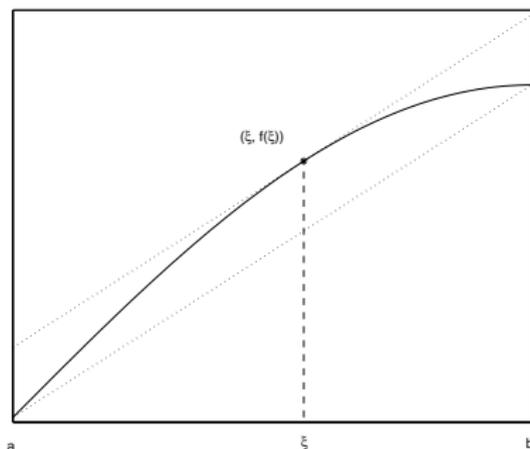


Abbildung:

Folgende Konsequenz aus dem Mittelwertsatz ist oft hilfreich bei der Berechnung von Grenzwerten:

### Satz (Regel von L'Hospital)

Es seien  $f, g: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbare Funktionen und  $g'(x) \neq 0$  auf  $(a, b)$ . Ferner existiere

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A.$$

Gilt

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0, \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0,$$

oder

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty, \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty,$$

dann folgt

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = A.$$

Ein analoges Resultat trifft natürlich auch für  $x \rightarrow b$  zu.

Dieses Ergebnis besagt, daß man unter bestimmten Voraussetzungen Grenzwerte vom Typ  $\frac{f(x)}{g(x)}$ , welche auf die unbestimmten Formen  $\frac{0}{0}$  oder  $\frac{\infty}{\infty}$  führen, durch separates Differenzieren von Zähler und Nenner berechnen kann:

### Beispiel

Man verifiziere die Grenzwerte

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$$

## Lösung

Wendet man die Regel von L'Hospital auf die ersten beiden Grenzwerte an (die Voraussetzungen sind erfüllt), findet man

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1,$$
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{1} = 0.$$

Der dritte Grenzwert führt auf einen unbestimmten Ausdruck der Form  $0 \cdot \infty$ , sodaß die Regel von L'Hospital vorerst nicht anwendbar ist. Eine einfache Umformung bringt uns aber in den Gültigkeitsbereich dieser Regel zurück, nämlich

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0.$$

Eine weitere einfache Anwendung des Mittelwertsatzes ist der Zusammenhang zwischen Monotonie und erster Ableitung:

### Satz

Die Abbildung  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  sei differenzierbar und es gelte  $f'(x) \geq 0$  ( $f'(x) > 0$ ) für alle  $x \in [a, b]$ . Dann ist  $f$  (streng) monoton wachsend auf  $[a, b]$ . Gilt  $f'(x) \leq 0$  ( $f'(x) < 0$ ) für alle  $x \in [a, b]$ , dann ist  $f$  (streng) monoton fallend auf  $[a, b]$ .

Dies ist unmittelbar einsichtig: wählt man  $a \leq x < y \leq b$  folgt mit Hilfe des Mittelwertsatzes für ein  $\xi \in (x, y)$

$$f(y) - f(x) = \underbrace{f'(\xi)}_{\geq 0} \underbrace{(y - x)}_{> 0} \geq 0 \quad (> 0).$$

### Korollar

Gilt  $f'(x) = 0$  für alle  $x \in [a, b]$ , dann ist  $f$  auf  $[a, b]$  konstant.

In Definition 3.3 wurde der Begriff der lokalen Extrema eingeführt, es wurde aber noch kein Verfahren angegeben, wie man jene Stellen findet, an denen lokale Extrema auftreten können. Bei differenzierbaren Funktionen gibt es eine systematische Lösung:

### Satz

*Die Abbildung  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  sei differenzierbar und besitze in  $x_0 \in (a, b)$  ein lokales Extremum. Dann ist notwendigerweise  $f'(x_0) = 0$ .*

Dieser Satz zeigt, daß *innere* lokale Extrema einer differenzierbaren Funktion unter den Nullstellen der 1. Ableitung (und nur dort) zu finden sind. Aber nicht jede Nullstelle der 1. Ableitung führt zu einem lokalen Extremum: man betrachte etwa  $f(x) = x^3$ . Der Satz gibt auch keine Auskunft über die Natur der Randpunkte! Für das Aufsuchen der lokalen Extrema einer Funktion ist daher folgende Vorgangsweise zweckmäßig:

- Aufsuchen der Nullstellen von  $f'$ .
- Untersuchen der Randpunkte des Definitionsbereiches.
- Untersuchung jener Stellen, an denen  $f$  nicht differenzierbar ist.

Für die letzten beiden Punkte gibt es kein allgemeingültiges Rezept.

Der Charakter einer Nullstelle von  $f'$ , man nennt diese Stellen auch **kritische** Stellen von  $f$ , läßt sich meist aus dem Vorzeichen der ersten Ableitung ablesen: Liegt in  $x_0$  z.B. ein lokales Maximum vor, wird ja zumindest in einer Umgebung von  $x_0$  die Funktion links von  $x_0$  wachsen und rechts davon fallen, d.h für  $x < x_0$  hinreichend nahe bei  $x_0$  gilt  $f'(x) \geq 0$ , für  $x > x_0$  hinreichend nahe bei  $x_0$  gilt  $f'(x) \leq 0$ , vgl. die Abbildungen 62 und 61.

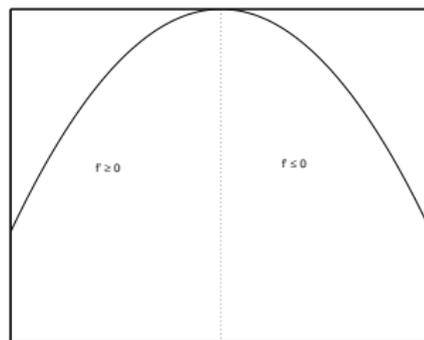
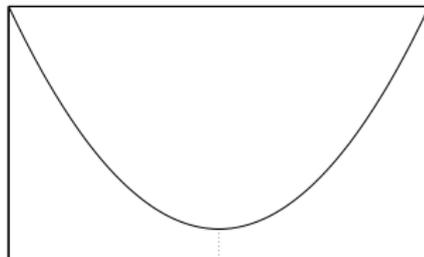


Abbildung:



## Satz

$f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  sei differenzierbar und es gelte  $f'(x_0) = 0$  in  $x_0 \in (a, b)$ .

① Gilt

$$f'(x) \geq 0 \quad x \in (x_0 - \delta, x_0)$$

$$f'(x) \leq 0 \quad x \in (x_0, x_0 + \delta)$$

für ein  $\delta > 0$ , dann liegt in  $x_0$  ein lokales Maximum vor.

② Gilt

$$f'(x) \leq 0 \quad x \in (x_0 - \delta, x_0)$$

$$f'(x) \geq 0 \quad x \in (x_0, x_0 + \delta)$$

## Beispiel

Die Abhängigkeit der Photosyntheserate  $P$  von der Lichtintensität  $I$  kann bei aquatischen Algen durch die Gleichung

$$P(I) = \frac{P_m}{I_m} I e^{1 - \frac{I}{I_m}}$$

beschrieben werden, in der  $P_m$  und  $I_m$  positive Konstante sind und  $I \geq 0$  ist. Man zeige, daß die Photosyntheserate an der Stelle  $I = I_m$  das lokale Maximum  $P(I_m) = P_m$  besitzt.

## Lösung

Die Photosyntheserate wird durch eine differenzierbare Funktion beschrieben. Somit finden sich alle lokalen Extrema in  $(0, \infty)$  unter den Nullstellen von  $P'(I)$ . Da  $P(I) \geq 0$  für alle  $I \geq 0$  und  $P(I) > 0$  für  $I > 0$  gilt, wird in  $I = 0$  das globale Minimum angenommen. Bildet man die Ableitung von  $P$ , findet man

$$P'(I) = \frac{P_m}{I_m} \left(1 - \frac{I}{I_m}\right) e^{1 - \frac{I}{I_m}}.$$

## Lsg., Fortsetzung

Da stets  $e^z > 0$ ,  $z \in \mathbb{R}$ , gilt, ist  $P'(I) = 0$  gleichbedeutend mit

$$1 - \frac{I}{I_m} = 0, \quad \text{also} \quad I = I_m.$$

Das Vorzeichen von  $P'(I)$  ist gleich dem Vorzeichen von  $1 - \frac{I}{I_m}$ .  
Daraus liest man ab,

$$P'(I) > 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{I}{I_m} > 0 \Leftrightarrow \frac{I}{I_m} < 1 \Leftrightarrow I < I_m,$$

$$P'(I) < 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{I}{I_m} < 0 \Leftrightarrow \frac{I}{I_m} > 1 \Leftrightarrow I > I_m.$$

### Lsg., Fortsetzung

An der Stelle  $I_m$  liegt also ein lokales Maximum vor. Da aber  $P$  in  $(0, \infty)$  kein weiteres lokales Extremum annehmen kann,  $P'$  besitzt ja nur eine Nullstelle, und  $P(0) = 0$  gilt, wird in  $I = I_m$  sogar das globale Maximum angenommen. Dies hätte auch aus  $\lim_{I \rightarrow \infty} P(I) = 0$ ,  $P(0) = 0$  und  $P(I) > 0$  gefolgert werden können. Eine einfache Rechnung ergibt nun

$$P(I_m) = P_m.$$

Das Newton Verfahren ist ein sehr effizienter Algorithmus zur Bestimmung einer Nullstelle einer differenzierbaren Funktion. Ausgangspunkt ist die Beobachtung, daß in einer Umgebung einer Stelle  $x = x_0$  die Tangente

$$p(x) = f'(x)(x - x_0) + f(x_0)$$

eine gute Näherung von  $f$  darstellt. Wenn also  $x_0$  nahe genug an der gesuchten Nullstelle  $\xi$  ist, liegt es nahe,  $\xi$  durch die Nullstelle  $x_1$  von  $p$  zu approximieren, vgl. Abbildung 63.

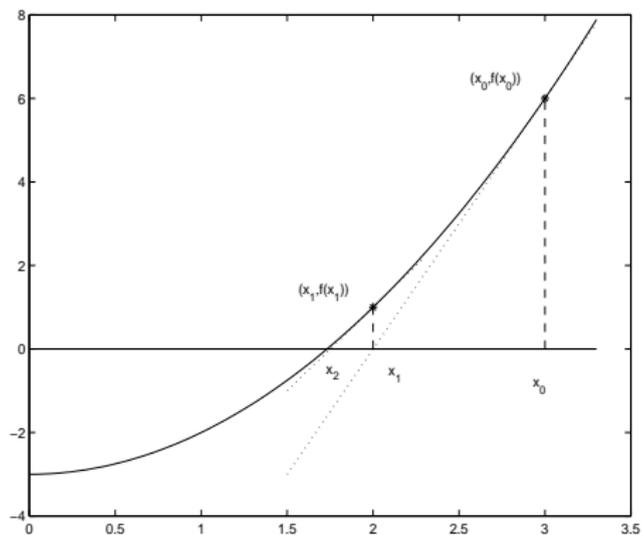


Abbildung: Das Newton Verfahren

Eine einfache Rechnung ergibt  $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ . Legt man die Tangente in  $(x_1, f(x_1))$ , kann man wieder die Nullstelle der Tangentengleichung berechnen, usw. Ausgehend von einem Startwert  $x_0$  konstruiert man eine Folge von Approximationen

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Man kann nun zeigen, daß unter bestimmten Voraussetzungen die Newtonfolge sehr rasch gegen die Nullstelle  $\xi$  von  $f$  konvergiert. Es gilt nämlich mit einer Konstanten  $K > 0$

$$|x_{n+1} - \xi| \leq K(x_{n+1} - x_n)^2,$$

der Approximationsfehler ist also durch das Quadrat der Differenz aufeinanderfolgender Approximationen beschränkt. Man nennt dies **quadratische Konvergenz**. Es genügen daher meist schon wenige

Iterationsschritte, um eine ausreichende Genauigkeit zu erzielen.

Man kann beispielsweise die Iteration abbrechen, wenn

$|x_{n+1} - x_n| \leq \varepsilon$  für ein gegebenes  $\varepsilon > 0$  eintritt.

Wegen der quadratischen Konvergenz und seiner einfachen Implementierung ist das Newtonverfahren sehr populär. Man sollte bei seiner Anwendung allerdings immer daran denken, daß die Konvergenz des Verfahrens nur für Startwerte gesichert werden kann, welche hinreichend nahe an der gesuchten Nullstelle liegen. Darüber hinaus muß in jedem Iterationsschritt nicht nur  $f$  sondern auch  $f'$  ausgewertet werden (dies kann schwierig sein bei Funktionen, welche etwa nur in tabellierter Form vorliegen).

## Beispiel

Zur Illustration des Newton Verfahrens bestimmen wir die positive Lösung der Gleichung  $x^2 = 3$ , d.h.  $\xi = \sqrt{3} = 1.73205080756888$ .

## Lösung (Lösung)

Wir suchen die positive Nullstelle der Funktion  $f(x) = x^2 - 3$ . Die Iterationsvorschrift lautet also

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 3}{2x_n}.$$

Tabelle 3 faßt die relevanten Rechenschritte zusammen und illustriert die quadratische Konvergenz (Werte zum Teil gerundet).

$x_n$	$f(x_n)$	$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$	$\frac{x_{n+1}-\xi}{(x_{n+1}-x_n)^2}$	$ x_n - \xi $
3.00000	6.00000	1.00000	1.2680	
2.00000	1.00000	0.25000	0.2680	
1.75000	0.06250	0.01786	0.25	0.0179
1.73214285714286	0.00032	0.00009	0.2857	0.00009
1.73205081001473	$8.0 \cdot 10^{-9}$	$2.4 \cdot 10^{-9}$	0.2887	$2.4 \cdot 10^{-9}$
1.73205080756888	-0.0	-0.0	0.2887	0

Tabelle: Newton

Trotz des schlechten Startwertes, wird bereits nach 5 Iterationen  $\sqrt{3}$  exakt bis auf Maschinengenauigkeit angegeben.

Man kann natürlich auch die Differenzierbarkeit der Ableitung einer Funktion untersuchen:

### Definition

Die Abbildung  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  sei differenzierbar und  $x_0 \in I$ . Ist  $f': I \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar in  $x_0$ , nennt man

$$f''(x_0) = (f')'(x_0)$$

Wert der 2. Ableitung von  $f$  an der Stelle  $x_0$ .  $f$  heißt zweimal differenzierbar, wenn in jedem Punkt  $x \in I$  die 2. Ableitung existiert. Analog definiert man höhere Ableitungen:

$$f^{(k)}(x_0) = (f^{(k-1)})'(x_0).$$

Besitzt  $f$  alle Ableitungen  $f^{(k)}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , auf  $I$ , nennt man  $f$  eine  $C^\infty$ -Funktion.

## Beispiel

- 1  $f(x) = e^x, f^{(k)}(x) = e^x, k \in \mathbb{N}.$
- 2  $f(x) = \sin x, f'(x) = \cos x, f''(x) = -\sin x,$   
 $f'''(x) = -\cos x, f^{(4)}(x) = \sin x, \dots.$
- 3  $f(x) = x^3, f'(x) = 3x^2, f''(x) = 3 \cdot 2x, f'''(x) = 3!,$   
 $f^{(4)}(x) = 0.$

Wir erinnern daran, daß das Monotonieverhalten einer differenzierbaren Funktion aus dem Vorzeichen der 1. Ableitung abgelesen werden kann, vgl. Satz 5.7. Die Krümmung einer zweimal differenzierbaren Funktion erkennt man an der 2. Ableitung: Gilt nämlich  $f''(x) \geq 0$  für alle  $x$  aus einem Intervall  $I$ , dann ist nach 5.7  $f'$  monoton steigend, d.h. der Anstieg der Tangente an den Funktionsgraph ist monoton wachsend, der Funktionsgraph ist nach oben gekrümmt. Man sagt, die Funktion  $f$  ist auf  $I$  **konvex**. Gilt andererseits  $f''(x) \leq 0$  für alle  $x \in I$ , dann ist  $f'$  monoton fallend auf  $I$  und der Funktionsgraph nach unten gekrümmt. In diesem Falle nennt man die Funktion  $f$  **konkav** auf  $I$ . Stellen, an denen die Konvexität in Konkavität umschlägt, nennt man **Wendpunkte** der Funktion. Die Wendpunkte einer Funktion findet man also unter den Nullstellen der zweiten Ableitung.

## Beispiel

Betrachten wir noch einmal die Differentialgleichung des logistischen Wachstums (1.14)

$$\dot{P}(t) = \lambda P(t)(K - P(t)). \quad (5.1)$$

Es wurde bereits im 1. Abschnitt angedeutet, wie man qualitative Aussagen über das Verhalten der Lösungen dieser Gleichung erhalten kann, ohne die Gleichung lösen zu müssen. Wir können nun diese Diskussion genauer begründen:

## Lösung

Aus der Differentialgleichung liest man ab

$$\begin{aligned}\dot{P}(t) &> 0 && \text{solange } P(t) < K \\ \dot{P}(t) &< 0 && \text{solange } P(t) > K \\ \dot{P}(t) &= 0 && \text{solange } P(t) = K.\end{aligned}\tag{5.2}$$

## Lsg., Fortsetzung I

Nach Satz 5.7 ist die Populationsgröße  $P$  daher solange (streng) monoton steigend, solange sie kleiner als der kritische Wert  $P_0 = K$  ist, gilt während eines Zeitintervalles  $P(t) > K$ , dann ist  $P$  während dieser Zeit streng monoton fallend. Da die Ableitung einer konstanten Funktion die Nullfunktion ist, löst  $P(t) \equiv K$  die Differentialgleichung. Die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen lehrt, daß unter bestimmten Voraussetzungen die Lösung einer Differentialgleichung durch ihren Wert zu einem bestimmten Zeitpunkt  $t = t_0$  bereits eindeutig festgelegt ist. Da also  $P(t) \equiv K$  eine Lösung der Differentialgleichung ist, kann es keine weitere Lösung geben, welche zu irgendeinem Zeitpunkt den Wert  $P(t) = K$  annimmt. Mit anderen Worten: Ist zu irgendeinem Zeitpunkt  $P(t) < 0$  ( $P(t) > 0$ ), dann bleibt die Populationsgröße stets kleiner (größer)

## Lsg., Fortsetzung II

als  $K$ . Man kann noch mehr Einblick in die Dynamik der Population gewinnen, wenn man die zweite Ableitung berechnet. Differenziert man die Differentialgleichung (dies ist gerechtfertigt, da die rechte Seite eine differenzierbare Funktion ist) erhält man

$$\ddot{P}(t) = \lambda \dot{P}(t)(K - 2P(t)).$$

Es sei  $P(t_0) = P_0 \neq K$ , dann ist nach den vorangehenden Ausführungen  $P(t) \neq K$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ . Eine Nullstelle der 2. Ableitung tritt daher genau zu jenem Zeitpunkt  $t = t^*$  auf, in dem

$$P(t^*) = \frac{K}{2}$$

## Lsg., Fortsetzung III

gilt. Ist  $P_0 > K$ , dann gilt auch  $P(t) > K$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ , sodaß diese Bedingung nicht erfüllbar ist. Es gibt keine Nullstelle der zweiten Ableitung von  $P$ . Wegen

$$\ddot{P}(t) = \underbrace{\lambda \dot{P}(t)}_{<0} \underbrace{(K - 2P(t))}_{<0} > 0.$$

ist  $P$  streng konvex. Die Populationsgröße ist also nicht nur (streng) monoton fallend, sondern die Abnahme verlangsamt sich mit zunehmender Zeit. Im Falle  $\frac{K}{2} < P_0 < K$  kann es ebenfalls keine Nullstelle von  $\ddot{P}$  geben. Es gilt  $\ddot{P}(t) < 0$  für  $t \geq t_0$ , die Populationsgröße ist daher eine konkave Funktion. Die Population befindet sich somit in einem Zustand des kontinuierlich verlangsamten Wachstums. Gilt schließlich  $P_0 < \frac{K}{2}$ , dann besitzt  $\ddot{P}$  in  $t = t^*$  eine Nullstelle und  $P(t)$  ist streng konvex für  $t < t^*$

# Lsg., Fortsetzung IV

und streng konkav für  $t > t^*$ . Die Population befindet sich daher in einer Phase des beschleunigten Wachstums (ähnlich dem exponentiellen Wachstum), solange sie kleiner als  $\frac{K}{2}$  ist, wenn sie diese Größe erreicht, tritt sie (wegen der innerspezifischen Konkurrenz) in eine Phase des verlangsamten Wachstums ein.

Als weitere Anwendung der höheren Ableitungen notieren wir, daß der Charakter einer kritischen Stelle auch aus der zweiten Ableitung abgelesen werden kann:

### Satz

*$f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  sei zweimal differenzierbar und es gelte  $f'(x_0) = 0$  in  $x_0 \in (a, b)$ . Ist  $f''(x_0) < 0$  ( $f''(x_0) > 0$ ), so liegt in  $x_0$  ein lokales Maximum (Minimum) vor.*

Da die höheren Ableitungen meist jedoch immer komplizierter werden, ist es oft einfacher Satz 5.9 anzuwenden.

Es wäre sehr aufwendig und unübersichtlich endliche Summen stets in der Form  $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$  zu schreiben. Wir führen daher folgende Schreibweise ein:

$$\sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

Man nennt  $i$  den *Summationsindex*. Da er nur dazu verwendet wird, um den Bereich der Summation eindeutig zu charakterisieren, ist seine Bezeichnung dem Benutzer überlassen. Es ist lediglich darauf zu achten, daß er in einer Rechnung nicht außerhalb einer Summation verwendet wird. Somit sind insbesondere folgende Summen gleich:

$$\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1} = \sum_{j=2}^{n+1} a_{j-1}.$$

Vermeiden sollte man unklare Ausdrücke der Form

$$b_i \sum_{i=1}^n a_i, \quad \sum_{i=1}^n a_i \sum_{i=1}^m b_i,$$

welche eindeutig geschrieben werden als

$$b_i \sum_{k=1}^n a_k, \quad \sum_{k=1}^n a_k \sum_{i=1}^m b_i.$$

Man überlege sich die Gültigkeit folgender Formeln:

$$\sum_{i=1}^n \alpha = \alpha \sum_{i=1}^n 1 = n\alpha,$$

$$\sum_{i=n}^m a_i = \sum_{i=1}^m a_i - \sum_{i=1}^{n-1} a_i, \quad n < m$$

Sehr nützlich sind die Summen

### Satz

- 1  $\sum_{i=0}^n q^i = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}, q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}.$
- 2  $\sum_{i=1}^n i = \frac{1}{2}n(n+1).$
- 3  $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(n+2).$
- 4  $\sum_{i=1}^n i^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2.$

Die Integralrechnung hat zwei sehr verschiedene Wurzeln: die Berechnung der Fläche krummlinig berandeter Gebilde und die Rekonstruktion einer Funktion aus ihrer Ableitung.

### Beispiel

Ein Partikel bewege sich auf einer geradlinigen Bahn mit einer nicht notwendig konstanten Geschwindigkeit  $v(t)$ . Zur Zeit  $t = t_0$  befindet sich das Teilchen in  $x(t_0) = x_0$ . Kann man den Ort des Teilchens aus diesen Daten für  $T > 0$  prognostizieren?

## Lösung

Zu diesem Zweck unterteilen wir das Zeitintervall  $[0, T]$  in  $n$  Teilintervalle  $t_0 < t_1 < \dots < t_i \dots < t_n = T$ . Die Anzahl der Teilintervalle sei so groß und deren maximale Länge so klein gewählt, daß wir auf jedem Teilintervall die Geschwindigkeit annähernd als konstant ansehen dürfen, d.h.

$$v(t) \approx v(t_{i-1}), \quad t \in [t_{i-1}, t_i].$$

Mit gleicher Berechtigung hätte man natürlich  $v(t)$  durch  $v(t_i)$  auf dem Intervall  $[t_{i-1}, t_i]$  ersetzen können. Bezeichnet man mit  $x(t)$  den Ort des Teilchens zur Zeit  $t$  erhält man mit dem Mittelwertsatz

$$x(t_i) - x(t_{i-1}) = v(t_i^*)(t_i - t_{i-1}) \approx v(t_{i-1})(t_i - t_{i-1}),$$

für ein  $t_i^* \in (t_{i-1}, t_i)$ .

## Lsg., Fortsetzung

Diese Relation drückt natürlich nur das bekannte physikalische Gesetz aus, daß ein Teilchen, welches sich geradlinig mit *konstanter* Geschwindigkeit  $v(t_{i-1})$  bewegt, in der Zeitspanne  $(t_i - t_{i-1})$  den Weg  $v(t_{i-1})(t_i - t_{i-1})$  zurücklegt. Dies führt auf

$$\begin{aligned}x(T) - x_0 &= x(t_n) - x(t_0) = \\&= x(t_n) - x(t_{n-1}) + x(t_{n-1}) - x(t_{n-2}) + \\&+ x(t_{n-2}) - x(t_{n-2}) + \\&\dots + x(t_1) - x(t_0) = \sum_{i=1}^n (x(t_i) - x(t_{i-1})) \\&= \sum_{i=1}^n v(t_i^*)(t_i - t_{i-1}) \approx \sum_{i=1}^n v(t_{i-1})(t_i - t_{i-1}).\end{aligned}$$

## Lsg., Fortsetzung

Wir illustrieren die Vorgangsweise an einem einfachen Beispiel: es sei  $v(t) = t$ ,  $t_0 = 0$  und  $T = 1$ . Der Einfachheit halber wählen wir eine äquidistante Unterteilung  $t_i = \frac{i}{n}$ ,  $i = 0, \dots, n$ , welche die Approximation

$$x(1) = x(t_n) \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{i-1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{j}{n} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{j}{n}$$

ergibt. Verwendet man noch  $\sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2}n(n+1)$  erhält man schließlich

$$x(1) \approx \frac{1}{2n^2}(n-1)n = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}.$$

## Lsg., Fortsetzung

Falls  $v$  beispielsweise stetig ist auf  $[t_0, T]$ , kann man zeigen, daß die Approximation für  $x(T)$  bei Verfeinerung der Zerlegung immer genauer wird, und schließlich einem Grenzwert zustrebt, der unabhängig ist von der speziellen Zerlegungsfolge und der jeweiligen Wahl der Zwischenstelle  $\tau_i \in [t_{i-1}, t_i]$  (oben haben wir  $\tau_i = t_{i-1}$  gesetzt).

## Definition

Es sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion.

- 1 Es sei  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  eine Unterteilung des Intervalls  $[a, b]$  und  $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$  eine beliebige Zwischenstelle. Man nennt

$$\mathcal{R}_n(f) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

**Riemann'sche Summe.**

## Def., Fortsetzung

- ②  $f$  heißt **Riemann-integrierbar**, wenn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{R}_n(f)$$

existiert, und der Grenzwert unabhängig ist von der Wahl der Teilintervalle und der Zwischenstellen (stillschweigend wird vorausgesetzt, daß nicht nur die Anzahl der Teilintervalle anwächst, sondern gleichzeitig auch deren maximale Länge gegen Null strebt).

## Def., Fortsetzung

- ③  $f$  sei Riemann-integrierbar. Der Grenzwert

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{R}_n(f)$$

heißt bestimmtes Integral,  $a$  ( $b$ ) untere (obere) Integrationsgrenze,  $f$  Integrand.

Stetige Funktionen sind somit Riemann-integrierbar. Aus der Herleitung des Integrals ist klar, daß sogar folgendes gilt:

### Satz

*Jede auf  $[a, b]$  stückweise stetige Funktion, also jede bis auf endlich viele Sprungstellen stetige Funktion, ist Riemann-integrierbar.*

Riemann-Integrierbarkeit stellt also eine schwache Forderung an  $f$  dar. Grundlegende Eigenschaften des Integrals ergeben sich aus dem Umstand, daß Integrale Grenzwerte von Summen sind:

### Satz (Eigenschaften des Integrals)

Die Funktionen  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  seien Riemann-integrierbar und  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Dann gilt

- 1 Die Funktionen  $f \pm g$  und  $\lambda f$  sind Riemann-integrierbar

$$\int_a^b (f \pm g)(x) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$$

$$\int_a^b (\lambda f)(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx$$

## Satz, Fortsetzung

2

$$\int_a^a f(x) dx = 0,$$

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx,$$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx, \quad c \in [a, b]$$

## Satz

*Es sei  $f$  Riemann-integrierbar. Das bestimmte Integral  $\int_a^b f(x) dx$  kann man geometrisch interpretieren als den Flächeninhalt jenes Flächenstückes, welches von den Geraden  $t = a$ ,  $t = b$ , der  $t$ -Achse und dem Graphen von  $f$  begrenzt wird. Dabei werden Flächenstücke, die zu negativen Funktionswerten gehören, negativ gezählt.*

Die Integralrechnung wäre allerdings nicht ein derart unverzichtbares Werkzeug geworden, wenn die Auswertung von  $\int_a^b f(x) dx$  nur durch den geschilderten komplizierten Grenzprozess möglich wäre. Wir holen etwas weiter aus, um einen alternativen Zugang zu beschreiben.

## Definition

Es seien  $f, F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  Funktionen.  $F$  heißt **Stammfunktion** von  $f$ , wenn

$$F'(x) = f(x)$$

für alle  $x \in [a, b]$  gilt.

Beispielsweise ist  $\ln(x)$  eine Stammfunktion von  $\frac{1}{x}$ . Gibt es noch andere Stammfunktionen?

## Satz

*Es seien  $f, F, G : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  Funktionen und  $F$  eine Stammfunktion von  $f$ . Dann gilt:  $G$  ist genau dann eine weitere Stammfunktion von  $f$ , wenn es eine Konstante  $c$  gibt mit*

$$G(x) = F(x) + c, \quad x \in [a, b].$$

*(Stammfunktionen sind also bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt).*

## Beweis.

Wenn sich die Funktionen  $F$  und  $G$  nur durch eine Konstante  $c$  unterscheiden, dann gilt

$$G'(x) = \frac{d}{dx}(F(x) + c) = F'(x) + 0 = f(x), \quad x \in [a, b].$$

Somit ist  $G$  eine Stammfunktion von  $f$ . Sind umgekehrt  $F$  und  $G$  Stammfunktionen von  $f$ , folgt

$$\frac{d}{dx}(G - F)(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0, \quad x \in [a, b].$$

### Beweis (Fortsetzung).

Da also die Ableitung von  $G - F$  identisch auf  $[a, b]$  verschwindet, muß  $G - F$  auf  $[a, b]$  eine konstante Funktion  $c$  sein, also

$$G(x) = F(x) + c, \quad x \in [a, b].$$



Das Aufsuchen einer Stammfunktion ist also die Umkehrung des Differenzierens. Eigenschaften von Ableitungen übertragen sich auf entsprechende Eigenschaften von Stammfunktionen: Sind beispielsweise  $F$ ,  $G$  Stammfunktionen von  $f$  bzw.  $g$ , dann ist  $\alpha F + \beta G$  eine Stammfunktion von  $\alpha f + \beta g$ , denn es gilt

$$\frac{d}{dx}(\alpha F + \beta G)(x) = \alpha F'(x) + \beta G'(x) = \alpha f(x) + \beta g(x).$$

Jede Tabelle von Ableitungen kann somit auch als Tabelle von Stammfunktionen gelesen werden.

$f(x)$	$F(x)$
$x^\alpha$	$\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}, \quad \alpha \neq -1$
$\frac{1}{x}$	$\ln x $
$e^{\alpha x}$	$\frac{1}{\alpha}e^{\alpha x}$
$\sin \alpha x$	$-\frac{1}{\alpha} \cos \alpha x$
$\cos \alpha x$	$\frac{1}{\alpha} \sin \alpha x$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$

Tabelle: Stammfunktionen

## Definition

Eine Stammfunktion von  $f$  nennt man auch **unbestimmtes Integral** und schreibt

$$\int f(x) dx + c.$$

Die symbolische Konstante  $c$  drückt aus, daß Stammfunktionen nur bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt sind. In diesem Zusammenhang nennt man  $c$  **Integrationskonstante**.

## Beispiel

Gesucht ist eine Stammfunktion von  $f(x) = e^{-3x} + x^2 - 1$ ,  
welche an der Stelle  $x = 0$  den Wert Null annimmt.

## Lösung

Wir lösen die Aufgabe in 2 Schritten und bestimmen zuerst alle Stammfunktionen von  $f$ . Aus der Tabelle für Stammfunktionen lesen wir ab

$$F(x) = -\frac{1}{3}e^{-3x} + \frac{1}{3}x^3 - x + c,$$

und bestimmen die Integrationskonstante aus der Bedingung  $F(0) = 0$ , also

$$0 = -\frac{1}{3} + c, \quad \text{d.h.} \quad c = \frac{1}{3}.$$

Die gesuchte Stammfunktion ist daher

$$F(x) = -\frac{1}{3}e^{-3x} + \frac{1}{3}x^3 - x + \frac{1}{3}.$$

Durch die Schreibweise einer Stammfunktion als unbestimmtes Integral wird bereits nahegelegt, daß ein enger Zusammenhang zwischen Stammfunktion und bestimmtem Integral besteht. Die Verbindung zwischen diesen beiden unterschiedlichen Begriffen wird durch den Hauptsatz der Differential und Integralrechnung geklärt:

## Satz (Hauptsatz der Differential und Integralrechnung)

Es sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und somit Riemann-integrierbar.

- ① Definiert man  $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  durch das bestimmte Integral

$$F(t) = \int_a^t f(x) dx, \quad t \in [a, b],$$

dann ist  $F$  differenzierbar auf  $[a, b]$  und es gilt

$$F'(t) = f(t), \quad t \in [a, b].$$

Die Funktion  $F$  ist also eine Stammfunktion von  $f$ .

- ② Ist  $\Phi$  eine beliebige Stammfunktion von  $f$ , dann gilt

$$\int_a^b f(x) dx = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Schreibweise:  $\Phi(x) \Big|_a^b \equiv \Phi(b) - \Phi(a)$ .

Der Hauptsatz zeigt also einerseits einen systematischen, wenn auch nicht praktikablen Weg auf, wie man eine Stammfunktion einer stetigen Funktion berechnen kann, andererseits stellt er eine sehr einfache Methode zur Berechnung eines bestimmten Integrals zur Verfügung, falls irgend eine Stammfunktion des Integranden bekannt ist. Wir überlegen uns nun, daß der Wert des bestimmten Integrals tatsächlich unabhängig ist von der Wahl der Stammfunktion, welche zur Auswertung herangezogen wird.

Es seien also  $\Phi$  und  $\Psi$  Stammfunktionen von  $f$ , dann gibt es eine Konstante  $c$  mit

$$\Phi = \Psi + c.$$

Aus dem Hauptsatz folgt beispielsweise

$$\int_a^b f(x) dx = \Psi(b) - \Psi(a) = (\Phi(b) + c) - (\Phi(a) + c) = \Phi(b) - \Phi(a).$$

## Beispiel

Zu berechnen ist das bestimmte Integral  $\int_0^{\ln 3} (e^{-3x} + x^2 - 1) dx$ .

## Lösung

Eine Stammfunktion des Integranden ist

$F(x) = -\frac{1}{3}e^{-3x} + \frac{1}{3}x^3 - x + \frac{1}{3}$ . Somit folgt

$$\begin{aligned}\int_0^{\ln 3} (e^{-3x} + x^2 - 1) dx &= F(\ln 3) - F(0) \\ &= \left(-\frac{1}{3}e^{-3\ln 3} + \frac{1}{3}(\ln 3)^3 - \ln 3 + \frac{1}{3}\right) - \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) \\ &= -\frac{1}{3^4} + \frac{1}{3}(\ln 3)^3 - \ln 3 + \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

In den meisten Fällen ist eine Stammfunktion des Integranden nicht bekannt. Die Hauptarbeit des Integrierens besteht darin, das gegebene Integral solange umzuformen, bis man eine Stammfunktion des Integranden angeben kann. Dabei kann man auf die Regeln der *Differentialrechnung* zurückgreifen:

Es seien beispielsweise  $F$  und  $G$  Stammfunktionen von  $f$  bzw.  $g$ .  
Aus der Produktregel des Differenzierens folgt

$$(FG)' = F'G + FG' = fG + Fg,$$

in der Sprechweise der Stammfunktionen bedeutet dies, daß  $FG$  eine Stammfunktion von  $fG + Fg$  ist, also

$$\int (f(x)G(x) + F(x)g(x)) dx = F(x)G(x) + c.$$

Für das bestimmte Integral erhält man daher

$$\int_a^b (f(x)G(x) + F(x)g(x)) dx = F(x)G(x) \Big|_a^b.$$

Zusammenfassend haben wir folgende Integrationsregel bewiesen:

### Satz (Partielle Integration)

*Es seien  $f, G: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  Riemann-integrierbare Funktionen,  $F$  sei eine bekannte Stammfunktion von  $f$  und  $G$  sei differenzierbar mit der Ableitung  $g = G'$ . Dann gilt für das unbestimmte Integral*

$$\int f(x)G(x) dx = F(x)G(x) - \int F(x)g(x) dx,$$

*und daher für das bestimmte Integral*

$$\int_a^b f(x)G(x) dx = F(x)G(x)\Big|_a^b - \int_a^b F(x)g(x) dx.$$

Eine mnemotechnisch günstige Schreibweise dieser Regel wird ebenfalls oft verwendet:

$$\int u'v \, dx = uv - \int uv' \, dx.$$

Die Regel der partiellen Integration ergibt keine Lösung des Integrals, sie verschiebt nur das Problem. Ihre Anwendung ist sinnvoll, wenn das Integral auf der rechten Seite einfacher ist als das Ausgangsintegral. Die Aufspaltung des Integranden als Produkt  $fG$  muß natürlich so erfolgen, daß eine Stammfunktion von  $f$  bekannt ist.

## Beispiel

Integrieren Sie  $\int x^2 \ln x \, dx$ .

## Lösung

Da der Integrand ein Produkt von zwei Funktionen ist, liegt es nahe, partielle Integration zu versuchen. Da wir eine Stammfunktion von  $\ln x$  nicht kennen, identifizieren wir

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2, & F(x) &= \frac{1}{3}x^3, \\ G(x) &= \ln x, & g(x) &= G'(x) = \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

## Lsg., Fortsetzung

Mit Hilfe von Satz 6.7 findet man nun

$$\begin{aligned}\int x^2 \ln x \, dx &= \underbrace{\frac{1}{3} x^3}_{F(x)} \underbrace{\ln x}_{G(x)} - \int \underbrace{\frac{1}{3} x^3}_{F(x)} \underbrace{\frac{1}{x}}_{g(x)} \, dx = \\ &= \frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{3} \int x^2 \, dx = \\ &= \frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{9} x^3 + c.\end{aligned}$$

## Beispiel

Zu berechnen ist das bestimmte Integral  $\int_1^e \ln x \, dx$ .

## Lösung

In diesem Falle hilft die partielle Integration, indem man den Integranden in trivialer Weise als Produkt schreibt

$$\int_1^e 1 \cdot \ln x \, dx.$$

Wir setzen,

$$f(x) = 1,$$

$$F(x) = x,$$

$$G(x) = \ln x,$$

$$g(x) = G'(x) = \frac{1}{x},$$

## Lsg., Fortsetzung

die Umformung des bestimmten Integrals nach Satz 6.7 ergibt

$$\begin{aligned}\int_1^e 1 \cdot \ln x \, dx &= \underbrace{x}_{F(x)} \underbrace{\ln x}_{G(x)} \Big|_1^e - \int_1^e \underbrace{x}_{F(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{g(x)} \, dx \\ &= e \ln e - 0 - (e - 1) = 1.\end{aligned}$$

Auf welche Integrationsregel führt die Kettenregel der Differentialrechnung? Wenn  $F$  und  $G$  differenzierbare Funktionen mit den Ableitungen  $F' = f$  und  $G' = g$  sind, so gilt nach der Kettenregel

$$[F(G(x))] = F'(G(x))G'(x) = f(G(x))g(x).$$

Mit anderen Worten,  $F \circ G$  ist eine Stammfunktion von  $(f \circ G)g$ , also

$$\int f(G(x))g(x) dx = F(G(x)) + c.$$

Diese Beziehung besagt, daß der Wert einer (und damit jeder) Stammfunktion von  $f$  an der Stelle  $u = G(x)$  gegeben ist durch das unbestimmte Integral auf der linken Seite. Andererseits sind aber die Stammfunktionen von  $f$  an der Stelle  $u$  gegeben durch

$$\int f(u) du = F(u) + c.$$

Durch Vergleich der beiden linken Seiten ergibt sich

$$\int f(G(x))g(x) dx = \int f(u)du \quad \text{mit } u = G(x),$$

und somit für das bestimmte Integral

$$\int_a^b f(G(x))g(x) dx = \int_{G(a)}^{G(b)} f(u)du.$$

Wir erhalten insgesamt folgende Integrationsregel:

## Satz (Substitutionsregel)

Es seien  $f, G: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetige Funktionen, ferner sei  $G$  differenzierbar. Substituiert man  $u = G(x)$  so gilt

$$\int f(G(x))G'(x) dx = \int f(u)du.$$

Das bestimmte Integral transformiert man gemäß

$$\int_a^b f(G(x))G'(x) dx = \int_{G(a)}^{G(b)} f(u)du.$$

Wir skizzieren nun zwei typische Einsatzmöglichkeiten der Substitutionsregel. Am leichtesten ist ihre Anwendung, wenn der Integrand bereits die Form  $f(G(x))G'(x)$  besitzt:

### Beispiel

Zu berechnen ist das Integral  $\int \frac{4x}{\sqrt{1+x^2}} dx$ .

## Lösung

Setzt man  $G(x) = (1 + x^2)$  und  $f(u) = \frac{1}{\sqrt{u}}$ , dann ist

$$\frac{4x}{\sqrt{1+x^2}} = 2f(G(x))G'(x),$$

mit Hilfe der Substitutionsregel folgt

$$\begin{aligned}\int \frac{4x}{\sqrt{1+x^2}} dx &= 2 \int f(u) du = \int \frac{1}{\sqrt{u}} du = 4\sqrt{u} = \\ &= 4\sqrt{1+x^2}.\end{aligned}$$

## Lsg., Fortsetzung

Formal kann man folgendermaßen vorgehen: setze

$$u = 1 + x^2,$$

$$du = \frac{d}{dx}(1 + x^2) dx = 2x dx$$

und eliminiere  $x$  mit Hilfe dieser Transformation aus dem ursprünglichen Integral:

$$\int \frac{4x}{\sqrt{1+x^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{u}} 2 du,$$

die Stammfunktion des transformierten Integrals ist auszuwerten an der Stelle  $u = G(x) = 1 + x^2$ .

Meist ist es jedoch nicht offensichtlich, welche Transformation zum Ziele führt:

### Beispiel

Zu berechnen ist das Integral  $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ .

## Lösung

Wir bestimmen zuerst das unbestimmte Integral  $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ . Um die Wurzel zu eliminieren, substituiert man

$$x = \sin u, \quad \text{also } u = \arcsin x$$

$$dx = \cos u \, du,$$

## Lsg., Fortsetzung

denn es gilt doch

$$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 u} = \sqrt{\cos^2 u} = \cos u$$

(man beachte, daß  $\cos u$  im relevanten  $u$ -Intervall positiv ist!).

Eine formale Anwendung der Substitutionsregel ergibt

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{1}{\cos u} \cos u du = u + c.$$

Ersetzt man nun noch  $u$  durch  $\arcsin x$  erhält man die

Stammfunktionen

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c,$$

und damit das bestimmte Integral

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x \Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{6}.$$

Wir haben die Integralrechnung motiviert mit dem Problem, den zurückgelegten Weg eines Teilchens aus der bekannten Geschwindigkeit und dem Ausgangspunkt eines Teilchens zu berechnen. Als Lösung ergab sich das Integral der Geschwindigkeit über das betrachtete Zeitintervall. Natürlich wird die unabhängige Variable nicht in allen Fällen die Zeit bedeuten. Manchmal sind die Variablen, nach denen man integriert, z.B. Raumkoordinaten. In solchen Fällen interpretiert man den Integranden oft als **Dichte** oder **Konzentration**, das Integral gibt dann den Gesamtbestand an.

Konzentrationsmaße geben die Menge eines Stoffes an, die sich in einer Volumseinheit einer Lösung befindet, also Masse bezogen auf Volumen. Ähnlich gibt die Dichte eines Körpers die Masse des Körpers pro Volumseinheit an. Wenn die Dichte gegeben ist, und die Gesamtmasse errechnet werden soll, muß die Dichte integriert werden. Weil sich das Volumen über drei Raumkoordinaten aufbaut, wird dreimal integriert, jeweils nach jeder Koordinate. Druck ist Kraft bezogen auf die Flächeneinheit. Soll die Kraft berechnet werden, welche auf ein ganzes Flächenstück wirkt, so wird der Druck integriert. Weil Fläche zweidimensional ist, muß zweimal integriert werden. Eine ausführliche Darstellung mehrfacher Integrale geht jedoch über den Rahmen dieser Einführung hinaus.

Die verschiedenen Integrationsmethoden und die Fülle der tabellierten bestimmten und unbestimmten Integrale darf jedoch nicht darüber hinwegtäuschen, daß in den meisten Fällen eine analytische Auswertung eines Integrals nicht möglich ist. In diesen Situationen ist man auf numerische Methoden angewiesen. Eine nahe liegende Idee zur approximativen Berechnung eines bestimmten Integrals ist, den Integranden lokal durch “einfachere” Funktionen, welche man exakt integrieren kann, zu ersetzen. Man geht dabei folgendermaßen vor.

Man wählt eine Zerlegung des Integrationsbereiches, welche u.U. spezielle Eigenschaften des Integranden berücksichtigt:

$$a = x_0 < x_1 > \dots x_i < x_{i+1} < \dots x_n = b.$$

Auf jedem der Teilintervalle  $[x_{i-1}, x_i]$ ,  $i = 1, \dots, n$  ersetzt man den Integranden  $f$  durch eine einfachere Funktion  $h_i$ , sodaß der Fehler  $|f(x) - h_i(x)|$  für  $x \in [x_{i-1}, x_i]$  klein ist, und approximiert das Integral durch

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} h_i(x) dx.$$

Die lokale Approximation wird dabei so vorgenommen, daß für eine bestimmte Klasse von Integranden sichergestellt ist, daß eine Verfeinerung der Zerlegung tatsächlich zu einer genaueren Approximation des Integrals führt. Die resultierenden Näherungen für das bestimmte Integral nennt man **Quadraturformeln**.

In den folgenden Beispielen von Quadraturformeln gehen wir von einer *äquidistanten Unterteilung* des Integrationsbereiches aus. Es sei also  $n - 1$  die Anzahl der *inneren* Teilpunkte der Zerlegung und  $h$  die Länge der Teilintervalle, also

$$h = \frac{b - a}{n},$$
$$x_i = a + \frac{i}{n} = a + ih, \quad i = 0, \dots, n.$$

Wir approximieren den Integranden auf  $[x_{i-1}, x_i]$  durch den Funktionswert im Mittelpunkt des Intervalles, d.h. wir setzen

$$m_i = \frac{x_{i-1} + x_i}{2},$$

$$h_i(x) = f(m_i), \quad x \in [x_{i-1}, x_i],$$

für  $i = 1, \dots, n$ . Dies ergibt die sogenannte **Rechteckregel**:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(m_i).$$

Natürlich wäre es auch möglich, den Integranden durch den Funktionswert an einem der Intervallenden zu approximieren. Dies führt im Allgemeinen jedoch zu einem Genauigkeitsverlust des Näherungswertes für das bestimmte Integral.

Wir definieren die die Approximation von  $f$  auf  $[x_{i-1}, x_i]$  durch lineare Interpolation, d.h.

$$h_i(x) = f(x_{i-1}) + \frac{1}{h}(f(x_i) - f(x_{i-1}))(x - x_{i-1}), \quad x \in [x_{i-1}, x_i],$$

für  $i = 1, \dots, n$ . Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &\approx \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left( f(x_{i-1}) + \frac{1}{h}(f(x_i) - f(x_{i-1}))(x - x_{i-1}) \right) dx \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{h}{2} (f(x_{i-1}) + f(x_i)). \end{aligned}$$

Man veranschauliche sich, daß die Integrale über die einzelnen Teilintervalle sich geometrisch als Flächeninhalt des Trapezes mit den Eckpunkten  $(x_{i-1}, 0)$ ,  $(x_i, 0)$ ,  $(x_i, f(x_i))$  und  $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$  deuten läßt. Formt man obigen Ausdruck noch etwas um, ergibt sich die **Trapezregel**

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} \left( \frac{1}{2} f(a) + \frac{1}{2} f(b) + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right).$$

Die Trapezregel ergibt bei gleichem Rechenaufwand eine etwas genauere Näherung von  $\int_a^b f(x) dx$  als die vergleichbare Rechteckregel. Für beide Quadraturformeln kann man zeigen, daß bei zweimal stetig differenzierbaren Integranden der Quadraturfehler, also der Unterschied zwischen Näherungswert und exaktem Integral, beliebig klein gemacht werden kann, wenn nur die Unterteilung des Integrationsbereiches hinreichend fein, also  $n$  hinreichend groß, gewählt wird. In der Praxis wird die erreichbare Genauigkeit jedoch durch die unvermeidlichen Rundungsfehler begrenzt

In diesem Abschnitt soll kurz auf Funktionen in mehreren Veränderlichen eingegangen werden. Eine auch nur annähernd umfassende Diskussion würde den Rahmen dieser Lehrveranstaltung sprengen.

Erinnern wir uns vorerst an die Definition der Stetigkeit einer Funktion  $f$  an einer Stelle  $x_0 \in \mathbb{R}$ , vgl. Definition 3.2: zu jeder  $\varepsilon$ -Umgebung  $K(f(x_0), \varepsilon)$  von  $f(x_0)$  gibt es eine  $\delta$ -Umgebung  $K(x_0, \delta)$  von  $x_0$ , so daß  $f(x) \in K(f(x_0), \varepsilon)$  für alle  $x \in K(x_0, \delta)$  gilt.

Ist beispielsweise  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion in 2 Veränderlichen und interpretiert man  $K(\vec{x}_0, \delta)$  als Kreis mit Mittelpunkt  $\vec{x}_0$  und Radius  $\delta$ , erhält man die Charakterisierung der Stetigkeit einer Funktion in zwei Veränderlichen.

Ausführlicher geschrieben ist  $f$  stetig in  $\vec{x}_0 = (x_0, y_0)$ , wenn es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  gibt, so daß für alle  $\vec{x} = (x, y)$  mit

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$$

auch

$$|f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0)| < \varepsilon$$

zutrifft (analog für Funktionen in  $n$  Veränderlichen).

Die meisten Ergebnisse aus Kapitel 3 gelten sinngemäß auch in der allgemeineren Situation. In vielen Fällen kann die Feststellung der Stetigkeit einer Funktion in mehreren Veränderlichen zurückgeführt werden auf die Stetigkeit von Funktionen in einer Veränderlichen:

### Satz

*Es seien  $I$  und  $J$  Intervalle und  $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\psi: J \rightarrow \mathbb{R}$  stetige Funktionen. Dann sind auch die Abbildungen  $f, g: I \times J \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) = \varphi(x) + \psi(y)$  und  $h(x, y) = \varphi(x)\psi(y)$  stetig.*

Mit Hilfe dieses Satzes folgt beispielsweise die Stetigkeit der Abbildung  $f(x, y) = x^2 \sqrt{y}$  aus der Stetigkeit von  $x \rightarrow x^2$  und  $y \rightarrow \sqrt{y}$ .

Wir versuchen nun, auf naheliegende Weise den Begriff der Differenzierbarkeit auf Funktionen in mehreren Veränderlichen auszudehnen. Dazu sei  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion in  $n > 1$  Veränderlichen und  $\vec{x}^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$  fest. Wir betrachten die Funktion  $f$  nur auf einer Geraden durch  $\vec{x}^*$  parallel z.B. zur  $j$ -ten Koordinatenachse.

Sämtliche Punkte auf dieser Geraden haben also die Koordinaten  $(x_1^*, \dots, x_{j-1}^*, x, x_{j+1}^*, \dots, x_n^*)$ . Die Einschränkung von  $f$  auf die Gerade definiert eine Funktion nur mehr in einer einzigen Veränderlichen

$$h_j(x) = f(x_1^*, \dots, x_{j-1}^*, x, x_{j+1}^*, \dots, x_n^*), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Es ist nun sinnvoll, die Differenzierbarkeit der Abbildung  $h_j$  an der Stelle  $x_j^*$  zu untersuchen. Dies motiviert folgenden Begriff:

## Definition

Eine Funktion  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **partiell differenzierbar** nach  $x_j$  an der Stelle  $\vec{x}^* \in \mathbb{R}^n$ , wenn der Grenzwert

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (f(x_1^*, \dots, x_{j-1}^*, x_j^* + h, x_{j+1}^*, \dots, x_n^*) - f(x_1^*, \dots, x_{j-1}^*, x_j^*, x_{j+1}^*, \dots, x_n^*))$$

existiert. Dieser Grenzwert heißt **partielle Ableitung erster Ordnung** nach  $x_j$  an der Stelle  $\vec{x}^*$  und wird mit  $\frac{\partial f}{\partial x_j}(\vec{x}^*)$  oder  $f_{x_j}(\vec{x}^*)$  bezeichnet. Eine Funktion heißt partiell differenzierbar, wenn sämtliche partiellen Ableitungen erster Ordnung  $f_{x_j}(\vec{x}^*)$ ,  $j = 1, \dots, n$  existieren.

## Beispiel

Wir berechnen die partiellen Ableitungen von

$$f(x, y, z) = (x^2 + y) \ln(x + z^3).$$

## Lösung

Die Rechnung ist nur formal, da  $f$  nicht für alle  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  definiert ist, sie entspricht aber der in der Praxis üblichen Vorgangsweise. Für die Berechnung von  $\frac{\partial f}{\partial x}$  stellen wir uns also auf den Standpunkt, die Variablen  $y, z$  seien Konstante und differenzieren nach  $x$ . Auf diese Weise ergibt sich

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 2x \ln(x + z^3) + (x^2 + y) \frac{1}{x + z^3},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = \ln(x + z^3),$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = (x^2 + y) \frac{3z^2}{x + z^3}.$$

Man kann die partiellen Ableitungen 1. Ordnung zu einem Spaltenvektor zusammenfassen, etwa für  $n = 2$ ,

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix}$$

welchen man **Gradient** von  $f$  an der Stelle  $(x, y)$  nennt.

Der Gradient gibt an der Stelle  $(x, y)$  die Richtung des stärksten Anstieges der Funktionswerte an, die Funktionswerte fallen am schnellsten in der Richtung  $-\nabla f(x, y)$ .

Man kann die Überlegungen, welche zu den partiellen Ableitungen erster Ordnung führten, auf die partiellen Ableitungen erster Ordnung selbst anwenden, und erhält die partiellen Ableitungen 2.Ordnung usw. Man schreibt:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = f_{x_j x_i}.$$

## Beispiel

Wir berechnen die partiellen Ableitungen 2. Ordnung von

$$f(x, y) = x^2 + e^x y^3.$$

## Lösung

Dazu benötigen wir zuerst die partiellen Ableitungen erster Ordnung:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + e^x y^3 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 3e^x y^2.$$

Die partiellen Ableitungen 2. Ordnung ergeben sich durch partielles Differenzieren:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= 2 + e^x y^3, & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= 3e^x y^2, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= 3e^x y^2, & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= 6e^x y. \end{aligned}$$

Bildet man die partiellen Ableitungen der partiellen Ableitungen 2. Ordnung erhält man die partiellen Ableitungen 3. Ordnung:

$$f_{xxx} = e^x y^3,$$

$$f_{xxy} = 3e^x y^2,$$

$$f_{xyx} = 3e^x y^2,$$

$$f_{xyy} = 6e^x y,$$

$$f_{yxx} = 3e^x y^2,$$

$$f_{yxy} = 6e^x y,$$

$$f_{yyx} = 6e^x y,$$

$$f_{yyy} = 6e^x$$

Es gibt allgemein  $n^2$  partielle Ableitungen 2. Ordnung,  $n^3$  partielle Ableitungen 3. Ordnung usw. Die Anzahl der partiellen Ableitungen steigt also mit der Ordnung der Ableitung rasch an. Im speziellen Beispiel sieht man jedoch, daß z.B. alle dritten Ableitungen, in denen zweimal nach  $x$  abgeleitet wurde denselben Wert haben, ebenso alle dritten Ableitungen, in welchen zweimal nach  $y$  abgeleitet wurde. Dies ist kein Spezifikum dieses Beispiels, sondern Folge einer allgemeinen Eigenschaft gemischter partieller Ableitungen:

## Satz

*Existieren die partiellen Ableitungen  $k$ -ter Ordnung einer Abbildung  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  und sind sie stetig, dann spielt die Reihenfolge der Ableitungen keine Rolle, d.h. es gilt*

$$f_{x_i x_j} = f_{x_j x_i},$$

$$f_{x_i x_j x_k} = f_{x_i x_k x_j} = f_{x_j x_i x_k} = f_{x_j x_k x_i} = f_{x_k x_i x_j} = f_{x_k x_j x_i}$$

Aus der Theorie der Funktionen in einer Veränderlichen wissen wir, daß  $\frac{\partial f}{\partial x_j}(\vec{x}^*)h_j$  die Sensitivität des Funktionswertes von  $f$  beschreibt, wenn wir die  $j$ -te Koordinate von  $\vec{x}^*$  um  $h_j$  verändern. Wir erwarten daher, daß folgende Approximation für kleine Werte von  $h_j$ ,  $j = 1, \dots, n$  gültig ist:

$$f(x_1^* + h_1, x_2^* + h_2, \dots, x_n^* + h_n) \approx f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^*, x_2^*, \dots)$$

Für  $n = 2$  erhält man den nützlichen Spezialfall

$$f(x^* + h, y^* + k) \approx f(x^*, y^*) + f_x(x^*, y^*)h + f_y(x^*, y^*)k. \quad (7.1)$$

## Beispiel

Wir demonstrieren diese Approximation an Hand einer Näherung für  $(0.99 e^{0.02})^8$ .

## Lösung

Dazu setzen wir  $f(x, y) = x^8 e^{8y}$  und  $(x^*, y^*) = (1, 0)$ .  $f$  und die partiellen Ableitungen sind leicht in  $(1, 0)$  auszuwerten:

$$f(1, 0) = 1,$$

$$f_x(x, y) = 8x^7 e^{8y}$$

$$f_x(1, 0) = 8,$$

$$f_y(x, y) = 8x^8 e^{8y}$$

$$f_y(1, 0) = 8.$$

Somit ergibt sich

$$\begin{aligned} f(0.99, 0.02) &\approx f(1, 0) + f_x(1, 0)(0.99 - 1) + f_y(1, 0)(0.02 - 0) \\ &= 1 - 8 \cdot 0.01 + 8 \cdot 0.02 = 1.08. \end{aligned}$$

Diese grobe Näherung stimmt bereits sehr gut mit dem exakten Wert  $(0.99e^{0.02})^8 = 1.08285\dots$  überein. Aber nicht immer kann man auf diese Weise die Funktion approximieren.

### Beispiel

Wir betrachten die Funktion  $f(x, y) = -1$  falls  $x \neq 0$  oder  $y \neq 0$ , und setzen  $f(x, 0) = f(0, y) \equiv 1$ . Es ist klar, daß  $f$  in  $(0, 0)$  *nicht* stetig sein kann. Trotzdem existieren die partiellen Ableitungen  $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$ . Die Näherung (7.1) kann also nicht zutreffen.

Dieses Beispiel zeigt auch, daß die bloße Existenz aller partiellen Ableitungen einer Funktion in mehreren Veränderlichen nicht genügt, um deren Differenzierbarkeit sicherzustellen. Eine differenzierbare Funktion sollte ja zumindest stetig sein. Auf den genauen Differenzierbarkeitsbegriff kann hier nicht eingegangen werden. Wir begnügen uns mit der Bemerkung, daß die Existenz und *Stetigkeit* aller partiellen Ableitungen 1.Ordnung die Differenzierbarkeit einer Funktion in mehreren Veränderlichen, in welchem Sinne auch immer, garantiert. In diesem Falle gilt auch die Approximation (7.1).

Wir sind vorerst daran interessiert, eine Bedingung zu finden, die an den Stellen gelten muß, in denen eine Funktion ein lokales Extremum annimmt und welche im *Inneren* des Definitionsbereiches liegen. Die Untersuchung des qualitativen Verhaltens in den Randpunkten ist bei Funktionen in mehreren Veränderlichen wesentlich schwieriger als bei Funktionen in einer Veränderlichen, bei denen der Rand des relevanten Bereiches meist aus den beiden Randpunkten eines Intervalles besteht. Man benötigt dazu Methoden der Optimierung mit Nebenbedingungen, welche erst später skizziert werden sollen.

Es sei also  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion in mehreren Veränderlichen, welche der Einfachheit auf ganz  $\mathbb{R}^n$  definiert sein soll (damit umgehen wir die Problematik der Untersuchung des Randes), für welche in  $\vec{x}^*$  sämtliche partiellen Ableitungen erster Ordnung existieren. An der Stelle  $\vec{x}^*$  liege ein lokales Extremum vor, für alle  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$  hinreichend nahe bei  $\vec{x}^*$  gilt also

$$f(\vec{x}) \leq f(\vec{x}^*) \quad \text{oder} \quad f(\vec{x}) \geq f(\vec{x}^*). \quad (7.2)$$

(Es geht uns hier nur um die zugrundeliegende Idee, daher haben wir "hinreichend nahe" nicht exakt definiert). Insbesondere gilt (7.2) für die Punkte

$$(x_1^*, \dots, x_{i-1}^*, x, x_{i+1}^*, \dots, x_n^*)$$

für alle  $x \in (x_i^* - \delta, x_i^* + \delta)$  und für alle  $i = 1 \dots, n$  mit einem hinreichend kleinen  $\delta > 0$ . Jede der Funktionen

$$h_i(x) = f(x_1^*, \dots, x_{i-1}^*, x, x_{i+1}^*, \dots, x_n^*), \quad x \in (x_i^* - \delta, x_i^* + \delta)$$

hat demnach in  $x_i^*$  ein lokales Extremum.

Da  $h_i$  eine in  $x_i^*$  differenzierbare Funktion in einer Veränderlichen ist, muß

$$\frac{dh_i}{dx}(x_i^*) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^*) = 0, \quad i = 1, \dots, n$$

gelten. Wir fassen die Diskussion zusammen:

## Satz

Die Abbildung  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  besitze in  $\vec{x}^*$  sämtliche partiellen Ableitungen erster Ordnung. Liegt in  $\vec{x}^*$  ein lokales Extremum vor, dann gilt notwendigerweise

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}^*) = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (7.3)$$

Diese Bedingung ist auch dann erfüllt, wenn  $f$  nur auf einer Teilmenge  $G \subset \mathbb{R}^n$  definiert ist, sofern  $\vec{x}^*$  nicht auf dem Rand von  $G$  liegt. Die gemeinsamen Nullstellen aller partiellen Ableitungen erster Ordnung nennt man **kritische Punkte** von  $f$ . Nicht jeder kritische Punkt gehört zu einem lokalen Extremum. Das qualitative Verhalten von  $f$  in einem kritischen Punkt kann man aus den partiellen Ableitungen 2. Ordnung ablesen. Der Einfachheit halber beschränken wir uns auf Funktionen in 2 Veränderlichen.

## Satz

Die Abbildung  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  sei zweimal stetig partiell differenzierbar und besitze in  $\vec{x}^*$  einen kritischen Punkt. Setzt man

$$J_f(\vec{x}^*) = f_{xx}(\vec{x}^*)f_{yy}(\vec{x}^*) - f_{xy}(\vec{x}^*)^2,$$

und gilt

- 1  $J_f(\vec{x}^*) > 0$  und  $f_{xx}(\vec{x}^*) > 0$ , dann liegt in  $\vec{x}^*$  ein lokales Minimum vor,
- 2  $J_f(\vec{x}^*) > 0$  und  $f_{xx}(\vec{x}^*) < 0$ , dann liegt in  $\vec{x}^*$  ein lokales Maximum vor,
- 3  $J_f(\vec{x}^*) < 0$ , dann liegt in  $\vec{x}^*$  ein Sattelpunkt vor,
- 4  $J_f(\vec{x}^*) = 0$ , dann ist keine Aussage möglich.

Ein **Sattelpunkt** ist ein kritischer Punkt mit der Eigenschaft, daß es zwei verschiedene Geraden  $g_1$  und  $g_2$  durch  $\vec{x}^*$  gibt, sodaß in  $\vec{x}^*$  die Einschränkung von  $f$  auf  $g_1$  ein lokales Minimum, die Einschränkung auf  $g_2$  ein lokales Maximum besitzt.

## Beispiel

Die Funktion  $f(x, y) = x^2 - y^2$  hat an der Stelle  $(0, 0)$  einen Sattelpunkt, vgl. Abbildung 64.

## Lösung.

Man bildet zuerst den Vektor  $(f_x, f_y) = 2(x, -y)$ . Da die Gleichung

$$(f_x, f_y) = (0, 0)$$

nur in  $(x, y) = (0, 0)$  gilt, besitzt  $f$  nur eine einzige kritische Stelle. Ferner gilt  $f_{xx} = 2$ ,  $f_{yy} = -2$  und  $f_{xy} = 0$ , also

$$J_f(0, 0) = -4 < 0.$$



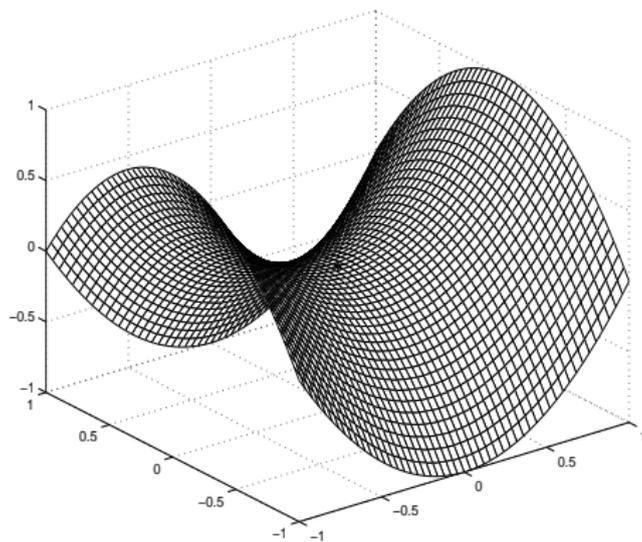


Abbildung:

## Beispiel

Man bestimme das Maximum von  $f(x, y) = x^2 - y^2$  auf dem Einheitskreis.

## Lösung

Zu bestimmen ist also das Maximum der Funktion  $f$  unter der Nebenbedingung  $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ . Wir können die Nebenbedingung benutzen, um eine der Variablen, z.B.  $x$ , durch die andere auszudrücken. Setzt man also  $x^2 = 1 - y^2$  in  $f$  ein, ist das Maximum von

$$\tilde{f}(y) = 1 - 2y^2$$

zu bestimmen. Dieses tritt in  $y = 0$  auf. Aus der Nebenbedingung folgt  $x = \pm 1$ . Das Maximum wird somit an den Stellen  $(x_1, y_1) = (1, 0)$  und  $(x_2, y_2) = (-1, 0)$  angenommen, es gilt  $f(\pm 1, 0) = 1$ .

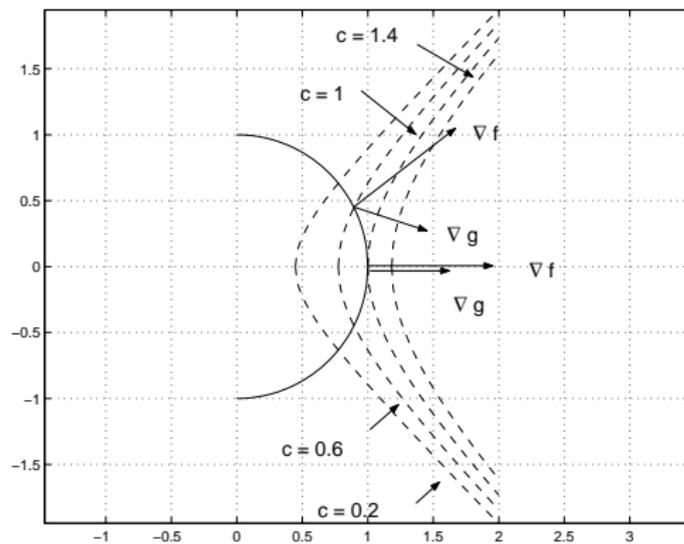


Abbildung:

Es ist nicht immer zweckmäßig oder möglich, die Nebenbedingung nach einer der Variablen aufzulösen. In diesen Fällen kann man eine Methode versuchen, welche wir durch eine graphische Lösung des Beispiels veranschaulichen. Wir bemerken, daß die Niveaulinien von  $f$ , also die Mengen

$$\{(x, y) : f(x, y) = x^2 - y^2 = c\},$$

$c \in \mathbb{R}$ , gleichseitige Hyperbeln sind. Der Gradient von  $f$  ist stets orthogonal zu den Niveaulinien. Aus Abbildung 65 erkennt man, daß  $f$  größer wird, wenn man die Niveaulinien nach rechts verschiebt. Eine Lösung kann es jedoch nur geben, wenn der Durchschnitt der Niveaulinie mit dem Einheitskreis nicht leer ist. Das gesuchte Maximum liegt also an der Stelle  $(1, 0)$ , wo die Niveaulinie den Einheitskreis gerade noch berührt. Aus der Abbildung geht hervor, daß an dieser Stelle die Gradienten von  $f$  und  $g$  parallel sind. Dieser Anschauung liegt folgendes allgemeine Prinzip zugrunde.

### Satz (Lagrange Multiplikator Regel)

*Es seien  $f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar und  $f$  besitze in  $\vec{x}_0$  ein lokales Extremum unter der Nebenbedingung  $g(\vec{x}) = 0$ . Ist  $\nabla g(\vec{x}_0) \neq 0$ , dann gibt es eine Zahl  $\lambda_0$ , so daß*

$$\nabla f(\vec{x}_0) + \lambda_0 \nabla g(\vec{x}_0) = 0$$

*ist ( $\lambda_0$  heißt Lagrange Multiplikator).*

Bildet man die **Lagrange Funktion**

$$\mathcal{L}(\vec{x}, \lambda) = f(\vec{x}) + \lambda f(\vec{x}),$$

dann bedeutet die Bedingung des Satzes, daß die Lagrange Funktion in  $(x_0, \lambda_0)$  einen kritischen Punkt hat.

Es sei darauf hingewiesen, daß die Lagrange Funktion keiner Einschränkung unterliegt. Allerdings tritt nun die zusätzliche Unbekannte  $\lambda$  auf. Im Fall  $n = 2$  findet man  $(\vec{x}_0, \lambda_0)$  als Lösung des Gleichungssystems

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial g}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = f + \lambda g = 0$$

Ob an der Stelle  $\vec{x}_0$  tatsächlich ein Maximum oder Minimum von  $f$  unter der Bedingung  $g(\vec{x}) = 0$  vorliegt, bedarf einer weiteren Untersuchung, welche über den Rahmen dieser Lehrveranstaltung hinausgeht.

## Lösung

Wir bilden zuerst die Lagrange Funktion

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = x^2 - y^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

und lösen das Gleichungssystem

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 2x + 2\lambda x = 2x(1 + \lambda) = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = -2y + 2\lambda y = 2y(-1 + \lambda) = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - 1.$$

## Lsg., Fortsetzung

Wegen der dritten Gleichung kann nicht  $x = y = 0$  gelten. Ist  $x \neq 0$ , muß wegen der ersten Gleichung  $\lambda = -1$  sein, aus der zweiten folgt dann  $y = 0$ . Setzt man  $y = 0$  in die dritte Gleichung ein, erhält man  $x = \pm 1$ . Ist hingegen  $y \neq 0$ , folgt aus der zweiten Gleichung  $\lambda = 1$ , die erste ergibt dann  $x = 0$ , mit Hilfe der dritten folgt dann  $y = \pm 1$ . Die kritischen Punkte der Lagrange Funktion sind also  $(x, y) = (\pm 1, 0)$  und  $\lambda = -1$ , bzw.  $(x, y) = (0, \pm 1)$

und  $\lambda = 1$ . Da  $\nabla g(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$  an diesen Stellen ungleich Null ist, kann man mit Satz 7.5 schließen, daß sich die Lösung der Aufgabe unter den gefundenen Stellen befindet. Wegen  $f(\pm 1, 0) = 1$  und  $f(0, \pm 1) = -1$  nimmt die Einschränkung von  $f$  auf den Einheitskreis in  $(\pm 1, 0)$  das Maximum, in  $(0, \pm 1)$  das Minimum an.

Der einfachste Typ einer *rekursiven Folge* hat die Form

$$x_n = f(x_{n-1}), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Es gibt also eine feste Regel, welche aus dem  $(n - 1)$ -ten Folgenglied das  $n$ -te Folgenglied erzeugt. Man kann daher  $x_n$  nur dann berechnen, wenn man  $x_{n-1}$  bereits kennt, was wiederum die Kenntnis von  $x_{n-2}$  voraussetzt, ... . Um eine derartige Folge eindeutig festzulegen, genügt es also nicht, nur die Rekursion  $f$  zu fixieren, sondern man muß auch einen *Startwert*, üblicherweise  $x_0$  oder  $x_1$  angeben. Ist die Konvergenz der Folge einmal gesichert, kann man oft die Rekursion zur Berechnung des Grenzwertes verwenden. Allerdings ist der Nachweis der Konvergenz wesentlich aufwendiger.

## Beispiel

Es sei  $a > 0$  und  $x_{n+1} = \frac{x_n^2 + a}{2x_n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Man berechne den Grenzwert der Folge  $(x_n)$  für einen beliebigen Startwert  $x_1 > 0$ .

## Lösung

Nehmen wir vorerst einmal an, die Folge konvergiere gegen  $x > 0$ . Dann gilt auch für hinreichend große  $n \in \mathbb{N}$ :  $x_n > 0$ . Man kann daher Satz 3.19 folgendermaßen anwenden :

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n^2 + a)}{\lim_{n \rightarrow \infty} 2x_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^2 + a}{2 \lim_{n \rightarrow \infty} x_n} = \frac{x^2 + a}{2x},$$

woraus

$$x = \pm \sqrt{a}$$

folgt.

## Lsg., Fortsetzung

Da wir von der Annahme  $x > 0$  ausgegangen sind, kommt als Grenzwert nur  $x = \sqrt{a}$  in Frage. Um die Konvergenz der Folge nachzuweisen, beachten wir zuerst, daß aus  $x_1 > 0$  auch  $x_2 > 0$  usw. folgt. Es gilt also  $x_n > 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Betrachten wir nun die Differenz

$$x_{n+1}^2 - a = \left(\frac{x_n^2 + a}{2x_n}\right)^2 - a = \frac{(x_n^2 - a)^2}{4x_n^2} \geq 0.$$

## Lsg., Fortsetzung

Dies zeigt die Gültigkeit von

$$x_n^2 \geq a, \quad n \geq 2$$

und zwar unabhängig von der Wahl des Startwertes. Mit Hilfe dieser Abschätzung kann man nun leicht die Monotonie der Folge zeigen:

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2 + a}{2x_n} \leq \frac{2x_n^2}{2x_n} = x_n, \quad \text{für } n \geq 2.$$

Insgesamt wurde somit gezeigt, daß unabhängig vom Startwert  $x_1 > 0$  die Folge ab dem 2. Glied monoton fällt und  $0 < x_n \leq x_2$  für  $n \geq 2$  zutrifft. Die Folge ist daher monoton und beschränkt, somit nach Satz 3.15 konvergent.

## Beispiel

Einem Patienten wird täglich eine feste Dosis eines Medikamentes verabreicht. Dem Aufbau einer bestimmten Konzentration des Wirkstoffes wirkt der Abbau des Medikamentes durch die Körperorgane (Ausscheidung) entgegen. Zur Messung der Konzentration wird dem Patienten jeden Tag eine Blutprobe entnommen. Der behandelnde Arzt interessiert sich natürlich für die Frage, ob sich unter diesen Umständen die Konzentration des Wirkstoffes überhaupt stabilisieren kann und wie hoch gegebenenfalls die tägliche Dosis des Medikamentes zu wählen ist, damit die Stabilisierung bei einem therapeutisch gewünschten Niveau stattfindet. Wir werden diese Fragen später beantworten.

## Lösung

Wir bezeichnen mit  $x_n$  die Konzentration des Medikamentes am Ende des  $n$ -ten Tages. Dies sei auch der Zeitpunkt, an dem das Medikament verabreicht wird. Zu Beginn des  $n$ -ten Tages waren somit  $x_{n-1}$  mg/l des Medikamentes vorhanden, wovon  $p\%$  also  $x_{n-1} \frac{p}{100}$  mg/l im Laufe des Tages ausgeschieden wurden. Dies führt auf folgendes Modell:

$$x_n = x_{n-1} - x_{n-1} \frac{p}{100} + d = \left(1 - \frac{p}{100}\right) x_{n-1} + d = qx_{n-1} + d,$$
$$q = \left(1 - \frac{p}{100}\right).$$

## Lsg., Fortsetzung

Offenbar gilt

$$0 < q < 1.$$

Die Medikamentenkonzentration am Ende des  $n$ -ten Tages wird also durch eine rekursive Folge beschrieben. Es sei darauf hingewiesen, daß dieses Modell bei jeder bestandsproportionalen Abnahme mit konstanter Zufuhr verwendet werden kann. In diesem Falle kann man die Rekursion auflösen:

## Lsg., Fortsetzung

es gilt doch

$$x_1 = qx_0 + d,$$

$$x_2 = qx_1 + d = q(qx_0 + d) + d = q^2x_0 + qd + d,$$

$$x_3 = qx_2 + d = q(q^2x_0 + qd + d) + d = q^3x_0 + q^2d + qd + d,$$

$$x_4 = qx_3 + d =$$

$$= q(q^3x_0 + q^2d + qd + d) = q^4x_0 + q^3d + q^2d + qd + d,$$

usw.

Allgemein gilt demnach

$$x_n = q^n x_0 + (q^{n-1} + q^{n-2} + \cdots + q + 1)d = q^n x_0 + \frac{1 - q^n}{1 - q} d. \quad (8.1)$$

## Lsg., Fortsetzung

Mit Hilfe von Satz 3.17 schließen wir nun wegen  $0 < q < 1$  auf die Konvergenz der Folge und finden

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{d}{1 - q} = x^*.$$

Schreibt man (8.1) in der Form

$$x_n = (x_0 - x^*)q^n + x^*,$$

erkennt man, daß die Folge  $(x_n)$  für  $x_0 < x^*$  monoton gegen  $x^*$  wächst und für  $x_0 > x^*$  monoton nach  $x^*$  fällt. Die Konzentration des Medikamentes im Blut spielt sich daher im Laufe der Zeit immer (mit welcher positiven Konzentration sie auch begonnen hat) auf dem Niveau  $x^*$  ein.

## Lsg., Fortsetzung

Bei einer täglichen Dosis von 15 mg, die durch eine Spritze direkt ins Blut gelangt, erzielt man bei einem durchschnittlichen Blutvolumen von 5 l bei einem Erwachsenen eine Konzentrationserhöhung von etwa  $\frac{15}{5} = 3$  mg/l. Beträgt die Ausscheidung 50% pro Tag, wird  $q = 1 - \frac{50}{100} = 0.5$ .

## Lsg., Fortsetzung

Die Modellgleichung lautet daher:

$$x_n = 0.5x_{n-1} + 3.$$

Das Niveau, auf dem sich die Konzentration einstellt, ist:

$$x^* = \frac{3}{0.5} = 6 \text{ mg/l.}$$

Ist anfänglich kein Medikament im Blut vorhanden, d.h.  $x_0 = 0$ , gilt

$$x_n = -6 \cdot 0.5^n + 6.$$

Nach wievielen Tagen ist das Niveau  $x^* = 6 \text{ mg/l}$  bis auf  $\pm 0.2 \text{ mg/l}$  erreicht? Eine leichte Rechnung ergibt  $x_4 = 5.3 \text{ mg/l}$  und  $x_5 = 5.8 \text{ mg/l}$ . Nach 5 Tagen hat sich also das Niveau bis auf eine tolerierbare Abweichung beim gewünschten Wert eingestellt.

### Beispiel (Einstellung eines Patienten auf ein Medikament)

Die Konzentration eines Medikamentes im Blut soll auf  $K = 12 \text{ mg/l}$  eingestellt werden. Dabei soll nun auch berücksichtigt werden, daß nicht gesamte verabreichte Dosis im Blut wirksam wird (etwa bei oraler Verabreichung).

## Lösung

Der Patient bekommt vorerst eine Tablette mit  $50\text{mg}$  des Medikamentes. Nehmen wir an, die Aufnahme ins Blut findet innerhalb einer Stunde statt. Dann wird eine Stunde nach der Tabletteneinnahme die Konzentration im Blut gemessen, z.B.  $5\text{ mg/l}$ . Dies entspricht dem Anteil des eingenommenen Medikamentes, der tatsächlich ins Blut gelangt, dies ist also die Konzentrationserhöhung  $d_0$ ,

$$d_0 = 5\text{mg/l}.$$

Eine zweite Konzentrationsmessung nach weiteren 24 Stunden ergebe den Wert  $x_1 = 2\text{mg/l}$ . Nach unserem Modell gilt der Zusammenhang

$$x_1 = qd_0, \quad \text{also } 2 = q5, \quad \text{d.h. } q = 0.4.$$

## Lsg., Fortsetzung

Die individuelle Abbaurate pro Tag des Patienten für das betreffende Medikament beträgt demnach  $p = 1 - q = 0.6$ , d.h. 60%. Wie groß muß nun die tägliche Konzentrationserhöhung im Blut sein, damit sich im Laufe der Zeit das Niveau  $k$  einstellen kann. Da schließlich  $K = x^* = \frac{d}{1-q}$  gelten soll, findet man

$$d = K(1 - q) = 12 \cdot 0.6 = 7.2 \text{ mg/l.}$$

Wie stark muß nun die Tablette dosiert werden, um eine Konzentrationserhöhung von 7.2 mg/l im Blut zu erreichen? Dazu macht man die Annahme, daß die Konzentrationserhöhung im Blut  $d$  proportional ist zur eingenommenen Tablettendosis  $D$ :

$$d = cD.$$

## Lsg., Fortsetzung

Der Proportionalitätsfaktor kann mit Hilfe der ersten Konzentrationsmessung bestimmt werden:

$$d_0 = cD_0, \quad \text{also } c = \frac{d_0}{D_0} = \frac{5}{50} = 0.1$$

Die gesuchte Tablettendosis erhält man nun aus

$$D = \frac{d}{c} = \frac{7.2}{0.1} = 72 \text{ mg.}$$

## Definition

Es sei  $(a_i)$  eine Folge komplexer Zahlen.

- 1  $s_n := \sum_{i=1}^n a_i$  heißt **n-te Partialsumme**.
- 2 Die Folge der Partialsummen  $(s_n)$  heißt **(unendliche) Reihe**, für welche man  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$  schreibt.
- 3 Die Reihe  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$  **konvergiert gegen  $s$**  genau dann, wenn die Folge der Partialsummen gegen  $s$  konvergiert, d.h. wenn  $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ .  
Man nennt den Grenzwert  $s$  der Partialsummenfolge **Summe** der Reihe.
- 4 Eine Reihe heißt **divergent**, wenn sie nicht konvergent ist.

Das Symbol  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$  bezeichnet oft nicht nur die Reihe selbst, sondern wird auch bei konvergenten Reihen für die Benennung der Reihensumme verwendet. Es sei ausdrücklich davor gewarnt, sich Reihen lediglich als unendliche Summation vorzustellen. Für Reihen gelten i.A. nicht alle für endliche Summen vertrauten Regeln. In den meisten Fällen ist es nicht möglich, die Summe einer Reihe zu exakt bestimmen. Man muß sich mit dem Nachweis der Konvergenz der Reihe zufrieden geben und kann dann allenfalls eine numerische Approximation der Summe berechnen. In diesem Falle ist der Konvergenznachweis wesentlich, da man auf dem Computer die Divergenz vieler Reihen nicht erkennen kann (warum?).

Aus der Definition der Konvergenz einer Reihe ergibt sich eine einfache notwendige Konvergenzbedingung: Ist nämlich  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$  konvergent, d.h.  $(s_n)$  konvergiert, dann konvergiert auch  $(s_{n-1})$  gegen den gleichen Grenzwert. Aus

$$s_n - s_{n-1} = \sum_{i=1}^n a_i - \sum_{i=1}^{n-1} a_i = a_n$$

ergibt sich dann zwangsläufig

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n - s_{n-1}) = 0.$$

## Satz

Konvergiert die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , dann gilt notwendigerweise

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Dieser Satz bedeutet, daß eine Reihe  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$  mit  $\lim_{i \rightarrow \infty} a_i \neq 0$  sicherlich nicht konvergieren kann.

Ein wichtiges Beispiel für eine konvergenten Reihe ist die geometrische Reihe:

### Satz

*Es sei  $q$  eine komplexe Zahl. Die **geometrische Reihe**  $\sum_{i=0}^{\infty} q^i$  konvergiert genau für  $|q| < 1$  und besitzt dann die Summe*

$$\sum_{i=0}^{\infty} q^i = \frac{1}{1 - q}.$$

## Beweis.

Für dieses Beispiel ist der Konvergenznachweis und die Berechnung der Summe sehr leicht: Nach Satz 6.1 ist die  $n$ -te Partialsumme der geometrischen Reihe für  $q \neq 1$  gegeben durch

$$s_n = \sum_{i=0}^n q^i = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}.$$

Diese Folge konvergiert nur für  $|q| < 1$  und besitzt den Grenzwert  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = -\frac{1}{q-1}$ . Für  $q = 1$  ist die Reihe offensichtlich divergent. □

Als nächstes betrachten wir den Prototyp einer divergenten Reihe:

### Satz

Die *harmonische Reihe*  $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$  ist divergent.

Es ist unmöglich, die Divergenz dieser Reihe durch die numerische Auswertung der Partialsummen festzustellen. Abbildung 66, welche die Partialsummen für  $n = 1000$  bis  $n = 1000000$  in Tausenderintervallen zeigt, legt die Vermutung nahe, daß die Reihe gegen einen Wert bei 15 konvergiert.

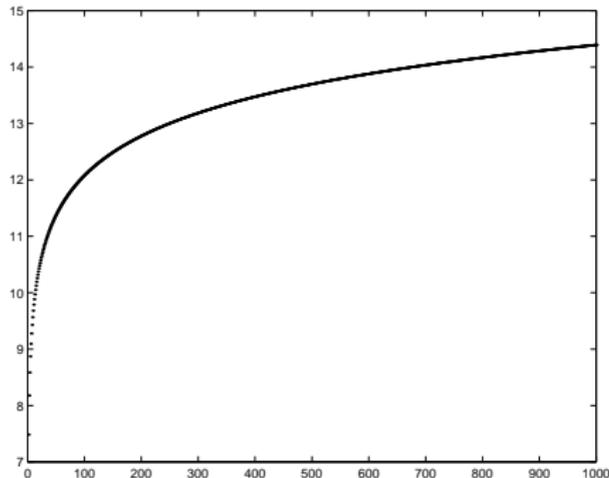


Abbildung: Harmonische Reihe

Die Divergenz dieser Reihe kann man sich durch folgende Überlegung plausibel machen: Offensichtlich ist die Folge der Partialsummen streng monoton steigend. Wir betrachten nun jene Partialsummen, welche gerade  $2^n$  Summanden erfassen:

$$n = 0: \quad s_1 = 1,$$

$$n = 1: \quad s_2 = 1 + \frac{1}{2},$$

$$n = 2: \quad s_4 = \underbrace{1 + \frac{1}{2}}_{s_2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = 1 + 2\frac{1}{2},$$

$$\begin{aligned} n = 3: \quad s_8 &= s_4 + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > 1 + 2\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) \\ &= 1 + 3\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Diese Rechnung legt die Vermutung nahe, daß allgemein folgende Abschätzung gilt

$$s_{2^n} > 1 + n \frac{1}{2}.$$

Es ist nicht schwer diese Abschätzung zu beweisen. Somit folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_{2^n} = \infty.$$

Wenn aber schon die Folge  $(s_{2^n})$  divergiert, muß erst recht die Ausgangsfolge  $(s_n)$  divergieren.

Viele Konvergenzkriterien beruhen letztlich auf einem Vergleich mit der geometrischen bzw. harmonischen Reihe. Häufig verwendet man eines der beiden folgenden Kriterien.

## Satz (Wurzelkriterium)

Für die Reihe  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ ,  $a_i \in \mathbb{C}$ , existiere

$$\rho = \lim_{i \rightarrow \infty} \sqrt[i]{|a_i|}.$$

Gilt

- $\rho < 1$ , dann ist die Reihe  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$  konvergent,
- $\rho > 1$ , dann ist die Reihe  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$  divergent,
- $\rho = 1$ , dann ist keine Aussage möglich.

## Beispiel

Für welche  $z \in \mathbb{C}$  ist die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k}$  konvergent?

## Lösung

Wir wenden das Wurzelkriterium mit  $a_i = \frac{z^i}{i}$  an. Man rechnet

$$\sqrt[k]{\frac{1}{k}|z|^k} = \sqrt[k]{\frac{1}{k}}|z| = \frac{|z|}{\sqrt[k]{k}}.$$

Mit Satz 3.17 folgt

$$\rho = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|z|}{\sqrt[k]{k}} = \frac{|z|}{\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{k}} = |z|.$$

Nach dem Wurzelkriterium konvergiert also die Reihe für  $|z| < 1$ , sie divergiert für  $|z| > 1$ , für  $|z| = 1$  gibt das Kriterium keine Information.

## Satz (Quotientenkriterium)

Für die Reihe  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ ,  $a_i \in \mathbb{C}$ , existiere

$$\rho = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{|a_{i+1}|}{|a_i|}.$$

*Gilt*

- $\rho < 1$ , dann ist die Reihe  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$  konvergent,
- $\rho > 1$ , dann ist die Reihe  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$  divergent,
- $\rho = 1$ , dann ist keine Aussage möglich.

## Beispiel

Wir untersuchen dieselbe Reihe mit Hilfe des Quotientenkriteriums.

## Lösung

Dazu betrachten wir die Quotienten

$$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \frac{|z|^{k+1} k}{|z|^k (k+1)} = \frac{k}{k+1} |z|,$$

woraus  $\rho = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = |z|$  folgt. Das Quotientenkriterium ergibt nun dasselbe Konvergenzverhalten der Reihe wie das Wurzelkriterium.

Der Anwendungsbereich des Wurzelkriteriums ist zwar etwas größer als der des Quotientenkriteriums, meist ist jedoch die Anwendung des Quotientenkriteriums einfacher. Noch einmal soll betont werden, daß mit Hilfe dieser Kriterien nur eine Aussage über Konvergenz oder Divergenz der Reihe gewonnen werden kann. Sie geben im Fall der Konvergenz keinerlei Information über den Wert der Reihe. Insbesondere besteht kein Zusammenhang zwischen der Hilfsgröße  $\rho$  und der Summe der Reihe.

Die Folge  $(1 + \frac{x}{n})^{\frac{1}{n}}$  konvergiert außerordentlich langsam. Für die praktische Berechnung von  $e^x$  ist Berechnung über die **Exponentialreihe** zweckmäßiger:

### Satz

Für alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt  $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ .

### Satz (Leibniz Kriterium)

Eine **alternierende** Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ ,  $a_n \geq 0$  für  $n \in \mathbb{N}$ ,  
konvergiert falls

- 1  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ,
- 2  $a_{n+1} \leq a_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  zutrifft.

Nach dem Leibniz Kriterium konvergiert also eine alternierende Reihe, falls die Folge der Absolutbeträge der Reihenglieder monoton gegen Null konvergiert.

### Beispiel

Wir betrachten die alternierende harmonische Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}.$$

### Lösung

Wegen  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$  und  $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$  folgt die Konvergenz dieser Reihe nach dem Leibniz Kriterium.

### Satz (Rechenregeln für konvergente Reihen)

Es seien  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ ,  $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$  konvergente Reihen und  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Dann konvergieren auch die Reihen  $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda a_i$  und  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i \pm b_i$ .

Insbesondere gilt

$$\textcircled{1} \quad \sum_{i=1}^{\infty} \lambda a_i = \lambda \sum_{i=1}^{\infty} a_i,$$

$$\textcircled{2} \quad \sum_{i=1}^{\infty} a_i \pm b_i = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \pm \sum_{i=1}^{\infty} b_i$$

Mit Hilfe dieses Satzes kann man die Konvergenzuntersuchung komplizierterer Reihen auf die Untersuchung der Konvergenz einfacherer Reihen zurückführen.

### Beispiel

Konvergiert die Reihe  $\sum_{i=1}^{\infty} \left( \frac{1}{i^2} - \frac{2^i}{i!} + \frac{1}{2^i} \right)$ ?

## Lösung

Wir wissen bereits, daß die Reihen  $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2}$  und  $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i}$  konvergieren. Es ist also nur mehr  $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{2^i}{i!}$  zu untersuchen. Wir wenden das Quotientenkriterium an und berechnen daher

$$\frac{|a_{i+1}|}{|a_i|} = \frac{2^{i+1}}{(i+1)!} \frac{i!}{2^i} = \frac{2}{i+1} \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0.$$

Nach dem Quotientenkriterium konvergiert diese Reihe. Als Summe konvergenter Reihen konvergiert daher auch die Ausgangsreihe.

Der Wert einer *endlicher* Summen ist unabhängig von der Reihenfolge, in der die Summation ausgeführt wird. Dies ist bei Reihen im Allgemeinen *nicht* der Fall.

### Definition

- 1 Eine Reihe  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$  heißt **absolut konvergent** genau dann, wenn die Reihe  $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|$  konvergiert.
- 2 Eine Reihe  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$  heißt **bedingt konvergent** genau dann, wenn die Reihe konvergiert, aber nicht absolut konvergiert.

Die alternierende harmonische Reihe ist ein Beispiel einer bedingt konvergenten Reihe. Unter einer *Umordnung* einer Reihe  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$  versteht man eine Reihe, in der dieselben Summanden  $a_i$ , allerdings in geänderter Reihenfolge auftreten.

### Satz

*Jede absolut konvergente Reihe ist konvergent. Alle Umordnungen einer absolut konvergenten Reihe sind absolut konvergent und besitzen dieselbe Summe.*

Die Summe einer absolut konvergenten Reihe ist demnach unabhängig von der Reihenfolge der Summation. Absolut konvergente Reihen verhalten sich also wie endliche Summen. Für bedingt konvergente Reihen gilt jedoch folgendes Resultat:

### Satz (Riemann'scher Umordnungssatz)

Die Reihe  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$  sei bedingt konvergent und  $x \in \mathbb{R}$  beliebig gewählt. Dann gibt es eine Umordnung der Reihe  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ , welche (bedingt) gegen  $x$  konvergiert.

Zur Illustration des Riemannsches Umordnungssatzes deuten wir eine Umordnung der alternierenden harmonischen Reihe an, welche gegen Null konvergiert. Dazu zerlegen wir die Folge  $(a_i) = ((-1)^{i+1} \frac{1}{i})$  in die Teilfolgen der positiven und negativen Glieder  $(\frac{1}{2i+1})$  bzw.  $(\frac{1}{2i})$ . Sukzessive addiert man nun so viele positive Terme, bis zum ersten Male die Partialsumme positiv ist und subtrahiert dann solange Terme der negativen Teilfolge, bis die neue Partialsumme negativ ist, usw.

Da die Teilfolgen der positiven und negativen Reihenglieder Nullfolgen sind, ist sichergestellt, daß im Laufe des Verfahrens der Unterschied zum gewünschten Grenzwert beliebig klein wird. Im konkreten Beispiel führt diese Vorgangsweise auf die Umordnung

$$0 = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{3} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} - \frac{1}{14} - \frac{1}{16} + \frac{1}{5} - \dots$$

Wird die Konvergenz einer Reihe mit dem Vergleichs-, Wurzel- oder Quotientenkriterium nachgewiesen, dann ist die Reihe sogar absolut konvergent.

Es wurde bereits gezeigt, daß  $\sum_{i=0}^{\infty} x^i$  genau für  $|x| < 1$  gegen  $\frac{1}{1-x}$  konvergiert. Die Abbildung  $x \rightarrow \frac{1}{1-x}$  wird daher auf dem Intervall  $(-1, 1)$  durch die Reihe  $\sum_{i=0}^{\infty} x^i$  dargestellt.

### Definition (Potenzreihe)

Es sei  $(a_k) \subset \mathbb{C}$ ,  $z_0 \in \mathbb{C}$ . Die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$  heißt **Potenzreihe** mit Entwicklungszentrum  $z_0$ . Die Konstanten  $a_k$  nennt man **Koeffizienten** der Potenzreihe.

## Bemerkung

- 1  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$  konvergiert trivialerweise für  $z = z_0$ .
- 2 Man interessiert sich daher für folgende Fragen:
  - Für welche weiteren Werte von  $z$  konvergiert die Potenzreihe?
  - Was ist die Summenfunktion der Potenzreihe?
  - Kann man umgekehrt eine gegebene Funktion in eine Potenzreihe entwickeln?
- 3 Potenzreihenentwicklungen von Funktionen sind deshalb von großer Bedeutung, da erst dadurch zahlreiche Funktionen einer numerischen Auswertung zugänglich werden. Man denke etwa an die Auswertung der Arcusfunktionen.

## Beispiel

$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$  konvergiert für alle  $z \in \mathbb{C}$ .

## Lösung

Anwendung des Quotientenkriteriums ergibt

$$\frac{|z|^{k+1}}{(k+1)!} \cdot \frac{k!}{|z|^k} = \frac{|z|}{k+1} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

## Beispiel

$\sum_{k=0}^{\infty} k^k z^k$  konvergiert nur für  $z = 0$ .

## Lösung

Anwendung des Wurzelkriteriums ergibt

$$\sqrt[k]{k^k |z|^k} = k|z| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \begin{cases} 0 & \text{für } z = 0 \\ \infty & \text{für } z \neq 0. \end{cases}$$

## Beispiel

$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{(z-1)^k}{k}$  konvergiert für  $|z-1| < 1$  und divergiert für  $|z-1| > 1$ .

## Lösung

Anwendung des Wurzelkriteriums ergibt nämlich

$$\sqrt[k]{\frac{|z-1|^k}{k}} = |z-1| \frac{1}{\sqrt[k]{k}} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} |z-1|.$$

Für  $z = 2$  erhält man die konvergente, alternierende harmonische Reihe,  $z = 0$  führt auf die divergente harmonische Reihe.

Diese Beispiele veranschaulichen das charakteristische Konvergenzverhalten von Potenzreihen:

### Satz

Auf jede Potenzreihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$  trifft genau eine der folgenden Aussagen zu:

- 1 Die Potenzreihe konvergiert nur im Entwicklungszentrum.
- 2 Die Potenzreihe konvergiert für alle  $z \in \mathbb{C}$ .
- 3 Es gibt genau eine Zahl  $R > 0$ , sodaß die Potenzreihe für  $|z - z_0| < R$  absolut konvergiert und für  $|z - z_0| > R$  divergiert. Für  $|z - z_0| = R$  ist keine Aussage möglich.

Der Kreis  $K(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$  heißt **Konvergenzkreis**,  $R$  nennt man **Konvergenzradius**. Sind nur reelle Werte von  $z$  von Interesse, nennt man  $(z_0 - R, z_0 + R)$  **Konvergenzintervall**).

Der Konvergenzradius einer Potenzreihe kann wie in den Beispielen angedeutet mit Hilfe des Wurzel-, bzw. Quotientenkriteriums berechnet werden:

### Satz

Für eine Potenzreihe existiere  $\rho = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}$  bzw.

$\rho = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}$ . Der Konvergenzradius  $R$  ist dann gegeben durch

$$R = \frac{1}{\rho} \quad \text{für } \rho > 0$$

$$R = \infty \quad \text{für } \rho = 0$$

$$R = 0 \quad \text{für } \rho = \infty$$

Die Potenzreihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$  habe den Konvergenzradius  $R > 0$ . Man kann dann folgende Abbildung definieren:

$$f: \begin{cases} K(z_0, R) & \rightarrow \mathbb{R} \\ z & \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k, \end{cases}$$

Man sagt, die Abbildung  $f$  wird durch die Potenzreihe dargestellt. Im Allgemeinen ergibt eine Potenzreihe nur eine lokale Darstellung einer Funktion. Durch eine geeignete Wahl des Entwicklungszentrums kann man manchmal den Konvergenzradius vergrößern. Als Faustregel gilt: der Konvergenzkreis ist der größte Kreis mit Mittelpunkt  $z_0$ , in dessen Innerem keine "Singularität" der Funktion liegt:

## Beispiel

Wir verwenden die geometrische Reihe, um  $f(x) = \frac{1}{x}$  in eine Potenzreihe um  $x_0 \neq 0$  zu entwickeln:

## Lösung

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x - x_0 + x_0} = \frac{1}{x_0} \frac{1}{1 + \frac{x-x_0}{x_0}} = \frac{1}{x_0} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{x-x_0}{x_0}\right)^k$$

Die Reihe konvergiert für  $|x - x_0| < |x_0|$ . Der Konvergenzradius ist also gerade so groß, daß die "Singularität"  $x = 0$  am Rand des Konvergenzintervalles liegt.

## Beispiel

Entwickelt man  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$  mit Hilfe der geometrischen Reihe in eine Potenzreihe, erhält man

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}, \quad \text{für } |x| < 1$$

Betrachtet man die Funktion  $f$  nur in  $\mathbb{R}$  ist nicht einsichtig, warum die Potenzreihe nur auf  $(-1, 1)$  konvergiert. Dies wird erst verständlich, wenn man  $f$  ins Komplexe fortsetzt. Die Funktion  $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$  ist nämlich für  $z = i$  nicht definiert.

## Satz

*Eine durch eine Potenzreihe dargestellte Funktion ist im Inneren des Konvergenzintervalles stetig.*

## Satz (Identitätssatz)

*Gibt es eine Folge  $(x_n)$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$  derart, dass für zwei Potenzreihen mit Entwicklungszentrum  $x_0$*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x_n - x_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x_n - x_0)^k$$

*für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt, dann stimmen alle Koeffizienten überein:*

$$a_k = b_k \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

Stimmen demnach zwei Funktionen, welche durch eine Potenzreihe um  $x_0$  darstellbar sind, auf einer einzigen nach  $x_0$  konvergenten Folge überein, so sind sie bereits auf dem gesamten Konvergenzintervall gleich.

## Einige wichtige Potenzreihen:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\ln(1-x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}, \quad -1 \leq x < 1$$

$$\arctan x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}, \quad |x| \leq 1$$

Potenzreihen können bei der Berechnung von Grenzwerten sehr nützlich sein:

### Beispiel

$$\textcircled{1} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1,$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

$$\textcircled{3} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0.$$

## Lösung

Man beachte, daß alle Grenzwerte auf unbestimmte Ausdrücke führen, so daß die Standardmethoden versagen. Eine Möglichkeit, derartige Grenzwerte anzugehen, besteht darin, den Zähler in eine Reihe zu entwickeln. Dies ergibt

$$\begin{aligned}\frac{e^x - 1}{x} &= \frac{1}{x} \left( 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots - 1 \right) = \frac{1}{x} \left( x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \dots \right) \\ &= 1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \dots \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\sin x}{x} &= \frac{1}{x} \left( x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \mp \dots \right) \\ &= 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} \mp \dots \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\cos x - 1}{x} &= \frac{1}{x} \left( 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \mp \dots - 1 \right) = \frac{1}{x} \left( -\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \mp \dots \right) \\ &= -\frac{x}{2!} + \frac{x^3}{4!} \mp \dots \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0.\end{aligned}$$

Die Summenfunktion einer Potenzreihe hat weitere bemerkenswerte Eigenschaften:

### Satz

*Funktionen, welche durch Potenzreihen dargestellt werden können, sind im Inneren des Konvergenzintervalles  $(x_0 - R, x_0 + R)$  differenzierbar und es gilt*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k, \quad f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k k (x - x_0)^{k-1}.$$

*Potenzreihen dürfen also im Inneren des Konvergenzintervalles termweise differenziert werden. Die differenzierte Potenzreihe hat denselben Konvergenzradius wie die ursprüngliche Reihe.*

## Korollar

*Funktionen, welche durch Potenzreihen dargestellt werden können, sind auf dem Konvergenzintervall  $C^\infty$ -Funktionen.*

## Beispiel

Als Anwendung dieses Satzes berechnen wir die Ableitung der Exponentialfunktion.

## Lösung

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$
$$\frac{d}{dx} e^x = \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{x^{k-1}}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$$

Die Exponentialfunktion besitzt also die bemerkenswerte Eigenschaft, daß sie mit ihrer Ableitung übereinstimmt.

Auf analoge Weise findet man

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\frac{d}{dx} \sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(2k+1)x^{2k}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \cos x.$$

Wir wenden uns nun der Frage zu, wie man eine gegebene Funktion  $f$  in eine Potenzreihe entwickeln kann. Wir wissen bereits, daß dies nur für  $C^\infty$ -Funktionen möglich sein kann. Es wurde bereits bemerkt und bei der Konstruktion des Newton Verfahrens benützt, daß die Tangente lokal eine sehr gute Approximation an die Funktion  $f$  darstellt. Die Tangente wird beschrieben durch ein Polynom 1. Grades, welches an der Stelle  $x = x_0$  denselben Funktionswert und dieselbe Ableitung wie  $f$  besitzt. Man kann nun vermuten, daß die Approximation verbessert werden kann, wenn man durch Polynome höheren Grades so approximiert, daß auch die höheren Ableitungen an der Stelle  $x$  mit den entsprechenden Ableitungen von  $f$  übereinstimmen.

Will man beispielsweise mit Polynomen vom Grad  $n \geq 1$  approximieren, also  $p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ , benötigt man  $n + 1$  Bedingungen, um die  $n + 1$  unbekanntenen Koeffizienten  $a_i$ ,  $i = 0, \dots, n$ , von  $p$  festzulegen. Es ist daher naheliegend, zu fordern

$$\begin{aligned} p(x_0) &= f(x_0), \\ p^{(k)}(x_0) &= f^{(k)}(x_0), \quad k = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Löst man das resultierende Gleichungssystem, erhält man die gesuchten Koeffizienten,

$$\begin{aligned} a_0 &= f(x_0), \\ a_k &= \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, \quad k = 1, \dots, n, \end{aligned} \tag{8.2}$$

und somit das approximierende Polynom

$$\mathcal{T}_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k.$$

Zur Vereinfachung der Darstellung wurde

$$f^{(0)}(x_0) = f(x_0)$$

gesetzt. Man nennt  $\mathcal{T}_n$  **Taylor Polynom vom Grad  $n$  um  $x = x_0$** .

Die besondere Bedeutung der Taylorpolynome rührt daher, daß es eine einfache Darstellung für den Approximationsfehler

$f(x) - \mathcal{T}_n(x)$  gibt:

## Satz (Satz von Taylor)

Die Abbildung  $f$  besitze auf einem Intervall  $I = (a, b)$  zumindest  $n + 1$  Ableitungen. Ferner sei  $x_0 \in I$  und  $\mathcal{T}_n$  das zugehörige Taylorpolynom vom Grad  $n$  um  $x = x_0$ . Dann gibt es für jedes  $x \in I$  eine Stelle  $\xi$  zwischen  $x$  und  $x_0$ , sodaß die Darstellung

$$f(x) = \mathcal{T}_n(x) + \mathcal{R}_{n+1}(x),$$
$$\mathcal{R}_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}.$$

gilt. Man nennt  $\mathcal{R}_n$  **Restglied** der Ordnung  $n$ .

Man beachte, daß der Satz von Taylor keinen näheren Hinweis liefert, wo die Zwischenstelle  $\xi$  liegt, sodaß der genaue Wert des Restgliedes nicht bekannt ist. Meist kann das Restglied jedoch auf dem Intervall mit den Randpunkten  $x$  und  $x_0$  abgeschätzt werden und damit der Approximationsfehler, der entsteht, wenn man  $f(x)$  durch  $\mathcal{T}_n(x)$  ersetzt, nach oben begrenzt werden. Abbildung 67 veranschaulicht die Güte der Approximation des Sinus auf  $[0, \frac{\pi}{2}]$  durch Taylorpolynome um  $x_0 = 0$ .

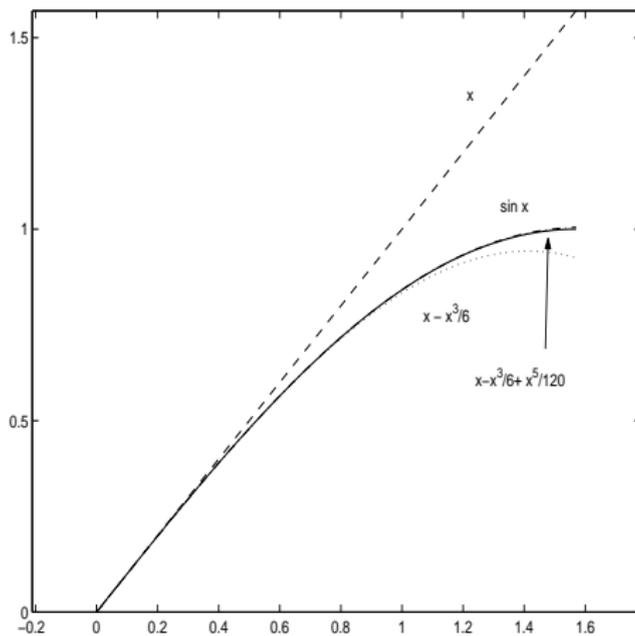


Abbildung:

Mit

$$f(0) = \sin 0 = 0,$$

$$f'(0) = \cos 0 = 1$$

$$f''(0) = -\sin 0 = 0,$$

$$f^{(3)}(0) = -\cos 0 = -1$$

$$f^{(4)}(0) = \sin 0 = 0,$$

$$f^{(5)}(0) = \cos 0 = 1$$

findet man

$$\mathcal{T}_1(x) = x,$$

$$\mathcal{T}_2(x) = \mathcal{T}_1(x),$$

$$\mathcal{T}_3(x) = x - \frac{x^3}{3!},$$

$$\mathcal{T}_4(x) = \mathcal{T}_3(x)$$

$$\mathcal{T}_5(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

Die Approximation durch das Taylorpolynom vom Grad 5 fällt bereits im Rahmen der Zeichengeneuigkeit mit dem Sinus zusammen. Indem man also den Grad des approximierenden Taylorpolynoms erhöht, kann man die Güte der Approximation verbessern. Wenn die Abbildung  $f$  eine  $C^\infty$ -Funktion ist, kann man Taylorpolynome beliebig hohen Grades betrachten. Wir werden diesen Aspekt später noch einmal aufgreifen.

Wenn dann noch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{R}_n(x) = 0$$

für alle  $x \in K(x_0, R)$  gilt, folgt

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{T}_n(x) + \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{R}_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{T}_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k.$$

In diesem Falle wird also  $f$  auf dem Intervall (Kreis)  $K(x_0, R)$  durch die Reihe

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \quad (8.3)$$

dargestellt. Man nennt diese Reihe **Taylorreihe von  $f$  um  $x = x_0$** . Eine Taylorreihe ist also nichts anderes als eine Potenzreihe und umgekehrt kann man die Koeffizienten einer Potenzreihe mit Hilfe der Formeln (8.2) berechnen.

## Beispiel

Man berechne die Taylorreihe (Potenzreihe) von  $f(x) = e^{\lambda x}$  um  $x_0 = 0$ .

## Lösung

Um die Formeln (8.2) anwenden zu können, benötigt man das allgemeine Bildungsgesetz für die  $k$ -te Ableitung. In diesem Beispiel ist dies sehr einfach:

$$f'(x) = \lambda e^{\lambda x}, \quad f''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x}, \quad f'''(x) = \lambda^3 e^{\lambda x}, \dots$$

## Lsg., Fortsetzung

Jede Ableitung erzeugt den Faktor  $\lambda$ , es gilt also (dies kann man natürlich auch beweisen)

$$f^{(k)}(x) = \lambda^k e^{\lambda x}, \quad \text{also } f^{(k)}(0) = \lambda^k.$$

Setzt man dies in (8.3) ein ergibt sich die gesuchte Darstellung ( $x_0 = 0$ )

$$e^{\lambda x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} x^k.$$

## Lsg., Fortsetzung

Daß die Exponentialfunktion tatsächlich durch die Reihe dargestellt wird, folgt aus der Diskussion des Restgliedes, welche hier jedoch zu weit führen würde.