

# Einführende Mathematische Modellierung

a.o.Univ.Prof. Mag.Dr. Stephen Keeling

<https://imsc.uni-graz.at/keeling/>

Dokumentation und Literatur:

<https://imsc.uni-graz.at/keeling/teaching.html>

# Table of Contents I

## Einführung

- Was ist Modellierung?
- Schritte der Modellierung
- Modelltypen
- Zwecke der Modellierung

## Empirische Modelle und Dimensionsanalyse

- Regression
  - Lineare Regression
  - Robuste Zielfunktionen
- Nicht Lineare Regression
- Die Logistische Funktion
- Einführung in Optimierung
- Parameterabschätzung
- Bevorzugte Eigenschaften eines Modells
- PCA/ICA
- Modelle durch Dimensionsanalyse
- Dimensionslose Form eines Modells
- Theorie der Dimensionsanalyse
- Buckingham Pi Satz
- Bestimmung der Atombombe-Energie

## Deterministische Strukturelle Modelle

- Logistisches Wachstum
- Eigenschaften von Gleichgewichten
- Stabilität eines Gleichgewichts
- Potential-Landschaft
- Lyapunov Funktion
- Stabilität für Kontinuierliche Dynamische Systeme
- Stabilität einer Dynamischen Lösung
- Chemische Kinetik
- Chemische Bifurkationen
- Masse-Feder-System
- Reibungskräfte
- Gedämpfte Federschwingungen

# Table of Contents II

- Konkurrierende Spezies
- Räuber-Beute
- Strukturelle Stabilität
- Attractoren und Abweiser
- Grenzyklen
- Das *Peak Oil* Modell
- Das WTC Modell
- Wärmeaufnahme eines Erdwärmesystems
- Parallele Kollektoren
- Wärmeabgabe eines Erdwärmesystems
- Effekt der Luftblasen in Rohren
- Rudern Dynamik
- Globale Stabilität
- Chaos
- Seltsame Attraktoren für Chaotische Systeme
- Diskrete Modelle
- Lachs Dynamik
- Stabilität für Diskrete Dynamische Systeme
- Verkehr Dynamik
- Stabilität für Verkehr Dynamik

## Modelle für Optimierung eines Systems

- Vorteil von Doppelverglasung
- Einführung in die Strömungsmechanik
- Vorteil von kreisförmigen Rohren
- Optimale Steuerung und Utilität
- Optimierung einer Fischfangflotte
- Einführung in die Spieltheorie
- Gemischte Strategien
- Umweltpolitik
- Entscheidungstheorie
- Nash Gleichgewicht
- Pareto Optimalität
- Sicherheitsstrategien

# Table of Contents III

- Gefangenendilemma
- Evolutionär Stabile Strategien
- Nash Verhandlungsschema

## Stochastische Modelle

- Stochastische Prozesse
- Markovsche Eigenschaft und Bayessche Regel
- Populationsdynamik
- Todesprozess
- Geburtsprozess
- Poissonsche Verteilung
- Länge einer Warteschlange
- Wartezeit bei der Warteschlange
- Diskrete Probabilistische Modelle
- Optimale Entscheidung
- Optimalen Warenkauf

## Probabilistische Physik

- Verteilungen von Teilchen
- Geleebohnen im Glasgefäß
- Viele Münzen Werfen
- Viele Würfel Werfen
- Viele Teilchen Zerfallen
- Viele Stationäre Teilchen im Behälter
- Viele Energetische Teilchen im Behälter
- Diffusion und Brownsche Bewegung
- Quanten- und Klassische Materie



# Was ist Modellierung?

- ▶ Eine Vorlesung über die Bedeutung der Mathematik in der Medizin
  - ▶ ist vor kurzem in Graz zu Stande gekommen, und
  - ▶ am Anfang hat es die Anforderung gegeben:

*Bitte keine Modelle.*

- ▶ Diese zu erfüllen, wäre aber nicht möglich gewesen.

*Warum?*

- ▶ Bei der Steirischen Modellierungswoche wird von Neulingen oft gefragt:

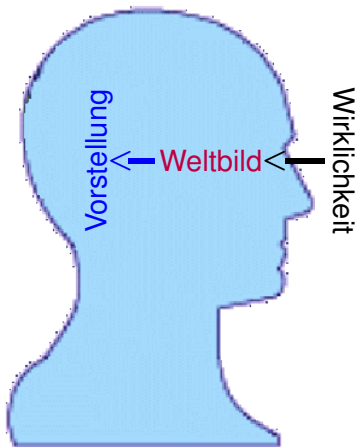
- ▶ Hat die Projektgruppe die *richtige Antwort* der Problemstellung erreicht?
  - ▶ Aber diese passt zum Kontext nicht.

*Warum?*



# Was ist Modellierung?

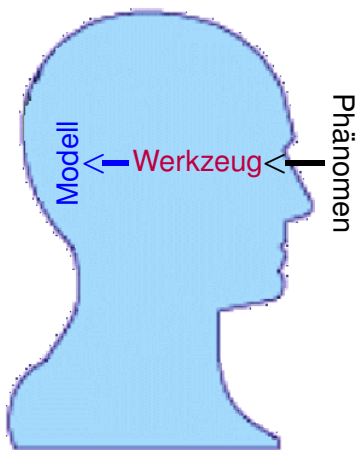
- ▶ Erste Antwort: **Jeder modelliert täglich!**



- ▶ Ein neugeborenes Kind wird zuerst mit Wahrnehmungen überflutet.
- ▶ Langsam müssen diese Wahrnehmungen effizienter bearbeitet werden, damit das Kind funktionieren kann.
- ▶ Die Welt wird vereinfacht: Je nach Annahmen werden die meisten Details weggekehrt, die wichtigsten Sachen betont.
- ▶ Der Mensch entwickelt ein *Weltbild* – einen Filter – mit dem die Wirklichkeit in eigene Vorstellungen abgebildet wird.
- ▶ Ob die Abbildung exakt ist, ist nicht wichtig, sondern ob sie für gewisse Zwecke ausreichend genau ist.

# Was ist Modellierung?

- ▶ Mathematisch: **Ablauf ist ähnlich!**



- ▶ Ein Modellierer kann mit Details einer Aufgabe überflutet werden.
- ▶ Diese müssen prioritiert werden.
- ▶ Z.B. wie fährt man von A nach B in Graz?
  - ▶ Das genaueste Modell ist die Stadt Graz selbst.
  - ▶ Ein Stadtplan oder eine Skizze reichen für das Ziel.
- ▶ Die Welt wird **vereinfacht**, man trifft **Annahmen**.
- ▶ Man verwendet das eigene *Werkzeug*, um ein Phänomen in ein Modell **abzubilden**.
- ▶ Ob die **Abbildung** exakt ist, ist nicht wichtig, sondern ob sie für gewisse Zwecke ausreichend genau ist.

# Was ist Modellierung?

- ▶ Eine Vorlesung über die Bedeutung der Mathematik in der Medizin
  - ▶ ist vor kurzem in Graz zu Stande gekommen, und
  - ▶ am Anfang hat es die Anforderung gegeben:  
*Bitte keine Modelle.*
  - ▶ Diese zu erfüllen, wäre aber nicht möglich gewesen.



## Warum?

Weil Mathematik nur **Hilfsmittel** sein kann, um **medizinische Phänomene abzubilden**, und solche Abbildungen sind **per Definition Modelle**.

- ▶ Bei der Steirischen Modellierungswoche wird von Neulingen oft gefragt:
  - ▶ Hat die Projektgruppe die  
*richtige Antwort*  
der Problemstellung erreicht?
  - ▶ Aber diese passt zum Kontext nicht.



## Warum?

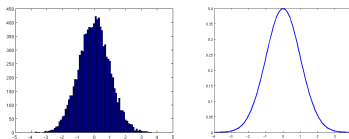
Das Modell ist eine **Abbildung** eines Phänomens. Ob die Abbildung **exakt** ist, ist **nicht wichtig**, sondern ob sie für gewisse **Ziele (?) ausreichend** ist.

# Was ist Modellierung?

- ▶ Denkweise **aufzugeben**: Die Gleichungen in Lehrbüchern stellen entdeckte *natürliche Gesetze* dar.
- ▶ Beispiele: Sind diese unbedingt gültig?

$$E = mc^2 \quad \text{oder} \quad F = ma \quad ?$$

- ▶ Beispiel: Proben des eigenen Gewichts werden täglich gemessen und mit einem Histogramm (links) dargestellt:



Ist die tiefere *Realität* eine glatte angenäherte Kurve (rechts)?  
Was *sind* Wahrscheinlichkeiten überhaupt?

- ▶ Hauptpunkt: Diese Beschreibungen sind nur **provisorische Modelle**, die **Gültigkeitsgrenzen** haben.
- ▶ Kann ein Modell **je vollständig und endgültig** sein?

# Schritte der Modellierung

Beispiel: Der Dokumentarfilm *Supersize Me!*

- ▶ Ein Mann isst nur beim McDonalds
  - ▶ 30 Tage lang, dreimal täglich,
  - ▶ jedes Produkt mindestens einmal,
  - ▶ zur Frage "Supersized?" antwortet er immer "Ja",
  - ▶ weniger als 5000 Schritte täglich,
  - ▶ konsumiert ungefähr 5000 kcal/Tag.
- ▶ Er nimmt zu: 84kg → 95.5kg.
  - ▶ Hätte man die Zunahme voraussagen können?
  - ▶ Wenn er das Programm fortgesetzt hätte, was wäre das Fließgleichgewicht gewesen?

Zum Modellieren:

- ▶ Wie beginnt man überhaupt, um ein Modell zu erstellen?
- ▶ Gibt es geeignete Prinzipien, die man verwenden kann?
- ▶ Gibt es eine bekannte Wegbeschreibung?

# Schritte der Modellierung

Für den Dokumentarfilm *Supersize Me!*

Zur Erinnerung, man vereinfacht und trifft Annahmen, je nachdem, was die Ziele sind:

- ▶ Ziel 1: Die Zunahme voraussagen.
- ▶ Ziel 2: Ein Fließgleichgewicht voraussagen.

Zur Erinnerung, man prioritiert die Details der Aufgabe.

- ▶ Der Filmmacher nimmt über 30 Tage zu: 84kg → 95.5kg.
- ▶ konsumiert ungefähr 5000 kcal/Tag,
- ▶ weniger als 5000 Schritte täglich, d.h. keinen Sport.

# Schritt 1 der Modellierung

**Schritt 1:** Definition eines physikalischen Bereichs,



Sammlung der Annahmen,

- ▶ **Möglichst einfach.** Es gibt derzeit noch keinen Grund, etwas Komplizierteres zu machen:
- ▶ Zufluss, Abfluss und Körper sind **homogene Einheiten**.
- ▶ Weitere physikalische Details werden **vernachlässigt**, z.B.
  - ▶ Zellen im Körper,
  - ▶ Sternen im Himmel,
  - ▶ Anzahl der Mitarbeiter im McDonalds,
  - ▶ Uhrzeiten der Mahlzeiten, etc.



## Schritt 2 der Modellierung

**Schritt 2:** Symbolische Beschreibung des Systems,



Identifikation eines zutreffenden Prinzips: **Massenbilanz**

$$\text{Massenzunahme im Körper (1 Tag)} = \text{Massenzufluss (1 Tag)} - \text{Massenabfluss (1 Tag)}$$

## Schritt 2 der Modellierung

$$\begin{array}{l} \text{Massenzunahme} \\ \text{im Körper (1 Tag)} \end{array} = \begin{array}{l} \text{Massenzufluss} \\ (1 \text{ Tag}) \end{array} - \begin{array}{l} \text{Massenabfluss} \\ (1 \text{ Tag}) \end{array}$$

Mathematische Formulierung des Prinzips:

$$m(1) - m(0) = z(0) - a(0)$$

wobei

$m(1)$  = Masse am Ende des 1. Tages

$m(0)$  = Masse am Anfang (84kg)

$z(0), a(0)$  = Zufluss, Abfluss für den bevorstehenden 1. Tag

und ähnlich für die nachfolgenden Tage.

Symbolische Antworten der Fragestellungen:

$$m(30) = ? \quad m(\infty) = ?$$

## Schritt 2 der Modellierung

Detailliertere Beschreibung des Systems: **Zufluss?**

- ▶ **Energiezufluss** ist 5000 kcal/Tag (gegeben).
- ▶ **Massenzufluss?** Konversion durch Dichte, kcal/kg?
- ▶ Bekannte Dichten:

$$\text{Fett } 9 \frac{\text{kcal}}{\text{g}}, \quad \text{Kohlenhydrate } 4 \frac{\text{kcal}}{\text{g}}, \quad \text{Eiweiss } 4 \frac{\text{kcal}}{\text{g}}$$

- ▶ **Dichte für McDonalds Mischung:**

$$7.8 \frac{\text{kcal}}{\text{g}} = 7800 \frac{\text{kcal}}{\text{kg}}$$

- ▶ **Massenzufluss:** Energiezufluss / Dichte

$$5000 \frac{\text{kcal}}{\text{Tag}} / 7800 \frac{\text{kcal}}{\text{kg}} = \frac{5000}{7800} \frac{\text{kg}}{\text{Tag}}$$

## Schritt 2 der Modellierung

Detailliertere Beschreibung des Systems: **Abfluss?**

- Daumenregel:

$$\text{kcal Bedarf pro Tag} = (21.6 \times \text{Masse}) \frac{\text{kcal}}{\text{Tag}}$$

- Also wenn  $(21.6 \times \text{Masse})$  kcal/Tag konsumiert wird, wird genau so viel Energie verloren, und die Masse bleibt gleich.
- Wenn mehr konsumiert wird, geht trotzdem so viel Energie verloren, d.h.

$$\text{Energieabfluss} = (21.6 \times \text{Masse}) \frac{\text{kcal}}{\text{Tag}}$$

- Mit Konversion durch Dichte

$$\begin{aligned} \text{Massenabfluss} &= \text{Energieabfluss} / \text{Dichte} = \\ (21.6 \times \text{Masse}) \frac{\text{kcal}}{\text{Tag}} / 7800 \frac{\text{kcal}}{\text{kg}} &= \left( \frac{21.6}{7800} \times \text{Masse} \right) \frac{\text{kg}}{\text{Tag}} \end{aligned}$$

- Insbesondere für den bevorstehenden 1. Tag,

$$a(0) = \frac{21.6}{7800} \times m(0) = \frac{21.6}{7800} \times 84$$

## Schritt 3 der Modellierung

**Schritt 3:** Lösung des mathematischen Problems – *numerisch!*

- Zusammenfassung für den 1. Tag,

$$m(1) = m(0) + z(0) - a(0) = 84 + \frac{5000}{7800} - \frac{21.6}{7800} \times 84 = 84.4084$$

- für den 2. Tag,

$$\begin{aligned} m(2) &= m(1) + z(1) - a(1) = 84.4084 + \frac{5000}{7800} - \frac{21.6}{7800} \times 84.4084 \\ &= 85.8157 \end{aligned}$$

- usw, bis zum 30. Tag,

$$m(30) \approx 95.8\text{kg}.$$

- Im Fließgleichgewicht ändert sich die Masse nicht, also gilt

$$0 = z(\infty) - a(\infty) = \frac{5000}{7800} - \frac{21.6}{7800} \times m(\infty)$$

oder

$$m(\infty) = \frac{5000}{7800} / \frac{21.6}{7800} \approx 231\text{kg}$$

## Schritt 3 der Modellierung

**Schritt 3:** Lösung des mathematischen Problems – *exakt!*

- Die Massenbilanz,

$$m(t + 1) - m(t) = z(t) - a(t)$$

für 1 Tag am Anfang des  $t$ -ten Tages.

- Nun für den Bruchteil  $\Delta t$  eines Tages,

$$m(t + \Delta t) - m(t) = \Delta t \cdot (z(t) - a(t))$$

- Mit  $\Delta t \rightarrow 0$ ,

$$\underbrace{m'(t)}_{\text{instantane Änderungsrate}} \xleftarrow{\Delta t \rightarrow 0} \frac{m(t + \Delta t) - m(t)}{\Delta t} = z(t) - a(t)$$

vgl. instantane vs. durchschnittliche Geschwindigkeit.

## Schritt 3 der Modellierung

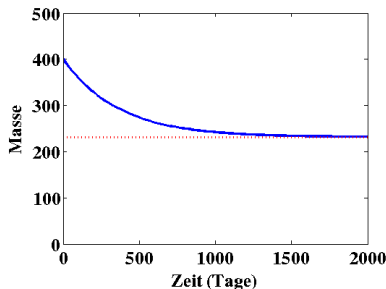
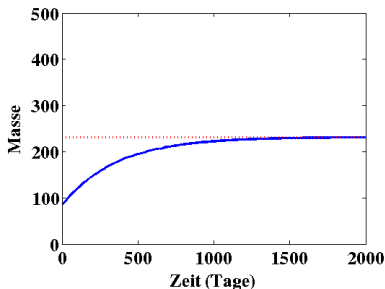
- ▶ Mit den Zufluss  $z(t) = \epsilon/\kappa$  ( $\epsilon = 5000$ ,  $\kappa = 7800$ ) und Abfluss  $a(t) = m(t)\phi/\kappa$  ( $\phi = 21.6$ ) ergibt sich die *Differentialgleichung*,

$$m'(t) = \epsilon/\kappa - m(t)\phi/\kappa \quad \begin{cases} > 0, & m(t) < \epsilon/\phi (\approx 231.5) \\ < 0, & m(t) > \epsilon/\phi (\approx 231.5) \end{cases}$$

mit Lösung

$$m(t) = \epsilon/\phi + (m(0) - \epsilon/\phi) \exp(-\phi t/\kappa).$$

- ▶ **Lösungen** mit  $m(0) = 84$  und  $m(0) = 400$ ,



# Schritt 4 der Modellierung

## Schritt 4: Qualitative Untersuchung des mathematischen Modells

- ▶ Sind die berechneten Werte überhaupt nachvollziehbar?
- ▶ Ist die Folge  $m(0), m(1), m(2), \dots$  immer steigend, wie erwartet?
- ▶ Nähert sich diese Folge an das berechnete Fließgleichgewicht  $m(\infty)$ ?
- ▶ Hängt diese Annäherung vom Anfangsgewicht  $m(0)$  ab?



# Schritt 5 der Modellierung

## Schritt 5: Vergleich mit Daten, Validierung

- ▶ Der berechnete Wert ist  $m(30) = 95.8$  kg.
- ▶ Der gemessene Wert ist 95.5 kg.

### Unterschied signifikant?

- ▶ Welche Schlüsse würde man ziehen, wenn tägliche Schwingungen in Gewichtsdaten gemessen worden wären?
  - ▶ Wenn sie zufällig um die vorausgesagte Folge gestreut wären?
  - ▶ Wenn Abweichungen von der vorausgesagten Folge nicht zufällig sondern systematisch wären?
- ▶ Wenn Unterschiede zwischen gemessenen und vorausgesagten Werten signifikant sind, welche Änderungen im Modell sollen zunächst untersucht werden?

# Modelltypen

## ► Strukturelle Modelle

- Beziehungen zwischen Komponenten werden betrachtet.
- Beispiel (oben): Gewichtszunahme

$$m(t) = \epsilon/\phi + (m(0) - \epsilon/\phi) \exp(-\phi t/\kappa).$$

- Beispiel (unten): Fall eines Steins

$$x'' = -g, x(0) = h, x'(0) = 0 \Rightarrow x(t) = -gt^2/2 + h.$$

$$x(\tau) = 0 \Rightarrow \tau = \sqrt{2h/g} \Rightarrow v = -x'(\tau) = \sqrt{2gh}.$$

## ► Empirische Modelle

- Gemessene Daten  $\{(t_n, M_n)\}_{n=1}^N$ ,  
empirische Kurve  $M(t; a, b, c) = a + be^{ct}$ .
- Parameterbestimmung durch Minimierung der Funktion

$$E(a, b, c) = \sum_{n=1}^N [M(t_n; a, b, c) - M_n]^2.$$

## ► Modelle durch Dimensionsanalyse

- Aufprallsgeschwindigkeit  $v$  eines fallenden Steins?  
Masse  $m$ , Höhe  $h$ , Fallzeit  $\tau$ , Beschleunigung  $g$ .
- Dimensionsanalyse:  $v = f(h, m, g, \tau)$ . ( $L/Z, L, M, L/Z^2, Z$ )  
Dimensionsrichtige Möglichkeiten:  $v = k\sqrt{gh}$ ,  $v = k'g\tau$ ,  
 $v = k''h/\tau$ , wobei  $k, k', k''$  dimensionslos sind.

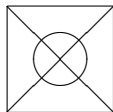
# Modelltypen

## ► Deterministisch

- Beispiele (oben): Gewichtszunahme und Fall eines Steins
- Beispiel: Thermodynamik mit makroskopischen Eigenschaften, z.B. Druck, Temperatur, Dichte
- Beispiel: Entdeckung von Schätzen in einer Landschaft
  - $\beta$  = Bruchteil der Fläche mit Schätzen.
  - $E(t)$  = Anzahl der durch einfaches flächendeckendes Wandern entdeckten Schätzen bis zur Zeit  $t$ .
  - Modell:  $E' = \beta$ ,  $E(0) = 0 \Rightarrow E(t) = \beta t$ .

## ► Stochastisch

- Beispiel: Statistische Mechanik mit mikroskopischen Eigenschaften, z.B. Positionen und Geschwindigkeiten von Molekülen, Kollisionen, Kräfte
- Beispiel: Entdeckung von Schätzen in einer Landschaft
  - $p_n(t)$  = Wahrscheinlichkeit dass  $n$  in  $t$  schon gefunden
  - $P(n_t \rightarrow (n+1)_{t+dt}) = \beta dt, \forall n$
  - $P(n_t \rightarrow n_{t+dt}) = 1 - P(n_t \rightarrow (n+1)_{t+dt}) \cdots = 1 - \beta dt$
  - $p_n(t+dt) = P(n_t \rightarrow n_{t+dt}) \cdot p_n(t) + P((n-1)_t \rightarrow n_{t+dt}) \cdot p_{n-1}(t) + \text{vernachlässigbar}$  (Bayes)
  - $p_n(t+dt) = (1 - \beta dt)p_n(t) + \beta dt p_{n-1}(t)$



# Modelltypen

## ► Stochastisch

### ► Beispiel: Entdeckung von Schätzen in einer Landschaft

- $p_n(t + dt) = (1 - \beta dt)p_n(t) + \beta dt p_{n-1}(t)$
- $p'_n(t) \leftarrow [p_n(t + dt) - p_n(t)]/dt = -\beta p_n(t) + \beta p_{n-1}(t)$
- Erwartungswert der gefundenen Schätze in  $t$  ist  
 $E(t) = \sum_{n=0}^{\infty} n p_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n p_n(t)$
- Lösungen  $\{p'_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$  stetig und Summen gleichmäßig konvergent bedeutet

$$\begin{aligned} E'(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} n p'_n(t) = -\beta \sum_{n=1}^{\infty} n p_n(t) + \beta \sum_{n=1}^{\infty} n p_{n-1}(t) \\ &= -\beta E(t) + \beta \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) p_{n-1}(t) \Big|_{=E(t)} + \beta \sum_{n=1}^{\infty} p_{n-1}(t) \Big|_{=1} \end{aligned}$$

$$\text{oder } E'(t) = \beta, \text{ und } E(0) = 0 \Rightarrow E(t) = \beta t.$$

- So entstehen makroskopische Größen durch Erwartungswerte von mikroskopischen stochastischen Größen.

# Modelltypen

## ► Konzentrierte Parameter

- Wird angenommen, dass gewisse Ortsabhängigkeiten vernachlässigt werden können.
- Beispiel: Die Temperatur  $T(t)$  des Körpers zur Zeit  $t$  wird mit der Newtonschen Kühlungsgesetz modelliert

$$\rho c V T'(t) = \alpha A [T_{\infty} - T(t)], \quad T(0) = T_0$$

$\rho$	=	Dichte	$c$	=	spezifische Wärmekapazität
$\alpha$	=	Wärmeübergangskoeffizient	$A$	=	Grenzflächeninhalt
$V$	=	Volumen	$T_{\infty}$	=	äußere Temperatur

- Solche Modelle werden üblicherweise mit gewöhnlichen Differentialgleichungen beschrieben.

## ► Verteilte Parameter

- Ortsabhängigkeiten werden nicht vernachlässigt.
- Beispiel: Die Temperatur  $T(t, \mathbf{x})$  des Körpers zur Zeit  $t$  und an der Stelle  $\mathbf{x}$  wird mit der Wärmegleichung modelliert,

$$\rho c T_t = \nabla \cdot (\lambda \nabla T), \quad T(t, \text{Haut}) = T_{\infty}(t), \quad T(0, \mathbf{x}) = T_0(\mathbf{x})$$

$\lambda$	=	Wärmeleitfähigkeit	$a = \lambda / (\rho c)$	=	Temperaturleitfähigkeit
$\delta$	=	Hautdicke	$\delta$	=	Hautdicke

- Solche Modelle werden üblicherweise mit partiellen Differentialgleichungen beschrieben.

# Modelltypen

## ► Dynamische Modelle

### ► Zeitlich kontinuierliche Modelle

- Evolution hängt von Zeit kontinuierlich ab.

- Beispiel: Logistisches Wachstum,

$$P'(t) = \alpha P(t)[K - P(t)]$$

Lösungen sind einfach S-förmig.

### ► Zeitlich diskrete Modelle

- Zustand springt diskret zur nächsten Generation.

- Beispiel: Logistische Evolution,

$$P_{n+1} = \tilde{\alpha} P_n [\tilde{K} - P_n]$$

Lösungen könnten periodisch sogar chaotisch sein!

## ► Statische Modelle

- Zustand hängt von Zeit nicht ab.

- Beispiel: Eine Membran mit der Spannung  $T$  ist am Rand eingespannt und mit der Last  $f(\mathbf{x})$  im Inneren belastet.

Die Poissongleichung ist ein verteiltes Modell für die Auslenkung  $u(\mathbf{x})$ ,

$$-T\Delta u = f, \quad u(\text{Rand}) = 0$$

# Zwecke der Modellierung

- ▶ Vor allem die motivierende Fragestellung zu beantworten.
  - ▶ Zeitdauer bis die Innentemperatur  $T(t)$  eines Hauses  $100(1 - p)\%$  des Weges zur Aussentemperatur  $T_\infty$  absinkt?
  - ▶ Mit Newtonscher Kühlung:  
 $\rho c V T'(t) = \alpha A [T_\infty - T(t)], \quad T(t_0) = T_0.$
  - ▶ Lösung:  
 $T(t) = T_\infty + (T_0 - T_\infty) \exp[-\alpha A t / (\rho c V)]$
  - ▶ Zeitdauer:  $t^* = \ln(1/p) \rho c V / (\alpha A).$
- ▶ Das modellierte System besser zu verstehen.
  - ▶  $t^* = \ln(1/p) \rho c V / (\alpha A).$   
Effekt der Dämmung? Hausoberfläche?
- ▶ Systemparameter zu schätzen.
  - ▶ Bestimmung von  $\rho c V / (\alpha A)$ ? von  $\alpha$ ?
- ▶ Das modellierte System zu steuern oder optimieren.
  - ▶ Oberfläche  $A$  minimieren?
- ▶ Optimale Steuerung
  - ▶ Wie viele Boote einer Flotte sollen in Betrieb sein?
- ▶ Optimale Entscheidung
  - ▶ Wie viele Waren sollen gekauft und gelagert werden?
  - ▶ Soll man eine Fahrkarte kaufen?

$\rho$  = Dichte  
 $c$  = spezifische Wärmekapazität  
 $V$  = Volumen  
 $A$  = Grenzflächeninhalt  
 $\lambda$  = Wärmefähigkeit  
 $a = \lambda / (\rho c)$  = Temperaturfähigkeit  
 $\lambda = \delta \alpha, \delta$  = Wanddicke  
 $\alpha$  = Wärmeübergangskoeffizient

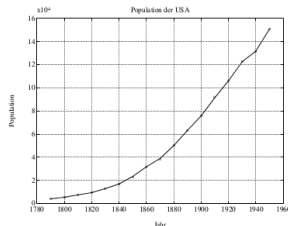
# Empirische Modelle

- ▶ Beispiel: Voraussage des Bevölkerungswachstums

Population  
der USA

Gegeben seien

$$\{(t_i, P_i)\}_{i=1}^N$$



- ▶ Mögliche Modelle
  - ▶  $P(t) = kt + d$  (linear)
  - ▶  $P(t) = Ce^{kt}$  (exponentiell)
  - ▶  $P(t) = K/[1 + \exp(-(t - t_0)/\tau)]$  (logistisch)
- ▶ Für das lineare Modell,  $P(t; k, d) = kt + d$ , kann man die Zielfunktion leicht minimieren,

$$E(k, d) = \sum_{i=1}^N |P(t_i; k, d) - P_i|^2$$

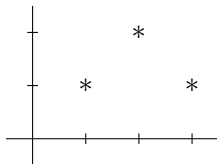


# Linear Regression

- **Hausaufgabe:** Zeige,  $E$  wird global minimiert in

$$k^* = \frac{\overline{t \cdot P} - \bar{t} \cdot \bar{P}}{\bar{t}^2 - \bar{t}^2}, \quad d^* = \bar{P} - k\bar{t}, \quad \text{z.B.} \quad \overline{t \cdot P} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N t_i P_i$$

- Einfaches Beispiel in dem die Regressionsgerade klar ist?



$$k = 0, d = 4/3$$

- Für die Zielfunktion

$$E(k, d) = \left[ \sum_{i=1}^N |P(t_i; k, d) - P_i|^p \right]^{\frac{1}{p}}$$

$$\|\mathbf{x}\|_{\ell_\infty} = \max_{1 \leq i \leq N} |x_i|$$

$$\|\mathbf{x}\|_{\ell_p} = \left[ \sum_{i=1}^N |x_i|^p \right]^{\frac{1}{p}}$$

soll mit  $p = 1, 2$  oder  $\infty$  minimiert werden?

- Leichter zu lösen mit  $p = 2$ , aber  $p = 1$  ist robuster!

# Robuste Zielfunktionen

**Hausaufgabe:** Für  $\mathbf{1} = \langle 1, \dots, 1 \rangle$ ,  $\mathbf{f} = \langle a, b, \dots, b \rangle \in \mathbb{R}^{n+1}$  zeige

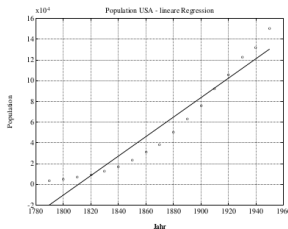
$$\frac{a + nb}{1 + n} = \arg \min_{c \in \mathbb{R}} \|\mathbf{f} - c\mathbf{1}\|_{\ell_2}^2 \quad \text{während} \quad b = \arg \min_{c \in \mathbb{R}} \|\mathbf{f} - c\mathbf{1}\|_{\ell_1}$$

Botschaft: Die  $\|\cdot\|_{\ell_2}$ -Norm läßt sich von Ausreißern beeinflussen, die  $\|\cdot\|_{\ell_1}$ -Norm aber weniger.

- Das empirische Ergebnis,

Population  
der USA

approximiert durch  
lineare Regression



weist systematische Abweichungen auf!

- Das lineare Modell ist daher nicht geeignet.

# Exponentielle Regression

- Für das exponentielle Modell,  $P(t; k, C) = Ce^{kt}$ , kann man die Zielfunktion minimieren,

$$E(k, C) = \sum_{i=1}^N |P(t_i; k, C) - P_i|^2$$

aber eine andere Regressionslösung kann leichter berechnet werden.

- Mit der Transformation,

$$Q(t; k, d) = \ln P(t; k, C) = \ln C|_{=d} + kt$$

kann man die Zielfunktion

$$F(k, d) = \sum_{i=1}^N |Q(t_i; k, d) - \ln P_i|^2$$

leicht minimieren:

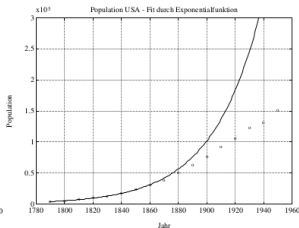
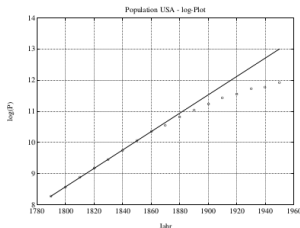
$$k = \frac{\overline{t \cdot \ln P} - \bar{t} \cdot \overline{\ln P}}{\overline{t^2} - \bar{t}^2}, \quad d = \overline{\ln P} - k\bar{t}, \quad C = e^d$$

- Bemerke, die minimierende Lösung für  $F$  ist nicht notwendigerweise die minimierende Lösung für  $E$ !

# Nicht Lineare Regression

- Das empirische Ergebnis,

Population  
der USA  
approximiert durch  
lineare Regression  
von exponentiell  
transformierten Daten



weist systematische Abweichungen auf!

- Das exponentielle Modell ist daher nicht geeignet.
- Für das logistische Modell,

$$P(t; K, t_0, \tau) = K / [1 + \exp(-(t - t_0)/\tau)]$$

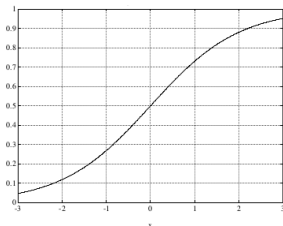
kann man die Zielfunktion minimieren,

$$E(K, t_0, \tau) = \sum_{i=1}^N |P(t_i; K, t_0, \tau) - P_i|^2$$

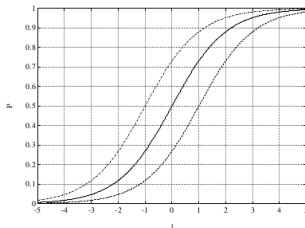
aber Optimierungsmethoden sind dafür notwendig.

# Die Logistische Funktion

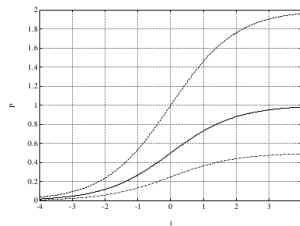
## ► Qualitative Eigenschaften:



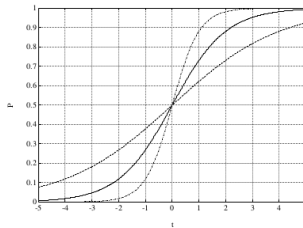
$$P(t; K, t_0, \tau) = K / [1 + \exp(-(t - t_0)/\tau)]$$



$t_0$  variiert



$K$  variiert



$\tau$  variiert

- $K$  = Kapazität,  $(t_0, K/2)$  = Wendepunkt,  $\tau$  = Zeitskala

# Einführung in Optimierung

- ▶ Beispiel:

$$f(x, y) = \frac{1}{4}x^2 + y^2$$

- ▶ Niveau Kurven:  $f(x, y) = \text{Konstante}$ .
- ▶ Gradient:

$$\nabla f(x, y) = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x/2 \\ 2y \end{bmatrix}$$

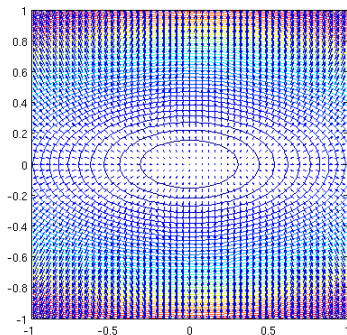
steht senkrecht auf einer  
Niveau Kurve.

- ▶ Abstiegsverfahren:  $\mathbf{x} = \langle x, y \rangle^\top$

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \alpha \nabla f(\mathbf{x}_k)$$

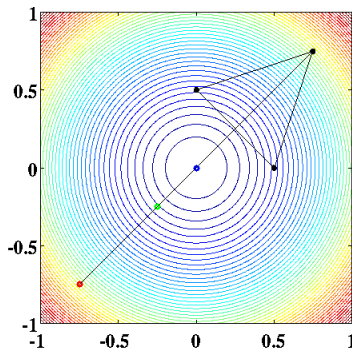
wobei  $\alpha$  ausgewählt wird,  
sodass  $f(\mathbf{x}_{k+1}) < f(\mathbf{x}_k)$ .

- ▶ Das Verfahren verlangt Zugang zum  $\nabla f$ , und es kann in einem lokalen Minimum eingefangen werden.



# Nelder-Mead Verfahren

- Das Verfahren heisst auch *Simplex Verfahren*, besonders in höheren Dimensionen. MATLAB: `fminsearch`.
- Beispiel: In  $\mathbb{R}^2$  beginnt man mit 3 Startpunkten, z.B.  
 $\mathbf{x}_1 = (\frac{3}{4}, \frac{3}{4})$ ,  $\mathbf{x}_2 = (0, \frac{1}{2})$ ,  $\mathbf{x}_3 = (\frac{1}{2}, 0)$   
und wertet aus,  $f(\mathbf{x}_1) \geq f(\mathbf{x}_2) \geq f(\mathbf{x}_3)$ . (Konturen unbekannt)



Mit dem Mittelpunkt

$$\mathbf{x}_m = \frac{\mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3}{2}$$

sind die nächsten vernünftigen Proben:

$$\mathbf{x}_m - \frac{1}{2}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_m)$$

$$\mathbf{x}_m - (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_m)$$

und

$$\mathbf{x}_m - 2(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_m)$$

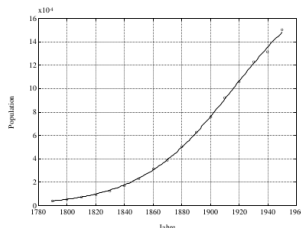
Es wird ersetzt  $\mathbf{x}_1 \leftarrow \mathbf{x}_m - \frac{1}{2}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_m)$ , dann neu gestartet, usw.

# Nelder-Mead Verfahren

- ▶ Das Verfahren hat Schwierigkeiten, wenn die Simiplizen nicht regulär sind, d.h. sehr dünn oder sehr flach.
- ▶ Deswegen sollen die Größenordnungen der Parameter durch eine Skalierung vergleichbar gemacht werden.
- ▶ Beispiel: Für die Bevölkerungsdaten,  $K \approx 180000$   
Wendepunkt =  $(t_0, K/2) \approx (1910, 90000)$ ,  $t_0 \approx 1910$   
 $4000 = P(1790) \approx 180000e^{(1790-1910)/\tau}$ ,  $\tau \approx 30$
- ▶ Mit den Optimierungsparametern  $x_1$ ,  $x_2$  und  $x_3$   
 $K = x_1 \cdot 10^5$ ,  $t_0 = x_2 \cdot 10^3$ ,  $\tau = x_3 \cdot 10^1$   
 $t = [\dots]$ ,  $P = [\dots]$ ,  $f = K./(1 + \exp(-(t - t_0)/\tau))$   
 $E = \text{sum}((f - P).^2)$
- ▶ Das empirische Ergebnis,

$$\begin{aligned}K &\approx 200070 \\t_0 &\approx 1915.8 \\\tau &\approx 32.496\end{aligned}$$

passt ziemlich gut.





# Parameterbestimmung durch Regressionsanalyse

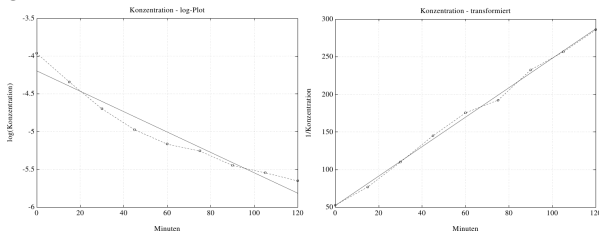
- ▶ Eine chemische Reaktion läuft ab, und chemische Daten  $\{(t_i, u_i)\}_{i=1}^N$  werden gemessen: Konzentration  $u_i$  (in Mol pro Liter) zur Zeit  $t_i$ .

$t$	0	15	30	45	60	75	90	105	120
$u(t)$	0.0190	0.0130	0.0091	0.0069	0.0057	0.0052	0.0043	0.0039	0.0035

- ▶ Die *Ordnung* ( $m$ ) einer Reaktion:
  - ▶  $m = 1$ :  $U \rightarrow \tilde{U}$   $(u' = -ku)$
  - ▶  $m > 1$ :  $mU \rightarrow U_m$   $(u' = -\kappa u^m)$
- ▶ Das empirische Modelle für eine Reaktion  $m$ ter Ordnung:
  - ▶  $m = 1$ :  $u(t) = Ce^{-kt}$ .
  - ▶  $m > 1$ :  $u(t) = (kt + d)^{-\frac{1}{m-1}}$ .  $(\kappa = k/(m-1))$
  - ▶ Bemerkung:  $\lim_{m \rightarrow 1} [(m-1)kt + u_0^{1-m}]^{-\frac{1}{m-1}} = u_0 e^{-kt}$ .
- ▶ Die Ordnung der obigen Reaktion soll bestimmt werden.
- ▶ Regression kann durch Transformationen für jede Ordnung durchgeführt werden.
  - ▶  $m = 1$ :  $\ln u(t) = \ln C - kt$ .
  - ▶  $m > 1$ :  $u(t)^{1-m} = kt + d$ .

# Parameterbestimmung durch Regressionsanalyse

- Die Ergebnisse für  $m = 1$  und  $m = 2$ :



$\{(t_i, \ln u_i)\}_{i=1}^N$  links und  $\{(t_i, 1/u_i)\}_{i=1}^N$  rechts.

- Für  $m = 1$  sind die Datenpunkte um die Regressionsgerade nicht zufällig gestreut.
- Für  $m = 2$  sind sie schon zufällig gestreut, aber
- Übungsbeispiel: noch besser für  $m = 3$ ?
- Maße der Datenanpassung:  $\|\text{Abstände}\|_{\ell_2}$ ,  $\|\text{Abstände}\|_{\ell_1}$ , Korrelationskoeffizient für die Daten  $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^N$ ,

$$r = \frac{\overline{x \cdot y} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{[\overline{x^2} - \bar{x}^2]^{\frac{1}{2}} [\overline{y^2} - \bar{y}^2]^{\frac{1}{2}}}, \quad r^2 \rightarrow 1 \Rightarrow \text{perfekte Anpassung.}$$

# Ein Gutes Modell

- ▶ Bevor man optimiert, was ist überhaupt ein *gutes* Modell?
- ▶ Eigenschaften:
  - ▶ Wenig unabhängige interpretierbare Parameter.
  - ▶ Modell ist voraussagefähig, z.B.

$$P(t) = \frac{K}{1 + (\frac{K}{P_0} - 1)e^{-\frac{t-t_0}{\tau}}}, \quad u(t) = \begin{cases} u_0 e^{-kt}, & m = 1 \\ (kt + u_0^{1-m})^{-\frac{1}{m-1}}, & m > 1 \end{cases}$$

- ▶ Nachteile von vielen Parametern, z.B.  $P(t) = \sum_{j=0}^n a_j t^j$ ,
  - ▶ Unbekannte Parameter sind:  $\{a_j\}_{j=0}^n$
  - ▶ Werden mit Daten bestimmt:  $P_i = P(t_i) = \sum_{j=0}^n a_j t_i^j$ ,  $0 \leq i \leq n$ ,

$$\begin{bmatrix} 1 & t_0 & t_0^2 & \cdots & t_0^n \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & t_n & t_n^2 & \cdots & t_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_0 \\ \vdots \\ P_n \end{bmatrix}$$

- ▶ oder durch  $\min = \sum_{j=0}^m [P(t_j) - P_j]^2$ ,  $m \geq n$ ,

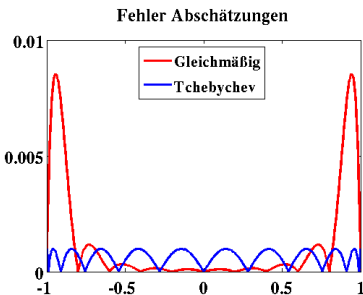
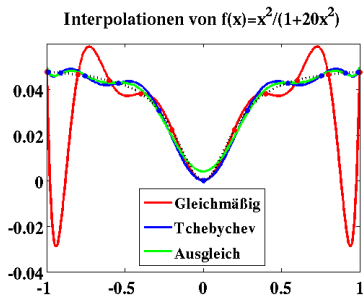
$$A = \begin{bmatrix} 1 & t_0 & t_0^2 & \cdots & t_0^n \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & t_m & t_m^2 & \cdots & t_m^n \end{bmatrix}, \quad A^\top A a = A^\top P$$

# Genauigkeit globaler Interpolation

- ▶ Beispiel: Die Funktion  $f(x) = x^2/(1 + 20x^2)$  wird mit  $n = 10$  oder  $m = 100$  Punkten folgendermassen interpoliert:

- (Gleichmäßig) ▶  $P(x_i) = f(x_i)$ ,  $x_i = -1 + 2i/n$ ,  $i = 0, \dots, n$
- (Tchebychev) ▶  $Q(t_j) = f(t_j)$ ,  $t_j = \cos(\pi(j + 1/2)/(n + 1))$ ,  $j = 0, \dots, n$
- (Ausgleich) ▶  $\sum_{k=0}^m |R(y_k) - f(y_k)|^2 = \min$ ,  $y_k = -1 + 2k/m$ ,  $k = 0, \dots, m$

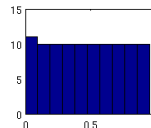
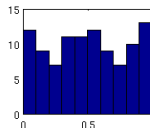
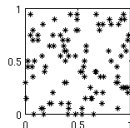
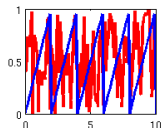
- ▶ Die Ergebnisse sehen so aus:



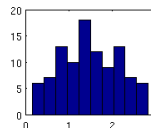
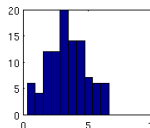
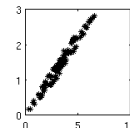
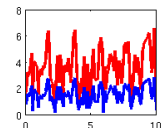
wobei die theoretischen Fehler rechts gezeigt werden.

# Grafischen Überblick der PCA/ICA

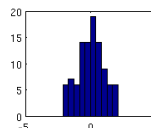
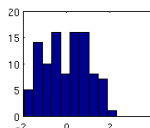
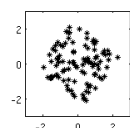
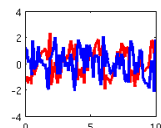
Quellen



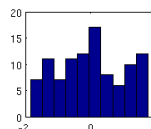
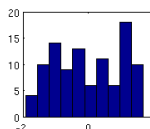
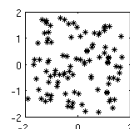
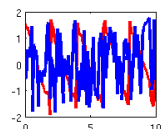
Mischungen



gesphärt (PCA)



getrennt (ICA)



Zeit

Streuung

Histogramme

# Formulierung der PCA/ICA

- Die **Quellensignale**  $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \in \mathbb{R}^n$  sind die Reihen von

$$Z = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_1^\top \\ \mathbf{z}_2^\top \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1(t_1) & z_1(t_2) & \cdots & z_1(t_n) \\ z_2(t_1) & z_2(t_2) & \cdots & z_2(t_n) \end{bmatrix}$$

Diese sind **unabhängig** und **nicht Gauß verteilt**.

- Die **Meßsignale**  $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in \mathbb{R}^n$  sind unbekannte **Mischungen** der Quellen

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y}_1^\top \\ \mathbf{y}_2^\top \end{bmatrix} = Y = AZ, \quad A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

Diese sind **nicht unabhängig** und eher **Gauß verteilt**.

- Ziel ist, die **Gaußianität** zu minimieren, um **Schätzungen**  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^n$  der Quellen zu bestimmen,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_1^\top \\ \mathbf{x}_2^\top \end{bmatrix} = X = WY, \quad W \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

**schrittweise** durch  $W = (\text{Dreh}) \cdot (\text{Skal}) \cdot (\text{Dreh}) \approx A^{-1}$ .

# Formulierung der PCA/ICA

Schritte:

- ▶ Zentrieren:  $\bar{Y} \in \mathbb{R}^m, \mathbf{1} \in \mathbb{R}^n$   
 $Y_z = Y - \bar{Y}\mathbf{1}^\top, \quad \bar{Y}_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n Y_{ij}, \quad \mathbf{1}_i = 1$

- ▶ Sphären:  
 $K = \frac{1}{n} Y_z Y_z^\top, \quad KV = V\Lambda, \quad Y_s = \Lambda^{-\frac{1}{2}} V^\top Y_z$

- ▶ Drehen:  
 $X_z = UY_s, \quad U^\top = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m\}$

wobei jedes  $\mathbf{u}_k$  die Gaußianität minimiert.

Z.B. **Wölbung** (Kurtosis)  $\mathbf{x} = \{x_i\} \text{ \& } M_1(\mathbf{x}) = 0$   
 $\Rightarrow M_k(\mathbf{x}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^k$

$\mathcal{K}(\mathbf{x}) = M_4(\mathbf{x}) - 3M_2^2(\mathbf{x})$   
erfüllt  $\mathcal{K}(\mathbf{n}) = 3\sigma^4 - 3\sigma^4 = 0$  für  $\mathbf{n} \sim N(\mu, \sigma^2)$ .

Also kann  $\mathcal{J}(\mathbf{u}) = \mathcal{K}^2(Y_s^\top \mathbf{u})$  mit  $\mathbf{u}_k^\top \mathbf{u}_l = \delta_{kl}$  maximiert werden.

- ▶ Verschieben:  
 $X = X_z + U\Lambda^{-\frac{1}{2}} V^\top \bar{Y}\mathbf{1}^\top = U\Lambda^{-\frac{1}{2}} V^\top Y = WY$

# Formulierung der PCA/ICA

(PCA) Sei die Daten so zerlegt,

$$Y_z = Y - \bar{Y}\mathbf{1}^\top, \quad K = \frac{1}{n} Y_z Y_z^\top, \quad KV = V\Lambda, \quad Y_s = \Lambda^{-\frac{1}{2}} V^\top Y_z$$

Sei  $\Lambda = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$  mit  $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_m$ . Mit  $P \in \mathbb{R}^{r \times m}$ ,  $r < m$ ,  $P_{i,j} = \delta_{i,j}$ , werden die Daten  $Y$  zum  **$r$  stärksten Hauptkomponenten** projiziert,

$$Y \approx Y_P = \bar{Y}\mathbf{1}^\top + V\Lambda^{\frac{1}{2}}P^\top P Y_s = \bar{Y}\mathbf{1}^\top + \frac{1}{n} Y_z (P Y_s)^\top (P Y_s)$$

(ICA) Sei die Daten weiter so zerlegt,

$$X_z = U Y_s$$

Mit  $Q \in \mathbb{R}^{r \times m}$ ,  $r < m$ ,  $Q_{i,j} = \delta_{q_i,j}$ , werden die Daten  $Y$  zum  **$r$  independent components**  $\{q_1, \dots, q_r\}$  so projiziert,

$$Y \approx Y_Q = \bar{Y}\mathbf{1}^\top + V\Lambda^{\frac{1}{2}}U^\top Q^\top Q X_z = \bar{Y}\mathbf{1}^\top + \frac{1}{n} Y_z (Q X_z)^\top (Q X_z)$$



# Ein Schlechtes Modell

Nachteile von empirischen Modellen mit vielen Parametern:

- ▶ Information kann von den vielen Parametern  $\{a_j\}_{j=0}^n$  nicht entnommen werden.
- ▶ Jeder Datensatz kann mit genug Parametern exakt interpoliert werden.
  - ▶ Ist das Ergebnis *zwischen* den Datenpunkten sinnvoll?
  - ▶ *Ausserhalb* der Datenpunkte?
- ▶ Die Parameter des Ergebnisses hängen von den Daten nicht notwendigerweise stabil ab:  $\mathbf{P} = \{P_i\}_{i=0}^n$ ,  $\mathbf{a} = \{a_j\}_{j=0}^n$ ,

$$\|\mathbf{P} - \tilde{\mathbf{P}}\| \text{ klein} \not\Rightarrow \|\mathbf{a} - \tilde{\mathbf{a}}\| \text{ klein}$$

$$\text{z.B. } A\mathbf{a} = \mathbf{P}, A\tilde{\mathbf{a}} = \tilde{\mathbf{P}},$$

$$\frac{\|\mathbf{a} - \tilde{\mathbf{a}}\|}{\|\mathbf{a}\|} \leq \kappa(A) \frac{\|\mathbf{P} - \tilde{\mathbf{P}}\|}{\|\mathbf{P}\|}$$

wobei  $\kappa(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$  sehr groß werden kann.

- ▶ Rechenaufwand nicht notwendig.

# Ein Modell Dimensionslos Umschreiben

- ▶ Temperaturverlauf im Haus:

$$\rho c V T'(t) = \alpha A [T_\infty - T(t)], \quad T(0) = T_0$$

- ▶ Dimensionslose Größen:

$$\theta = T/T_0, \quad \tau = \alpha A t / (\rho c V)$$

- ▶ Differentialgleichung mit diesen,

$$\rho c V \frac{dT}{dt} = \rho c V \frac{d}{dt}(\theta T_0) = \rho c V T_0 \frac{d\theta}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \alpha A T_0 \frac{d\theta}{d\tau}$$

$$\alpha A [T_\infty - T] = \alpha A [T_\infty - T_0 \theta] = \alpha A T_0 [T_\infty / T_0 - \theta]$$

$$\Rightarrow \alpha A T_0 \frac{d\theta}{d\tau} = \alpha A T_0 [T_\infty / T_0 - \theta] \Rightarrow \frac{d\theta}{d\tau} = \theta_\infty - \theta$$

wobei  $\theta_\infty = T_\infty / T_0$  und  $\theta(0) = T(0) / T_0 = 1$ .

- ▶ *Dynamische Ähnlichkeit:* Für ein Experiment mit allen Parametern skaliert  $(\tilde{\alpha} \tilde{A} / (\tilde{\rho} \tilde{c} \tilde{V}) = \alpha A / (\rho c V)$ ,  $\tilde{T}_\infty / \tilde{T}_0 = T_\infty / T_0$ ), ist das Verhalten in  $\theta$  gleich.

# Realistisches Beispiel: Navier-Stokes

- ▶ Impulserhaltung für ein inkompressibles Fluid:

$$\rho \partial_t \mathbf{v} + \rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{f}$$

$\rho$  = Dichte,  $\mathbf{v}$  = Geschwindigkeit,  $p$  = Druck,  $\mu$  = Viskosität,  $\mathbf{f}$  = Kraft

- ▶ Dimensionslose Größen:

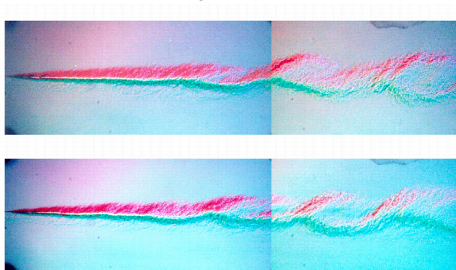
$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x}/L, \quad \tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{v}/U, \quad \tilde{t} = tU/L, \quad \tilde{p} = p/(\rho U^2), \quad \tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{f}L/(\rho U^2)$$

wobei  $L$  und  $U$  charakteristische Längen- bzw. Geschwindigkeits-Maßstäbe sind.

- ▶ Dimensionslos umgeschrieben, wobei  $Re = \rho LU/\mu$

$$\partial_{\tilde{t}} \tilde{\mathbf{v}} + (\tilde{\mathbf{v}} \cdot \tilde{\nabla}) \tilde{\mathbf{v}} = -\tilde{\nabla} \tilde{p} + \frac{1}{Re} \tilde{\nabla}^2 \tilde{\mathbf{v}} + \tilde{\mathbf{f}}$$

- ▶ Hoch- und  
Niedrig-  
Geschwindigkeits-  
strömungen,  
Reynoldszahl  
( $Re$ ) aber gleich:



# Modelle durch Dimensionsanalyse

► Meßgröße: 
$$G = \underbrace{m(G)}_{\text{Maßzahl}} \cdot \underbrace{[G]}_{\text{Maßeinheit}}$$

► Grundgrößen:  $\{g_i\}_{i=1}^r$  z.B.  $g_1 = \text{Länge}$ ,  $g_2 = \text{Zeit}$ ,  $g_3 = \text{Masse}$

► Grundeinheiten:  $\{[g_i]\}_{i=1}^r$  z.B.  $[g_1] = \text{Meter}$ ,  $[g_2] = \text{Sek}$ ,  $[g_3] = \text{Kg}$

SI System:

Meter, Sekunde, Kilogramm, Ampere, Kelvin, Candela, Mol

► Abgeleitete Größen:  $\{G_j\}_{j=1}^n$  z.B.  $G_1 = g_1/g_2$  (Geschwindigkeit)  
 $[G_1] = [g_1]/[g_2] = \text{Meter/Sek}$

► Im allgemeinen,

$$G_j = \prod_{i=1}^r g_i^{\alpha_{ij}}, \quad [G_j] = \prod_{i=1}^r [g_i]^{\alpha_{ij}}$$

► Dimensionslos wenn  $[G] = 1$ .

# Modelle durch Dimensionsanalyse

**Def:** Die Größen  $\{\mathcal{G}_k = \prod_{j=1}^n G_j^{\lambda_{jk}}\}_{k=1}^m$  sind *unabhängige Kombinationen von*  $\{G_j\}_{j=1}^n$ , wenn die Vektoren  $\lambda_k = \{\lambda_{jk}\}_{j=1}^n$ ,  $k = 1, \dots, m$ , linear unabhängig sind.

- Beispiel: Fall eines Steins,  $(g_1 = L, g_2 = Z, g_3 = M)$

$$\underbrace{v}_{G_1} = f(\underbrace{h}_{G_2}, \underbrace{m}_{G_3}, \underbrace{g}_{G_4}, \underbrace{\tau}_{G_5})$$

Unabhängige Kombinationen von  $\{G_1, \dots, G_5\}$ ,

$$\begin{aligned}\Pi_1 &= v \cdot (\tau/h) = G_1 G_5 G_2^{-1} & \lambda_1 &= \langle 1, -1, 0, 0, 1 \rangle^\top \\ \Pi_2 &= g \cdot (\tau/v) = G_4 G_5 G_1^{-1} & \lambda_2 &= \langle -1, 0, 0, 1, 1 \rangle^\top\end{aligned}$$

da  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  linear unabhängig sind.

Bemerke:  $[\Pi_1] = 1 = [\Pi_2]$ .

# Buckingham Pi Satz

**Satz** (Buckingham Pi): Gegeben seien Grundgrößen  $\{g_i\}_{i=1}^r$  und abgeleitete Größen  $\{G_j\}_{j=1}^n$  mit  $G_j = \prod_{i=1}^r g_i^{\alpha_{ij}}$ , wobei die Matrix  $A = \{\alpha_{ij} : 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq n\}$  erfüllt  $\text{Rang}(A) = r$ . Dann gibt es genau  $n - r$  dimensionslose unabhängige Kombinationen  $\{\Pi_k\}_{k=1}^{n-r}$  von  $\{G_j\}_{j=1}^n$  sodass eine Gleichung

$$\Phi(G_1, \dots, G_n) = 1$$

sich äquivalent folgendermaßen umschreiben läßt:

$$\Psi(\Pi_1, \dots, \Pi_{n-r}) = 1.$$

- Beispiel: Fall eines Steins,  $r = 3$ ,  $n = 5$ ,

$$\Pi_1 = v \cdot (\tau/h), \quad \Pi_2 = g \cdot (\tau/v) \quad (\text{Woher?})$$

sind  $n - r = 2$  dimensionslose unabhängige

Kombinationen von  $\{G_1, \dots, G_5\}$ . (Siehe oben) Es gilt

$$A = \begin{array}{ccccc|c} \begin{matrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{matrix} & \text{Rang}(A) = 3 = r? \\ \hline G_1 & G_2 & G_3 & G_4 & G_5 & \end{array}$$

$v = f(h, m, g, \tau) \rightarrow \Pi_1 = F(\Pi_2)$ . Experiment:  $\Pi_2 = 1$ .

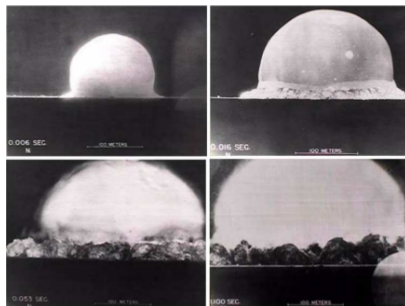
Also  $\Pi_1 = F(1) = k$ . Experiment:  $k = 2$ . Ergebnis:  $v = 2h/\tau$ .

# Realistisches Beispiel der Dimensionsanalyse

Englischer Physiker

G.I. Taylor

hat die Energie der ersten Atombombe von einem Film berechnet.



► Größen die (anscheinend) eine Rolle spielen:

$G_1$	$E$	Energie der Explosion	$ML^2Z^{-2}$	$(K.E. = \frac{1}{2}mv^2)$
$G_2$	$t$	Zeit seit der Explosion	$Z$	
$G_3$	$R$	Radius des Feuerballs	$L$	
$G_4$	$\rho_A$	Dichte der Aussenluft	$ML^{-3}$	
$G_5$	$\rho_I$	Dichte der Innenluft	$ML^{-3}$	
$G_6$	$p_A$	Druck der Aussenluft	$ML^{-1}Z^{-2}$	$(F/A, \text{ kg m/s}^2 / \text{ m}^2)$
$G_7$	$p_I$	Druck der Innenluft	$ML^{-1}Z^{-2}$	

## Realistisches Beispiel der Dimensionsanalyse

- ▶ Soll z.B. die Temperatur dabei sein? Dann müssen die Grundgrößen mit  $g_4 = \text{Temperatur}$  ergänzt werden. Dann mit der Aussentemperatur  $G_8 = T_A$  und der Innentemperatur  $G_9 = T_I$  sind  $r = 4$ ,  $n = 9$  und  $\Pi_5 = T_A/T_I$ . Die folgende Analysis zeigt, die Temperatur ist nicht notwendig.
- ▶  $\{g_1 = L, g_2 = Z, g_3 = M\}$ ,  $\{G_j\}_{j=1}^7 \Rightarrow r = 3, n = 7$ .
- ▶ Es gilt  $\text{Rang}(A) = 3 = r$ , (Wie?)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & -3 & -3 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{matrix}$$

$G_1 \quad G_2 \quad G_3 \quad G_4 \quad G_5 \quad G_6 \quad G_7$

- ▶ Mit Buckingham Pi sucht man  $n - r = 4$  dimensionslose Größen  $\{\Pi_k\}_{k=1}^4$ .
- ▶ Hinweis:  $\Pi_1$  soll energieartig sein, damit die untersuchte Größe dabei ist.
- ▶ Mit der Erwartung einer Beziehung  $\Pi_1 = F(\Pi_2, \Pi_3, \Pi_4)$  sucht man Größen  $\{\Pi_2, \Pi_3, \Pi_4\}$ , die klein oder konstant sind, damit  $F(\Pi_2, \Pi_3, \Pi_4) \approx \text{Konstante}$ .



# Realistisches Beispiel der Dimensionsanalyse

- Nimm

$$\begin{aligned}\Pi_1 &= E(\rho_A^{-1} R^{-5} t^2) & \Pi_2 &= p_A^5 (E^{-2} \rho_I^{-3} t^6) \\ \Pi_3 &= \rho_A / \rho_I & \Pi_4 &= p_A / p_I\end{aligned}$$

- Es gilt

$$\begin{aligned}[\Pi_1] &= \frac{ML^2}{Z^2} \frac{L^3}{M} \frac{1}{L^5} Z^2 = 1, & [\Pi_2] &= \frac{M^5}{L^5 Z^{10}} \frac{Z^4}{M^2 L^4} \frac{L^9}{M^3} Z^6 = 1, \\ [\Pi_3] &= 1, & [\Pi_4] &= 1\end{aligned}$$

- Zu zeigen ist,  $\Pi_k = \prod_{j=1}^7 G_j^{\lambda_{kj}}$  sind unabhängige Kombinationen von  $\{G_j\}_{j=1}^7$ :

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \langle 1, 2, -5, -1, 0, 0, 0 \rangle^T \\ \lambda_2 &= \langle -2, 6, 0, 0, -3, 5, 0 \rangle^T \\ \lambda_3 &= \langle 0, 0, 0, 1, -1, 0, 0 \rangle^T \\ \lambda_4 &= \langle 0, 0, 0, 0, 0, 1, -1 \rangle^T\end{aligned}$$

sind linear unabhängig. (Wie?)

- Buckingham Pi:

$$\Phi(E, t, R, \rho_A, \rho_I, p_A, p_I) = 1 \rightarrow \Pi_1 = F(\Pi_2, \Pi_3, \Pi_4).$$

# Realistisches Beispiel der Dimensionsanalyse

- ▶ In der Gleichung  $\Pi_1 = F(\Pi_2, \Pi_3, \Pi_4)$  gelten  $\Pi_2, \Pi_3, \Pi_4 \approx 0$ .
- ▶ Mit  $k = F(0, 0, 0)$  kann folgendes Modell mit dem Film angewendet werden:

$$E \rho_A^{-1} R^{-5} t^2 = k$$

- ▶ Vom Film kann man messen:  $R = R(t)$ .
- ▶ Vom Modell:  $R^5 = \left( \frac{E}{\rho_A k} \right) t^2$  oder

$$R(t) = \gamma t^{2/5} \quad \text{wobei} \quad \gamma = \left( \frac{E}{\rho_A k} \right)^{1/5} = \text{Konstante}$$

- ▶ Mit den Filmdaten  $\{(t_n, R_n)\}_{n=1}^N$  schätzt man  $\gamma$  so ab:

$$\gamma \approx \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N R_n t_n^{-2/5}$$

- ▶ Mit  $\gamma$  und  $\rho_A$  bekannt, folgt

$$E = k(\rho_A \gamma^5)$$

aber  $k = ?$

# Realistisches Beispiel der Dimensionsanalyse

- ▶ Man macht eine kleinere Explosion, für welche  $(\Pi_2, \Pi_3, \Pi_4)$  klein genug sind, dass  $F(\Pi_2, \Pi_3, \Pi_4) \approx F(0, 0, 0) = k$  gilt.
- ▶ Sei  $E_0$  die bekannte Energie der kleineren Explosion.
- ▶ Es gilt für das kleinere Experiment,

$$k \approx F(\Pi_2, \Pi_3, \Pi_4) = \Pi_1 = E_0(\rho_A)_0^{-1} R_0^{-5} t_0^2.$$

oder

$$R_0 = \gamma_0 t_0^{\frac{2}{5}} \quad \text{wobei} \quad \gamma_0 = \left( \frac{E_0}{\rho_A k} \right)^{\frac{1}{5}} = \text{Konstante}$$

da  $(\rho_A)_0 = \rho_A$  gilt.

- ▶ Ähnlich mit Daten  $\{(t_0, R_0)_n\}_{n=1}^N$  schätzt man  $\gamma_0$  so ab:

$$\gamma_0 = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (R_0 t_0^{-\frac{2}{5}})_n$$

- ▶ Mit  $\gamma_0$  und  $\rho_A$  bekannt, folgt

$$E_0 = k(\rho_A \gamma_0^5)$$

- ▶ Mit  $k = E/(\rho_A \gamma^5) = E_0/(\rho_A \gamma_0^5)$  folgt

$$E = E_0(\gamma/\gamma_0)^5.$$

# Deterministische Strukturelle Modelle

## Wachstum und Zerfall

- ▶ Änderungsrate:  $x'(t)$ , z.B. für die Schatzsuche  $E'(t) = \beta$ .
- ▶ Spezifische Änderungsrate:  $x'(t)/x(t)$ , z.B.  
Geburt:  $x'/x = \beta > 0$ , Tod:  $x'/x = -\mu < 0$

- ▶ Beispiel: Schadstoff in einem See. Massenerhaltung

$$m' = z - a, \quad VS' = 0 - rS$$

wobei  $VS = m$ ,  $z = 0$ ,  $a = rS$ ,  $S(0) = S_0$ ,  $\rightarrow \square \rightarrow$

$m$  = Masse des Schadstoffs,  $S$  = Konzentration des Schadstoffs  
 $z$  = Zufluss,  $V$  = Volumen des Sees  
 $a$  = Abfluss,  $r$  = Flussrate durch den See

Spezifische Änderungsrate:  $S'/S = -r/V < 0$ .

- ▶ Radioaktiver Zerfall:  $x(t)$  = Anzahl der Atomen,  
Spezifische Änderungsrate:  $x'/x = -\lambda < 0$

Lösung mit  $x(0) = x_0$ :  $x(t) = x(0)e^{-\lambda t}$

Halbwertszeit =  $\tau$ :  $x(\tau)/x(0) = e^{-\lambda\tau} = 1/2$

$$-\lambda\tau = -\ln(2) \Rightarrow \lambda = \ln(2)/\tau$$

$$x(t) = x(0)e^{-\ln(2)t/\tau} = x(0)e^{\ln 2^{-t/\tau}} = x(0)2^{-t/\tau}$$

# Logistisches Wachstum

- ▶ Spezifische Änderungsrate:  $P'/P = \beta - \mu$ .
- ▶  $\beta = \beta_0 > 0$  und  $\mu = \mu_0 > 0$  konstant  $\Rightarrow P(t) = P(0)e^{(\beta-\mu)t}$ .
- ▶ Die einfachsten Verallgemeinerungen: lineare Abhängigkeit vom Zustand,

$$\beta(P) = \beta_0 - \beta_1 P, \quad \mu(P) = \mu_0 + \mu_1 P$$

Mit dichter Bevölkerung werden Mechanismen wirksam, die das Wachstum einbremsen, geringere Kinderfreudigkeit ( $\beta_1 > 0$ ) und/oder erhöhte Sterblichkeit ( $\mu_1 > 0$ ) bewirken.

- ▶ Mit Zeitskala  $\tau = 1/(\beta_0 - \mu_0)$  und Kapazität  $K = 1/[\tau(\beta_1 + \mu_1)]$ ,

$$P' = \frac{P}{\tau} \left( 1 - \frac{P}{K} \right)$$

- ▶ Mit der Nebenbedingung  $P(t_0) = P_0$ , (Osterinsel?)

$$P(t) = \frac{K}{1 + \left( \frac{K}{P_0} - 1 \right) e^{-\frac{t-t_0}{\tau}}}$$

**Hausaufgabe:** Löse das Anfangswertproblem.

# Eigenschaften von Gleichgewichten

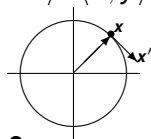
- ▶ Ein dynamisches System  $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  ist *autonom* wenn  $\mathbf{f}$  von der Zeit  $t$  nicht explizit abhängt.
- ▶ Wenn  $\mathbf{f}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$  gilt, dann ist  $\mathbf{x}^*$  ein Gleichgewicht.
- ▶ Einfaches Beispiel:  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$  ist ein Gleichgewicht.
- ▶ Explizites Beispiel:  $\mathbf{x} = \langle x, y \rangle^\top$ ,  $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ ,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{Lösung:} \quad \begin{cases} x(t) = \alpha \cos(t) + \beta \sin(t) \\ y(t) = \beta \cos(t) - \alpha \sin(t) \end{cases}$$

Tangent zur Lösungskurve ist  $\mathbf{x}' = \langle x', y' \rangle^\top$ , d.h. in diesem Beispiel gelten  $x' = y$ ,  $y' = -x$  und daher,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{x}(t)\|_{\ell_2}^2 = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) \cdot \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}' \cdot \mathbf{x} = \langle y, -x \rangle \cdot \langle x, y \rangle = 0.$$

Das Gleichgewicht  $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$  ist *stabil*, weil bei einer Störung die Lösung nicht wegfährt:

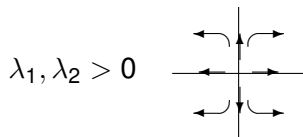
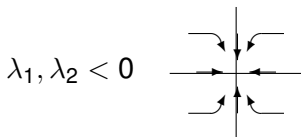


- ▶ Eine Variante:  $\mathbf{B} = \mathbf{S}\mathbf{A}\mathbf{S}^{-1}$ ,  $\mathbf{x}' = \mathbf{B}\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$ .

$$\mathbf{y} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{x}, \mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \|\mathbf{S}^{-1}\mathbf{x}\|_{\ell_2}^2 = \frac{d}{dt} \|\mathbf{y}\|_{\ell_2}^2 = 0.$$

# Stabilität eines Gleichgewichts

- ▶ Beispiel:  $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{A} = \mathbf{S}\mathbf{\Lambda}\mathbf{S}^{-1}$ ,  $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2\}$ ,  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ .



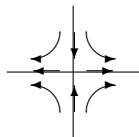
Für den Fall  $\lambda_1, \lambda_2 < 0$  ist das Gleichgewicht  $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$  *asymptotisch stabil*, weil bei einer Störung die Lösung wieder hineinfährt.

Für den Fall  $\lambda_1, \lambda_2 > 0$  ist das Gleichgewicht *instabil*.

- ▶ Beispiel:  $\mathbf{A} = \mathbf{S}\mathbf{\Lambda}\mathbf{S}^{-1}$  mit  $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2\}$  und  $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$ , z.B.  $\lambda_1 = 1 = -\lambda_2$  und  $\mathbf{S} = \mathbf{I}$ .

Hier ist das Gleichgewicht  $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$  instabil, weil bei einer Störung die Lösung wegfahren *kann*.  
*Sattelpunkt:*

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = -\nabla P(\mathbf{x}), \quad P(x, y) = (y^2 - x^2)/2$$

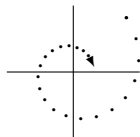


# Stabilität eines Gleichgewichts

- Beispiel:  $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{x} = \langle x, y \rangle^\top$

$$A = \begin{bmatrix} -\epsilon & 1 \\ -1 & -\epsilon \end{bmatrix} \quad \text{Eigenwerte: } \begin{cases} 0 = \det(\lambda I - A) = \\ \lambda^2 + 2\epsilon\lambda + \epsilon^2 + 1 \\ \lambda_{1,2} = -\epsilon \pm i \end{cases}$$

Lösung: 
$$\begin{cases} x(t) = e^{-\epsilon t}[\alpha \cos(t) + \beta \sin(t)] \\ y(t) = e^{-\epsilon t}[\beta \cos(t) - \alpha \sin(t)] \end{cases}$$



- Im allgemeinen:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' &= \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0} \\ &= \mathbf{f}(\mathbf{x}^*)|_{=0} + \mathbf{f}'(\mathbf{x}^*)|_{=A}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) + \mathbf{g}(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

wobei  $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = o(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|)$ . Für  $t \rightarrow t_0$ ,  $g(t) = \begin{cases} \mathcal{O}(f(t)) \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow t_0} |\frac{g(t)}{f(t)}| < \infty \\ \mathcal{O}(f(t)) \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{g(t)}{f(t)} = 0 \end{cases}$

$$(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)' = \mathbf{x}' = A(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) + \mathbf{g}(\mathbf{x})$$

$\hookrightarrow$  bestimmt die Stabilität von  $\mathbf{x}^*$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|_{\ell_2}^2 = (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)' \approx (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)^\top A(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) \stackrel{?}{\leq} 0$$

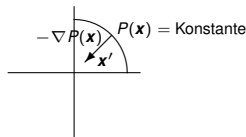


# Potential-Landschaft

- ▶ Sattelpunkt:  $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ ,  $A = \text{diag}\{1, -1\}$ ,  
 $A\mathbf{x} = -\nabla P(\mathbf{x})$ ,  $P(x, y) = (y^2 - x^2)/2$ .
- ▶ Im allgemeinen:  $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}) = -\nabla P(\mathbf{x})$ ,  $\exists P$ ?  
Um ein *Potential*  $P$  für gegebenes  $\mathbf{f}$  finden zu können,  
muss gelten: ( $P$  ausreichend glatt)

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} = -\nabla^2 P = -\nabla^2 P^\top = \frac{\partial \mathbf{f}^\top}{\partial \mathbf{x}}$$

- ▶ Bedeutung des Potentials:  
Manchmal bewegt sich ein dynamisches  
System sodass ein physikalisches  
Potential minimiert wird.



- ▶ Beispiel:  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ ,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} = A \neq A^\top = \frac{\partial \mathbf{f}^\top}{\partial \mathbf{x}}$$

- ▶ Eine Drehung entsteht, wenn  $\sigma(A)$  komplex ist.

# Lyapunov Funktion

- ▶ Wenn  $A$  nicht notwendigerweise symmetrisch ist, aber  $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$  und  $A = S\Lambda S^{-1}$ ,  $\Lambda = \text{diag}\{\lambda_i\}$ , ist trotzdem  $S^{-\top} S^{-1} A = S^{-\top} S^{-1} S \Lambda S^{-1} = S^{-\top} \Lambda S^{-1}$  symmetrisch!  
Also  $\exists P$  mit  $S^{-\top} S^{-1} A \mathbf{x} = -\nabla P(\mathbf{x})$  oder  
$$\mathbf{x}' = A \mathbf{x} = -S S^{\top} \nabla P(\mathbf{x})$$

Dann gilt

$$\nabla P(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x}' = -\nabla P(\mathbf{x})^{\top} S S^{\top} \nabla P(\mathbf{x}) = -\|S^{\top} \nabla P(\mathbf{x})\|^2 \leq 0$$

und die Lösungsbahn erhöht  $P$  nicht.

**Def:** Für  $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ , wobei gilt  $\mathbf{f}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$ , ist  $F \in C^1(B(\mathbf{x}^*, \epsilon))$  eine *Lyapunov Funktion* wenn:

1.  $F$  hat ein einziges Minimum in  $\mathbf{x}^*$ ,
2.  $\nabla F(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) \leq 0$ ,  $\forall \mathbf{x} \in B(\mathbf{x}^*, \epsilon)$ .

Wenn  $<$  (für  $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}^*$ ) gilt, ist  $F$  eine *strenge Lyapunov Funktion*.

- ▶ Ein lokal konvexes Potential ist eine Lyapunov Funktion.
- ▶ Eine Lyapunov Funktion ist fast ein Potential.

# Stabilität für Kontinuierliche Dynamische Systeme

**Def:** Für  $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ , wobei gilt  $\mathbf{f}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$ , ist das Gleichgewicht  $\mathbf{x}^*$

- ▶ *global asymptotisch stabil* wenn  $\forall \mathbf{x}_0$  gilt

$$\mathbf{x}(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}^*,$$

- ▶ *lokal asymptotisch stabil* wenn  $\exists \delta > 0$  s.d.

$$|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}^*| \leq \delta \Rightarrow \mathbf{x}(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}^*,$$

- ▶ *lokal stabil* wenn  $\forall \epsilon > 0$ ,  $\exists \delta > 0$  s.d.

$$|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}^*| \leq \delta \Rightarrow |\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*| \leq \epsilon, \forall t \geq 0,$$

- ▶ *instabil* wenn nicht lokal stabil.

**Satz** (linearisierte Stabilität): Für  $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ , wobei gilt  $\mathbf{f}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$ , sei  $J = \partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{x}(\mathbf{x}^*)$  mit Spektrum  $\sigma(J)$  und  $\mu = \max \Re\{\sigma(J)\}$ . Das Gleichgewicht  $\mathbf{x}^*$

- ▶ ist lokal asymptotisch stabil wenn  $\mu < 0$ ,
- ▶ ist instabil wenn  $\mu > 0$ ,
- ▶ könnte stabil oder instabil sein wenn  $\mu = 0$ .

**Hausaufgabe:** Wende die Theorie für die obigen Modelle an.

# Stabilität für Kontinuierliche Dynamische Systeme

- ▶ Beispiel:  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ ,

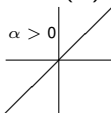
$$A = \begin{bmatrix} -\epsilon & 1 \\ -1 & -\epsilon \end{bmatrix}, \quad \sigma(A) = \{-\epsilon \pm i\}, \quad \mu = -\epsilon$$

- ▶  $\epsilon > 0 \Rightarrow \mathbf{x}^* = \mathbf{0}$  ist asymptotisch stabil.
- ▶  $\epsilon < 0 \Rightarrow \mathbf{x}^* = \mathbf{0}$  ist instabil.
- ▶  $\epsilon = 0$ ? Muss man direkt zeigen:

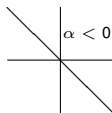
$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{x}\|_{\ell_2}^2 = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}' = \mathbf{x}^\top A \mathbf{x} = 0$$

$$\|\mathbf{x}(0)\|_{\ell_2} < \delta = \epsilon \Rightarrow \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*\|_{\ell_2} = \|\mathbf{x}(t)\|_{\ell_2} = \|\mathbf{x}(0)\|_{\ell_2} < \epsilon$$

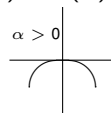
- ▶ Beispiel:  $f(x) = \alpha x$ ,  $x^* = 0$ ,  $\mu = f'(0) = \alpha$



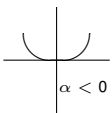
bergauf in  $x^* \Rightarrow$  instabil  
bergab in  $x^* \Rightarrow$  stabil



$$-p'(x) = f(x) \Rightarrow p(x) = -\alpha x^2/2$$



konkav in  $x^* \Rightarrow$  instabil  
konvex in  $x^* \Rightarrow$  stabil



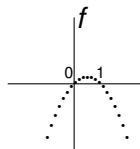
# Stabilität für Kontinuierliche Dynamische Systeme

- ▶ Beispiel:  $f(x) = x(1 - x)$ ,  $x^* \in \{0, 1\}$ ,  $f'(x) = 1 - 2x$

$$f'(0) = 1 > 0 \Rightarrow \text{instabil}$$

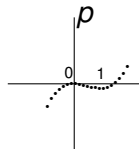
$$f'(1) = -1 < 0 \Rightarrow \text{asymptotisch stabil.}$$

$$-p'(x) = f(x) \Rightarrow p(x) = (2x - 3)x^2/6$$



$f$  bergauf,  $p$  konkav in 0  $\Rightarrow$  instabil

$f$  bergab,  $p$  konvex in 1  $\Rightarrow$  stabil



- ▶ Beispiel:  $f(x) = -x^2$ ,  $x^* = 0$ ,  $\mu = f'(0) = -2x|_{x=0} = 0$ .

$$x_0 > 0 \Rightarrow f(x_0) < 0 \Rightarrow x(t) \rightarrow 0$$

$$x_0 < 0 \Rightarrow f(x_0) < 0 \Rightarrow x(t) \rightarrow -\infty$$

$x^*$  ist instabil.

- ▶ Beispiel:  $f(x) = -x^3$ ,  $x^* = 0$ ,  $\mu = f'(0) = -3x^2|_{x=0} = 0$ .

$$x_0 > 0 \Rightarrow f(x_0) < 0 \Rightarrow x(t) \rightarrow 0$$

$$x_0 < 0 \Rightarrow f(x_0) > 0 \Rightarrow x(t) \rightarrow 0$$

$x^*$  ist asymptotisch stabil.

# Stabilität für Kontinuierliche Dynamische Systeme

- Beispiel:  $s'' + s = 0$ . In erste Ordnung:  $x = s, y = s'$ ,

$$x' = s' = y, \quad y' = s'' = -s = -x$$

$$\mathbf{x} = \langle x, y \rangle^\top, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}^* = \mathbf{0}$$

$$\mu = \max \Re \sigma \left( \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*) \right) = \max \Re \sigma(A) = 0.$$

Oben direkt gezeigt:  $\mathbf{x}^*$  ist stabil.

- Beispiel:  $s^{(4)} + 2s^{(2)} + s = 0$ .  $\langle x, y, u, v \rangle = \langle s, s^{(1)}, s^{(2)}, s^{(3)} \rangle$ ,

$$x' = y, y' = u, u' = v, v' = -2u - x, \quad \mathbf{x} = \langle x, y \rangle^\top$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}^* = \mathbf{0}$$

$$\mu = \max \Re \sigma \left( \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*) \right) = \max \Re \sigma(A) = \max \Re \{ \lambda : (\lambda^2 + 1)^2 = 0 \} = 0.$$

Allgemeine Lösung:  $s(t) = (\alpha + \beta t) \cos(t) + (\gamma + \delta t) \sin(t)$

$\beta, \delta \neq 0 \Rightarrow \mathbf{x}^*$  instabil.

# Stabilität für Kontinuierliche Dynamische Systeme

**Satz** (Gerschgorin): Für  $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$  gilt

$$\sigma(A) \subset \bigcup_{i=1}^n R_i \quad \text{wobei} \quad R_i = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq \sum_{j \neq i}^n |a_{ij}| \right\}$$

Weiters liegen genau  $k$  Eigenwerte in  $\bigcup_{j=1}^k R_j$  wenn diese Menge einen leeren Schnitt mit den anderen Scheiben hat.

► Beispiel:  $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} - \mathbf{b}$  wobei

$$\{a_{ij}\} = A = \text{tridiag}\{\alpha, \beta, \alpha\} \in \mathbb{R}^n$$

$$\mathbf{b} = \beta = -\langle 2, \dots, 2 \rangle^\top \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha = \langle 1, \dots, 1 \rangle^\top \in \mathbb{R}^{n-1}$$

$\hat{x}_1 = \hat{x}_k - \hat{x}_{k-1} = \Delta x$  ► Für  $A\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$  zeigt eine direkte Rechnung, dass  $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$  gilt.  
 $= \hat{x}_{k+1} - \hat{x}_k = -\hat{x}_n$  Daher gilt  $0 \notin \sigma(A)$ . Das einzige Gleichgewicht ist  $\mathbf{x}^* = A^{-1}\mathbf{b}$ .  
 $\tilde{x}_k = k\Delta x \xrightarrow{k=n} -\Delta \tilde{x}$

► Da  $A$  symmetrisch ist, gilt  $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$ .

► Mit dem Gerschgorin Satz folgt  $\max \Re\{\sigma(A)\} < 0$ .

► Daher für  $J = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*) = A$  gilt  $\mu = \max \Re\{\sigma(J)\} < 0$ , und das Gleichgewicht  $\mathbf{x}^*$  ist lokal asymptotisch stabil.

Weiters mit  $\lambda_{\max} = \max\{\sigma(A)\} < 0$  und  $\theta(t) = \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*\|_{\ell_2}^2$  gilt

$$\frac{1}{2}\theta'(t) = (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)^\top A(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) \leq \lambda_{\max}\theta(t) \Rightarrow \theta(t) \leq \theta(0)e^{2\lambda_{\max}t}$$

$\Rightarrow \mathbf{x}(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}^*$  und daher ist  $\mathbf{x}^*$  global asymptotisch stabil.

# Stabilität einer Dynamischen Lösung

- ▶ Beispiel:  $x' = 1$ . Die Lösung  $\xi(t) = t$  erfüllt  $\xi(0) = 0$ .  
Sei  $x$  eine störende Lösung mit  $x(0) = \epsilon$ . Die Differenz  $\phi(t) = x(t) - \xi(t)$  erfüllt

$$\phi' = x' - \xi' = 0, \quad \phi(0) = \epsilon$$

oder  $\phi(t) = \epsilon$ . Es gilt  $|x(t) - \xi(t)| = |\phi(t)| \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \mathcal{O}(\epsilon)$ , und daher ist die Lösung  $\xi(t)$  stabil.

- ▶ Beispiel: Gegebene Lösung  $\xi(t) = \langle \cos(t), \sin(t) \rangle^\top$  für

$$\mathbf{x}' = (1 - r^2)\mathbf{x} + \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad r = \|\mathbf{x}\|_{\ell_2}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Sei  $\mathbf{x}(t)$  eine störende Lösung mit  $\|\mathbf{x}(0)\| = r_0$ , wobei die Differenz  $\phi(t) = \mathbf{x}(t) - \xi(t)$  erfüllt  $\|\phi(0)\|_{\ell_2} = \mathcal{O}(\epsilon)$  und

$$(\phi \cdot \phi)' = 2(1 - r^2)\mathbf{x} \cdot \phi = (1 - r^2)(r^2 - 1 + \phi \cdot \phi)$$

oder mit  $\theta = \phi \cdot \phi$  und  $r' = (1 - r^2)r$ , (wobei  $r \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 1$ )

$$\theta' - (r'/r)\theta = -(1 - r^2)^2 \Rightarrow (\theta/r)' = -(1 - r^2)^2/r = (1 - r^{-2})r'$$

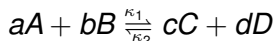
$$\theta \xleftarrow{t \rightarrow \infty} \frac{\theta}{r} = \frac{\epsilon^2}{r_0} + (r - r_0) + (r^{-1} - r_0^{-1}) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{O}(\epsilon^2)}{r_0} - \frac{(1 - r_0)^2}{r_0} = \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

Es gilt  $\|\mathbf{x}(t) - \xi(t)\|_{\ell_2} = \|\phi(t)\|_{\ell_2} = \sqrt{\theta(t)} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \mathcal{O}(\epsilon)$ , und daher ist die Lösung  $\xi(t)$  stabil.



# Chemische Kinetik

- Generisches Beispiel:



d.h.  $a$  Mol von  $A$  reagiert mit  $b$  Mol von  $B$ , und es ergibt sich  $c$  Mol von  $C$  und  $d$  Mol von  $D$ .

(1 Mol beinhaltet  $6.022 \cdot 10^{23}$  Einheiten.)

- ( $a, b, c, d$ ) sind die *stoichiometrischen* Koeffizienten.
- $A, B$  sind Edukte.  $C, D$  sind Produkte.
- Die Reaktion kann mit  $\kappa_1 \gg \kappa_2$  vorwärts (gegen mehr Produkte) oder mit  $\kappa_1 \ll \kappa_2$  rückwärts (gegen mehr Edukte) laufen.
- Die *Reaktionskonstanten*  $\kappa_1, \kappa_2$  hängen z.B. von der Temperatur der Umgebung ab.
- $[A]$  = Konzentration von  $A$  in Mol pro Liter.
- Mit der Reaktionsgeschwindigkeit  $x'(t)$  ist  $x(t)$  die Umsatzvariable, und es gelten

$$\begin{aligned} [A](t) &= [A](0) - a \cdot x(t), & [C](t) &= [C](0) + c \cdot x(t) \\ [B](t) &= [B](0) - b \cdot x(t), & [D](t) &= [D](0) + d \cdot x(t) \end{aligned}$$

# Chemische Kinetik

- Es folgt

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{a} \frac{d[A]}{dt} = -\frac{1}{b} \frac{d[B]}{dt} = \frac{1}{c} \frac{d[C]}{dt} = \frac{1}{d} \frac{d[D]}{dt}$$

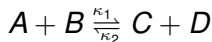
( $a, b, c, d = 1$  ist klar, und z.B.

$a = 2, b = 0$  ist wie

$A + B \rightsquigarrow A + A$  und  $AB \rightsquigarrow A^2$ )

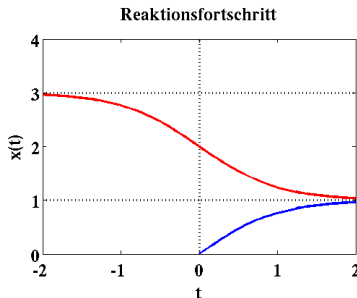
$$\begin{aligned} &= \kappa_1 [A]^a [B]^b - \kappa_2 [C]^c [D]^d \\ &= \kappa_1 ([A](0) - a \cdot x)^a ([B](0) - b \cdot x)^b \\ &\quad - \kappa_2 ([C](0) + c \cdot x)^c ([D](0) + d \cdot x)^d \end{aligned}$$

- Einfacher Fall:



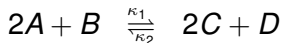
$$\begin{aligned} x' &= \kappa_1 (\alpha - x)(\beta - x) - \kappa_2 (\gamma + x)(\delta + x) \\ &= \dots = (\kappa_1 - \kappa_2)(x - x_1)(x - x_2) = f(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= 1, \quad x_2 = 3, \quad \kappa_1 > \kappa_2 \Rightarrow \\ f'(x_1) &= (\kappa_1 - \kappa_2)(x_1 - x_2) = -f'(x_2) < 0 \\ x_1 &\text{ asymptotisch stabil, } x_2 \text{ instabil} \end{aligned}$$



# Chemische Bifurkationen

- Beispiel: chemische Reaktion,



$$\kappa_i = \kappa_i(T), \quad i = 1, 2$$

$$\begin{aligned} x' &= \kappa_1(\alpha - 2x)^2(\beta - x) - \kappa_2(\gamma + 2x)^2(\delta + x) \\ &= \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 \end{aligned}$$

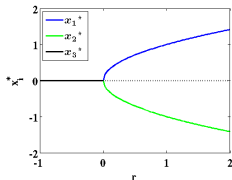
- Für  $\alpha_0 = 0, \alpha_1 = r, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = -1$ ,

$$x' = f(x), \quad f(x) = x(r - x^2), \quad f'(x) = r - 3x^2$$

Gleichgewichte:

$$\left\{ \begin{array}{ll} x_1^* = \sqrt{r}, & f'(\sqrt{r}) = -2r < 0, \quad \text{asymptotisch stabil} \\ x_2^* = -\sqrt{r}, & f'(-\sqrt{r}) = -2r < 0, \quad \text{auch} \\ x_3^* = 0, & f'(0) = r \begin{cases} r < 0, & \text{auch} \\ r = 0, & \text{auch} \\ r > 0, & \text{instabil} \end{cases} \end{array} \right.$$

Bifurkationsdiagramm der Gleichgewichte:



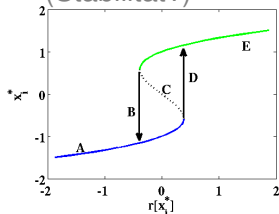
# Chemische Hysterese

► Für  $\alpha_0 = r$ ,  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 = 0$ ,  $\alpha_3 = -1$ ,  $x' = f(x)$

$$f(x) = r + x(1 - x^2), \quad f'(x) = 1 - 3x^2 > 0, \quad -\frac{1}{\sqrt{3}} < x < \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{Gleichgewichte: } r[x_i^*] = x_i^*[x_i^{*2} - 1], \quad i = 1, 2, 3, \quad -\frac{1}{\sqrt{3}} < x_2^* < \frac{1}{\sqrt{3}}$$

(Stabilität?)



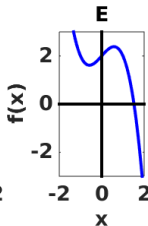
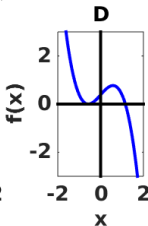
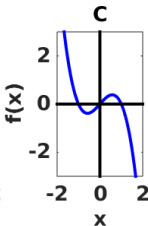
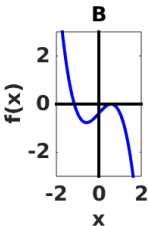
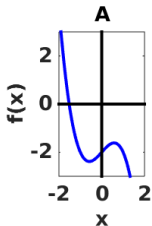
$$\text{A: } r < -\frac{2}{3\sqrt{3}} = r[x_{2,3}^*(B)] \Rightarrow \text{nur } x_1^*$$

$$\text{B: } r = -\frac{2}{3\sqrt{3}} \Rightarrow x_1^* < x_2^* = x_3^* \quad f'(x_{2,3}^*) = 0$$

$$\text{C: } -\frac{2}{3\sqrt{3}} < r < \frac{2}{3\sqrt{3}} \Rightarrow x_1^* < x_2^* < x_3^*$$

$$\text{D: } r = \frac{2}{3\sqrt{3}} \Rightarrow x_1^* = x_2^* < x_3^* \quad f'(x_{1,2}^*) = 0$$

$$\text{E: } r > \frac{2}{3\sqrt{3}} = r[x_{1,2}^*(D)] \Rightarrow \text{nur } x_3^*$$



# Masse-Feder-System

- ▶ Sei  $m$  die Masse und  $u$  ihre abwärtsgerichtete Auslenkung vom Ruhestand.
- ▶ Es gibt innere elastische Kraft der Feder  $f^{\text{elas}}$ , die gegen Auslenkungen vom Ruhestand wirkt. Mit

$$f^{\text{elas}} = -ku, \quad k > 0$$

wird diese durch eine lineare Abhängigkeit von  $u$  modelliert, wobei  $k$  die *Federkonstante* ist.

- ▶ Sei  $f$  eine äußere abwärtsgerichtete Kraft auf die Masse.
- ▶ Laut dem Newtonschen Gesetz kann die Bewegung durch

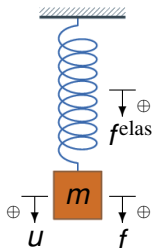
$$mu'' = -ku + f$$

modelliert werden, wobei  $u''$  die Beschleunigung und  $-ku + f$  die Summe der wirkenden Kräfte darstellen.

- ▶ Die Kräfte können auch bezüglich der Ableitung  $-P'(u)$  des folgenden zu minimierenden Potentials dargestellt werden,

$$P(u) = ku^2/2 - fu$$

wobei  $ku^2/2$  die elastische Energie der Feder und  $fu$  die gegenwirkende Arbeit der äußeren Kraft darstellen.



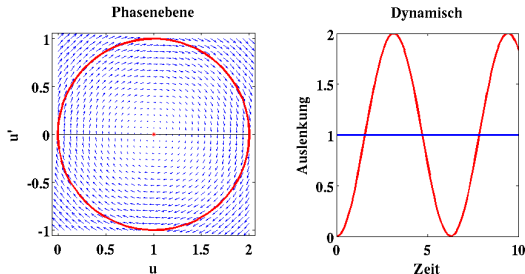
# Harmonische Schwingungen

- Die GDG  $mu'' = -P'(u)$  kann in erste Ordnung so umgeschrieben werden,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \underset{=:M}{=} \begin{bmatrix} u \\ u' \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k & 0 \end{bmatrix} \underset{=:K}{=} \begin{bmatrix} u \\ u' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ f \end{bmatrix}$$

Die Systemmatrix  $A = M^{-1}K$  erfüllt  $\sigma(A) = \{\pm i\sqrt{k/m}\}$ .

- Eine Simulation mit  $m = 1$ ,  $k = 1$  und  $f = 1$  zeigt:



- Die Bahn des Zustands im Phasenraum ist ein Kreis.
- Die Masse weist *harmonische Schwingungen* um den Ruhestand  $u^* = f/k = 1$  auf.

# Reibungskräfte

- ▶ Solche Bewegung ist nicht realistisch, weil es Reibungen gibt, die die Masse zum Ruhestand bringen.
- ▶ Je schneller die Bewegung, desto höher die Reibung, d.h. eine Reibungskraft  $f^{\text{reib}}$  wirkt gegen  $u'$ .
- ▶ Diese wird durch eine lineare Abhängigkeit von  $u'$  modelliert,

$$f^{\text{reib}} = -cu', \quad c > 0$$

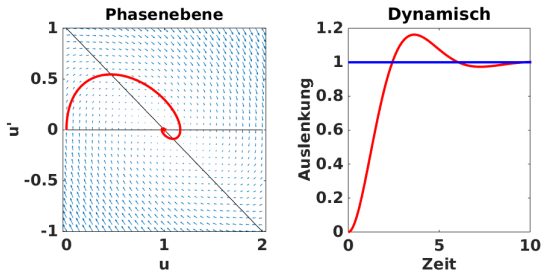
- ▶ Die GDG  $mu'' = -ku + f - cu'$  kann in erste Ordnung so umgeschrieben werden,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \underset{=:M}{=} \begin{bmatrix} u \\ u' \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k & -c \end{bmatrix} \underset{=:K}{=} \begin{bmatrix} u \\ u' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ f \end{bmatrix}$$

- ▶ Da die Eigenwerte der Systemmatrix  $A = M^{-1}K$  erfüllen,  
 $\lambda(m\lambda + c) + k = 0, \quad \lambda \in \{(-c \pm \sqrt{c^2 - 4k})/(2m)\}$   
gilt  $\max \Re\{\sigma(A)\} < 0$ , und das Gleichgewicht  $u^* = f/k$   
( $u' = 0$ ) ist lokal asymptotisch stabil.
- ▶ Wenn  $c^2 < 4k$  gilt, gibt es gedämpfte Schwingungen.  
Wenn  $c^2 > 4k$  gilt, kommt der Zustand monoton zum Ruhestand.

# Gedämpfte Federschwingungen

- Eine Simulation mit  $m = 1$ ,  $k = 1$ ,  $f = 1$  und  $c = 1$  zeigt:



- Die Bahn des Zustands im Phasenraum ist eine Spirale.
- Auf den Geraden im Phasenraum ist entweder  $u$  oder  $u'$  Null,

$$\begin{aligned} u' = 0 &\Leftrightarrow 0 = \begin{bmatrix} u \\ u' \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & -c/m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ u' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ f/m \end{bmatrix} \\ u' = (f - ku)/c &\Leftrightarrow 0 = \end{aligned}$$

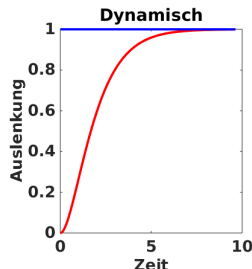
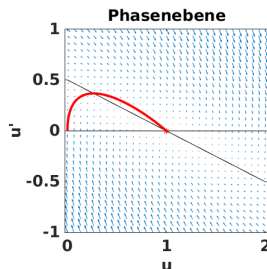
d.h. der Richtungsfeldvektor in einem Punkt dieser Geraden ist entweder waagerecht oder senkrecht.

- Die Masse weist *gedämpfte Schwingungen* um den Ruhestand  $u^* = f/k = 1$  auf. Zustand ist *untergedämpft*.

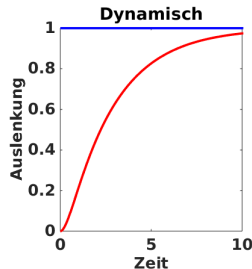
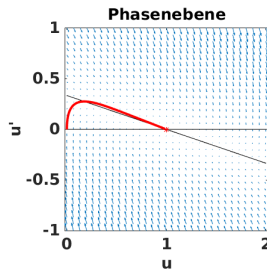


# Gedämpfte Federschwingungen

- ▶ Mit  $m = 1$ ,  $k = 1$ ,  $f = 1$  und  $c = 2$ , d.h.  $\sigma(A) = \{-c/(2m)\}$  ist der Zustand kritisch gedämpft:



- ▶ Mit  $m = 1$ ,  $k = 1$ ,  $f = 1$  und  $c = 3$ , d.h.  $\sigma(A) = \{(-c \pm \sqrt{c^2 - 4k})/(2m)\} \subset \mathbb{R}$  ist der Zustand übergedämpft:



**Hausaufgabe:** Für  $A = [0, 1; -1, -3]$  konstruiere  $P$  mit  $A = S\Lambda S^{-1}$ ,  $S^{-\top} S^{-1} A \mathbf{x} = -\nabla P(\mathbf{x})$  und  $\nabla P(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x}' \leq 0$ .

# Konkurrierende Spezies

- ▶ Filialen von 2 Geschäften zur Zeit  $t$ :  $x(t)$  und  $y(t)$ .
- ▶ Aufbau einer spezifischen Änderungsrate für  $x$ :

$$\text{ohne } y : \frac{x'}{x} = a_1, \quad \text{mit } y : \frac{x'}{x} = a_1 - b_1 y$$

- ▶ Aufbau einer spezifischen Änderungsrate für  $y$ :

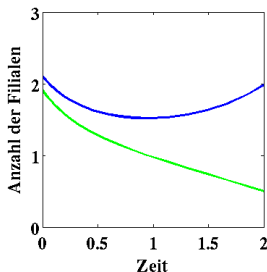
$$\text{ohne } x : \frac{y'}{y} = a_2, \quad \text{mit } x : \frac{y'}{y} = a_2 - b_2 x$$

- ▶ Gause Gleichungen:  $x^* = a_2/b_2, y^* = a_1/b_1$

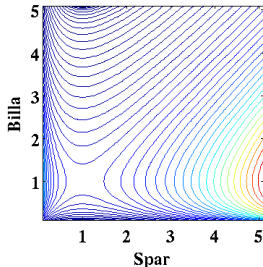
$$x' = (a_1 - b_1 y)x, \quad y' = (a_2 - b_2 x)y$$

Simulationen: ( $a_1 = a_2 = b_1 = b_2 = 1$ ;  $x_0 = 2.1, y_0 = 1.9$ )

Billa und Spar



Phasenraum



Gleichgewicht  
( $x^*, y^*$ ) ist  
*instabil*  
(aber anziehend  
auf  $\frac{y}{x} = \frac{a_1 b_2}{a_2 b_1}$ ).

realistisch?

# Konkurrierende Spezies

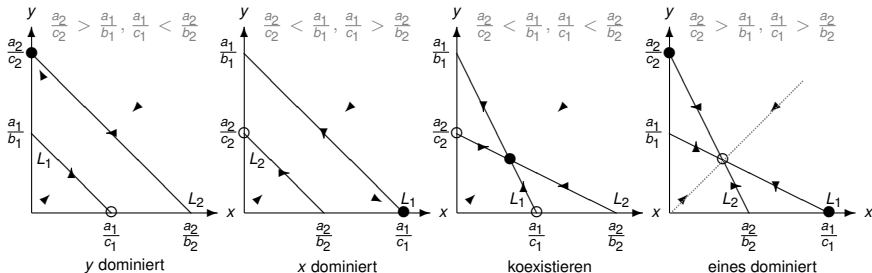
- Logistische Änderung des obigen Systems:

$$x' = (a_1 - c_1x - b_1y)x, \quad y' = (a_2 - c_2y - b_2x)y$$

d.h. ohne  $y$ ,  $x' = (a_1 - c_1x)x$ , und ohne  $x$ ,  $y' = (a_2 - c_2y)y$ .

- Phasenraum bezüglich der Geraden:

$$L_1 : c_1x + b_1y = a_1, \quad L_2 : b_2x + c_2y = a_2$$



- Geschäfte (und Spezies) koexistieren tatsächlich.

# Räuber-Beute

- ▶ Ein Ökosystem:

$x(t)$  = Anzahl der Pflanzenfresser zur Zeit  $t$

$y(t)$  = Anzahl der Raubtiere zur Zeit  $t$

- ▶ Aufbau einer spezifischen Änderungsrate für  $x$ :

ohne  $y$  :  $\frac{x'}{x} = a_1$ , mit  $y$  :  $\frac{x'}{x} = a_1 - b_1 y$

- ▶ Aufbau einer spezifischen Änderungsrate für  $y$ :

ohne  $x$  :  $\frac{y'}{y} = -a_2$ , mit  $x$  :  $\frac{y'}{y} = -a_2 + b_2 x$

- ▶ Lotka-Volterra, Räuber-Beute Gleichungen,

$$x' = (a_1 - b_1 y)x$$

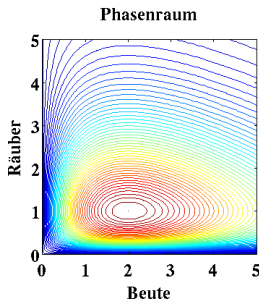
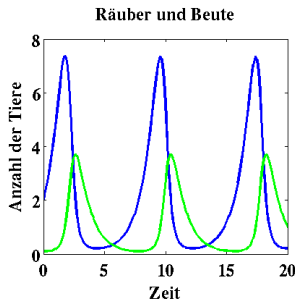
$$y' = (b_2 x - a_2)y$$

- ▶ Ist ein *autonomes* System, d.h.  $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  und  $\mathbf{f}$  hängt von der Zeit  $t$  nicht explizit ab.
- ▶ Gleichgewicht:

$$x^* = a_2/b_2, \quad y^* = a_1/b_1$$

# Räuber-Beute

- ▶ Simulationen:  $(a_1 = a_2 = b_1 = 1, b_2 = \frac{1}{2}; x_0 = 2, y_0 = \frac{1}{10})$



- ▶ *Strukturelle Stabilität:*
  - ▶ Wenn die Natur kleine Störungen der Systemeigenschaften macht, ändert sich das Systemverhalten nicht radikal.
  - ▶ Sonst wird das System durch solche natürliche Störungen geändert, bis es robuster wird.
  - ▶ Wenn kleine Störungen  $(\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \tilde{\mathbf{x}}' = \tilde{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}}), \mathbf{f} - \tilde{\mathbf{f}} \in C^1)$  in einem Modell gemacht werden und die Topologie der Lösungen sich nicht ändert, ist das Modell *strukturell stabil*.
- ▶ Kritik des Räuber-Beute Modells: ist nicht strukturell stabil.

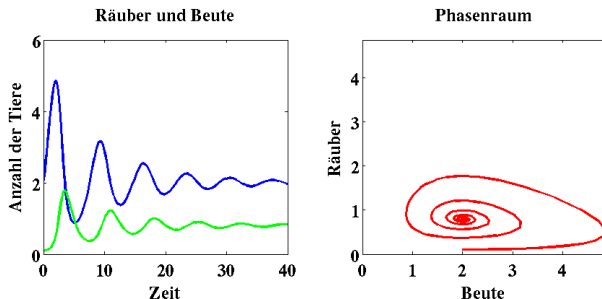
# Räuber-Beute

- ▶ Behauptung: Räuber-Beute ist nicht strukturell stabil.
- ▶ Wenn das Modell so geändert wird,

$$\begin{aligned}x' &= a_1 x(1 - \epsilon x) - b_1 xy \\ y' &= (b_2 x - a_2) y\end{aligned}$$

d.h. die Pflanzenfresser wachsen logistisch und nicht exponentiell, dann ändert sich die Topologie der Lösungen.

- ▶ Simulationen: ( $a_1 = a_2 = b_1 = 1, b_2 = \frac{1}{2}, \epsilon = \frac{1}{10}; x_0 = 2, y_0 = \frac{1}{10}$ )



- ▶ Im allgemeinen ist ein Modell mit einem stabilen aber nicht asymptotisch stabilen Gleichgewicht nicht strukturell stabil.

# Attraktoren und Abweiser

- ▶ Gibt es eine Änderung des Räuber-Beute Modells, die periodische Lösungen besitzt und strukturell stabil ist?
- ▶ Ja, und zwar mit einem stabilen *Grenzzyklus*.

$$x' = a_1 x \left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{b_1 xy}{1 + c_1 x}, \quad y' = a_2 y \left(1 - \frac{y}{b_2 x}\right)$$

mit Beute-Kapazität  $K$ , Grenze  $b_1/c_1$  für den Räuber-Effekt und Räuber-Kapazität  $b_2 x$ .

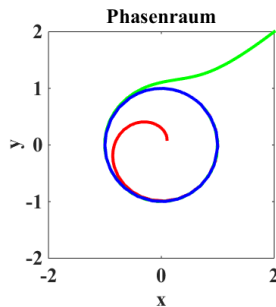
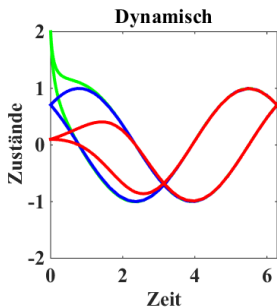
**Def:** Für  $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ , ist die Menge  $M$  ein *Attraktor*, wenn  $\exists \delta > 0$ , sodass  $\forall \mathbf{x}_0$  mit  $\text{dist}(\mathbf{x}_0, M) < \delta$ , gilt die Konvergenz  $\text{dist}(\mathbf{x}(t), M) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$ . Wenn die Konvergenz  $\text{dist}(\mathbf{x}(t), M) \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} 0$  gilt, ist  $M$  ein *Abweiser*.

**Def:** Für  $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ , ist die Menge  $G$  ein *Grenzzyklus*, wenn eine nicht triviale periodische Lösung  $\mathbf{x}_G$  in  $G$  liegt, und es existiert mindestens eine andere Lösung  $\tilde{\mathbf{x}}$ , die erfüllt  $\text{dist}(\tilde{\mathbf{x}}(t), G) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$  oder  $\text{dist}(\tilde{\mathbf{x}}(t), G) \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} 0$ .  $G$  ist stabil oder instabil, wenn es ein Attraktor bzw. Abweiser ist.

# Grenzzyklen

- Explizites Beispiel eines stabilen Grenzzykus.

$$\begin{cases} x' = (1 - r^2)x - y \\ y' = (1 - r^2)y + x \end{cases} \quad r^2 = x^2 + y^2 \quad r' = r(1 - r^2)$$



$$xx' = (1 - r^2)x^2 - xy$$

$$yy' = (1 - r^2)y^2 + xy$$

$$\frac{rr' = xx' + yy' = (1 - r^2)r^2 \Rightarrow r' = r(1 - r^2)}{}$$

$$\begin{cases} r \in (0, 1) \Rightarrow r' > 0 \\ r \in (1, \infty) \Rightarrow r' < 0 \end{cases} \Rightarrow r = 1 \text{ ist (asymptotisch) stabil.}$$



# Grenzzyklen

- Zerlegung in ein Potential plus eine Drehung:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} (1 - r^2)x \\ (1 - r^2)y \end{bmatrix} + \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 1 - 3x^2 - y^2 & -1 - 2xy \\ 1 - 2xy & 1 - x^2 - 3y^2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 - 2x^2 - r^2 & -2xy \\ -2xy & 1 - 2y^2 - r^2 \end{bmatrix} + \mathbf{A} \end{aligned}$$

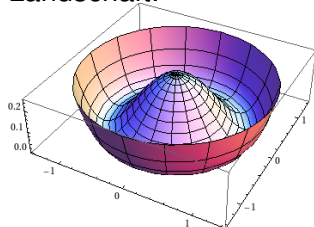
= symmetrisch + schief-symmetrisch

- Es gilt

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \underbrace{\mathbf{A}\mathbf{x}}_{\text{Drehung}} - \underbrace{\nabla P(\mathbf{x})}_{\text{Potential}}$$

$$\text{mit } P(\mathbf{x}) = \frac{1}{4}(1 - x^2 - y^2)^2$$

Landschaft:



# Stabilität für Kontinuierliche Dynamische Systeme

- Stabilität des Gleichgewichts für Räuber-Beute?

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} (a_1 - b_1 y)x \\ (b_2 x - a_2)y \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}^* = \begin{bmatrix} a_2/b_2 \\ a_1/b_1 \end{bmatrix}$$
$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} a_1 - b_1 y & -b_1 x \\ b_2 x & b_2 x - a_2 \end{bmatrix}$$
$$J = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*) = \begin{bmatrix} 0 & -b_1 a_2/b_2 \\ b_2 a_1/b_1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\sigma(J) = \{\lambda : \lambda^2 + a_1 a_2 = 0\}, \quad \mu = \max \Re \sigma(J) = 0.$$

**Satz:** Existiert für  $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ , wobei gilt  $\mathbf{f}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$ , eine Lyapunov Funktion  $F$ , dann ist  $\mathbf{x}^*$  ein lokal stabiles Gleichgewicht. Wenn  $F$  streng ist, ist  $\mathbf{x}^*$  lokal asymptotisch stabil.

**Hausaufgabe:** Konstruiere eine Lyapunov Funktion, um die Stabilität des Gleichgewichts für das Räuber-Beute Modell zu bestimmen.

# Wirtschaftliches Modell: *Peak Oil*

- ▶ Zusammenfassung der Problemstellung:
  - ▶ Erdölentdeckung: *Peak* im Jahr 1965.
  - ▶ Erdölförderung: *Peak* im Jahr 2006.
  - ▶ Alternativen sind bei weitem nicht so energiereich.
  - ▶ Mit Erdöl ist Weltbevölkerung gewaltig angestiegen.
  - ▶ Nachfrage trifft Angebot: Ölpreis schwankt.
  - ▶ Ziel: Ein grobes Modell für Prognosen zu entwickeln.

- ▶ Entdeckung: (Beobachtung: logistisch)

$$E'(t) = aE(t)[M - E(t)]$$

wobei  $M$  = Gesamtmenge an Erdöl in der Erde.

- ▶ Förderung (Produktion): (Beobachtung: logistisch mit Verzögerung)

$$F'(t) = e[E(t - \tau) - F(t)] \cdot (K'(t) > 0)$$

wobei  $\tau$  = Verzögerung und  $K$  = Kapital eines Monopols.

- ▶ Vorrat: (Mengenbilanz)

$$V'(t) = F'(t) - A'(t)$$

wobei  $A$  und  $N$  die Gesamtmengen am je angebotenen bzw. nachgefragten Erdöl sind.

## Wirtschaftliches Modell: *Peak Oil*

► Angebot:  $0 \xleftarrow{dt} A(t + dt) - A(t) \xrightarrow{P_{\min}(t)/P(t) \rightarrow 0} V(t),$

$$A(t + dt) - A(t) = V(t) \left\{ 1 - \left[ \frac{P_{\min}(t)}{P(t)} \right]^{b \cdot dt} \right\}$$

wobei  $P(t)$  = Fasspreis des Erdöls und  
 $P_{\min}(t)$  = minimaler (kostenabdeckender) Fasspreis.

$$P_{\min}(t) = q + h \frac{F(t)}{E(t) - F(t)}$$

Mit  $dt \rightarrow 0$  folgt

$$A'(t) = bV(t) \ln \left[ \frac{P(t)}{P_{\min}(t)} \right]$$

► Nachfrage:  $0 \xleftarrow{P_{\max} \leftarrow P(t)} N(t + dt) - N(t) \xrightarrow{P(t) \rightarrow 0} c_1 B(t),$

$$N(t + dt) - N(t) = c_1 B(t) \left\{ 1 - \left[ \frac{P(t)}{P_{\max}} \right]^{c_2 \cdot dt} \right\}$$

Mit  $c = c_1 c_2$  und  $dt \rightarrow 0$  folgt

$$N'(t) = cB(t) \ln \left[ \frac{P_{\max}}{P(t)} \right]$$

wobei  $B$  = Weltbevölkerung und  $P(t) = P_{\max} \Rightarrow$  Stillstand.

# Wirtschaftliches Modell: *Peak Oil*

- ▶ Fasspreis: (Effizienter-Markt Hypothese)

$$P'(t) = d[N'(t) - A'(t)], \quad (d \rightarrow \infty)$$

Mit  $N'(t) = A'(t)$ ,

$$P(t) = P_{\max}^{r(t)} \cdot P_{\min}^{s(t)}(t)$$

wobei

$$r(t) = \frac{cB(t)}{cB(t) + bV(t)}, \quad s(t) = \frac{bV(t)}{cB(t) + bV(t)}$$

- ▶ Kapital: (Mengenbilanz)

$$K'(t) = P(t) \cdot N'(t) - P_{\min}(t) \cdot A'(t)$$

- ▶ Bevölkerung

$$B'(t) = fB(t)[R + g \cdot A'(t) - B(t)]$$

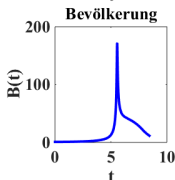
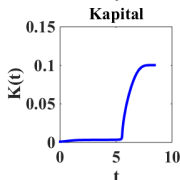
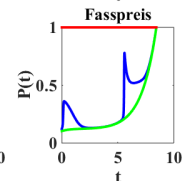
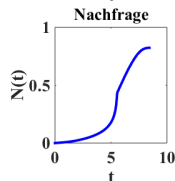
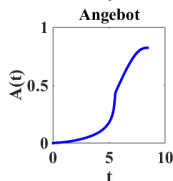
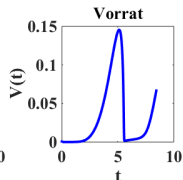
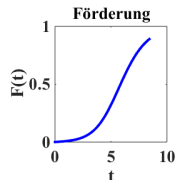
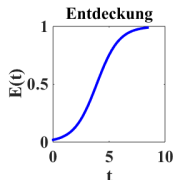
logistisch mit Kapazität  $R + g \cdot A'(t)$ , d.h.

- ▶  $R$  = Kapazität ohne Erdöl, und
- ▶ je schneller angeboten wird, desto höher ist die Kapazität.

# Wirtschaftliches Modell: *Peak Oil*

- Simulation: läuft bis es nicht mehr rentabel ist, d.h.  
 $P_{\min}(t) = P_{\max}$  und  $K'(t) = 0$ .

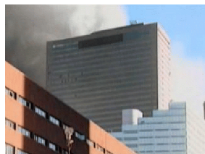
$a$	1.0e0
$b$	1.0e2
$c$	7.0e-3
$d$	$\infty$
$e$	9.5e-1
$f$	1.0e-1
$g$	2.0e2
$h$	1.0e-1
$M$	1.0e0
$P_{\max}$	1.0e0
$q$	1.0e-1
$R$	1.0e0
$\tau$	1.0e0



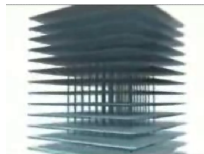
$P_{\max}$ ,  $P(t)$   
 $P_{\min}(t)$

Kritik?

# Modellierung des Einsturzes der WTC Türme



WTC7



Pfannkuchen-Modell



Steven Jones, BYU



Kevin Ryan, UL



# Einführung in die Erhaltungssätze

- ▶ Zwei Massen  $m_1, m_2$  mit Geschwindigkeiten  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  treffen einander ohne Schwerkraft,

Massenerhaltung: 
$$m_1 + m_2 = \tilde{m}_1 + \tilde{m}_2$$

Impulserhaltung: 
$$\mathbf{v}_1 m_1 + \mathbf{v}_2 m_2 = \tilde{\mathbf{v}}_1 \tilde{m}_1 + \tilde{\mathbf{v}}_2 \tilde{m}_2$$

Energieerhaltung: 
$$\frac{1}{2} |\mathbf{v}_1|^2 m_1 + \frac{1}{2} |\mathbf{v}_2|^2 m_2 = \frac{1}{2} |\tilde{\mathbf{v}}_1|^2 \tilde{m}_1 + \frac{1}{2} |\tilde{\mathbf{v}}_2|^2 \tilde{m}_2$$

und nachher gibt es Massen  $\tilde{m}_1, \tilde{m}_2$  mit Geschwindigkeiten  $\tilde{\mathbf{v}}_1, \tilde{\mathbf{v}}_2$ .

- ▶ Wenn für  $i = 1, 2$  gilt  $m_i = \tilde{m}_i$ , folgt

$$\tilde{\mathbf{v}}_i = \mathbf{v}_S - (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_S)$$

wobei

$$\mathbf{v}_S = (\mathbf{v}_1 m_1 + \mathbf{v}_2 m_2) / (m_1 + m_2)$$

die Geschwindigkeit für den Schwerpunkt bezeichnet.



# Das WTC Modell

- ▶ Zur Zeit  $t_1$  ist Masse  $m_1$  im freien Fall mit Geschwindigkeit  $u_1 < 0$ .
- ▶ Masse  $m_1$  fällt von Höhe  $h$  zur Masse  $m_2$ .
- ▶ Die Dauer des Falls ist:

$$t_2 = t_1 + [u_1 + \sqrt{u_1^2 + 2gh}]/g$$

- ▶ Die Geschwindigkeiten der Massen knapp vor der Kollision sind:

$$v_1 = -\sqrt{u_1^2 + 2gh}, \quad v_2 = 0$$

- ▶ Von der Kollision wird der Bruchteil  $\sigma$  von der Masse  $m_2$  verstaubt und zufällig gestreut:

$$m_2 \rightarrow (1 - \sigma)m_2 + \sigma m_2, \quad \sigma m_2 = \sum_{l>2} m_l, \quad \sum_{l>2} \tilde{v}_l m_l = 0$$

- ▶ Von Massenerhaltung ist die neue Masse im freien Fall:

$$m_1 + (1 - \sigma)m_2$$

# Das WTC Modell

- ▶ Sei  $\Delta p_0 > 0$  der Schwellenimpuls, der betragsmäßig notwendig wäre, um die Befestigung eines Stockwerks zu überwinden.
- ▶ Wenn der Impuls  $m_1 v_1 < 0$  der fallenden Masse betragsmäßig kleiner als  $\Delta p_0$  ist, gibt es keine weitere Bewegung.
- ▶ Von Impulserhaltung,

$$\begin{aligned}\Delta p_0 + v_1 m_1 + v_2 m_2 &= \tilde{v}_1 \tilde{m}_1 + \tilde{v}_2 \tilde{m}_2 + \sum_{l>2} \tilde{v}_l \tilde{m}_l \\ \Delta p_0 + v_1 m_1 &= \tilde{v}_1 m_1 + \tilde{v}_1 (1 - \sigma) m_2\end{aligned}$$

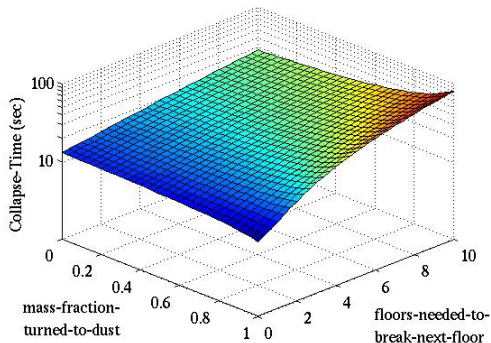
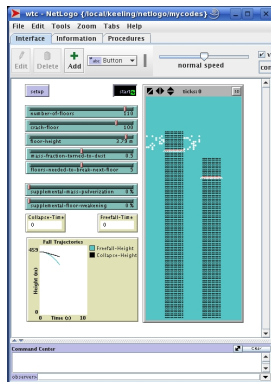
ist die neue Geschwindigkeit der Masse im freien Fall:

$$\tilde{v}_1 = [m_1 v_1 + \Delta p_0] / [m_1 + (1 - \sigma) m_2]$$

- ▶ Zusammenfassung:
  - ▶ Freier Fall:  $m_1$  mit  $u_1$  in  $t_1$ , dann  $v_1$  in  $t_2$
  - ▶ Kollision:  $\tilde{m}_1 = m_1 + m_2 - \text{Staub}$ , und  $\tilde{m}_1 \tilde{v}_1 = m_1 v_1 + \Delta p_0$
  - ▶  $\Delta p_0 = (N m_2) v_0 = N m_2 \sqrt{2gh}$  für eingegebenes  $N$werden iterativ im Code verwendet.
- ▶ Siehe <https://imsc.uni-graz.at/keeling/wtc/wtc.html>.

# Das WTC Modell

- Siehe <https://imsc.uni-graz.at/keeling/wtc/wtc.html> für den Code und für eine Beschreibung der folgenden Ergebnisse.



- Alle Fallzeiten sind größer als die für einen freien Fall, ausser  $\sigma = 1$  und  $N = 0$ .

# Modellierung eines Erdwärmesystems

Zuerst die Wärmeaufnahme:

- ▶ Das einfachste Modell der Flächenkollektoren in der Erde:
  - ▶ 1 Kompartiment für das Kollektorensystem.
  - ▶ 1 Kompartiment für das Erdesystem.
- ▶ Für jedes Kompartiment,
  - ▶ Kollektorensystem, Energie und Temperatur:
$$E_K = \rho_K c_K V_K T_K$$
  - ▶ Erdesystem, Energie und Temperatur:  $E_E = \rho_E c_E V_E T_E$
- ▶ Für reine Diffusion über die Grenzfläche:
  - ▶  $E'_K = \alpha_K^E S_K^E (T_E - T_K)$
  - ▶  $E'_E = \alpha_E^K S_E^K (T_K - T_E)$

$\rho$  = Dichte  
 $c$  = spezifische Wärmekapazität  
 $V$  = Volumen  
 $\alpha$  = Wärmeübergangskoeffizient  
 $S$  = Grenzflächeninhalt
- ▶ Die Flussrate durch das Kollektorensystem:  $F_K$
- ▶ Der Zufluss für das Kollektorensystem hat Temperatur  $T_P$ ,
  - ▶ die in der Wärmepumpe eingestellt ist, und
  - ▶ hängt von der Abflusstemperatur des Kollektorensystems ab.
  - ▶ Die Abflusstemperatur des Kollektorensystems ist  $T_K$ . Warum?
  - ▶ In einem *normalen* Temperaturbereich ( $0^\circ\text{C} - 10^\circ\text{C}$ ), gilt  
 $T_P = T_K - \Delta T$ ,  $\Delta T \approx 2^\circ\text{C}$ , aber  $\Delta T \rightarrow 0$  für  $T_K < 0$ .

# Wärmeaufnahme

- ▶ Energieerhaltung:  $T_P < T_K(0) = T_E(0)$

$$\begin{cases} \rho_K c_K V_K T'_K &= \alpha_K^E S_K^E (T_E - T_K) + F_K (\rho_P c_P T_P - \rho_K c_K T_K) \\ \rho_E c_E V_E T'_E &= \alpha_K^E S_K^E (T_K - T_E) \end{cases}$$

- ▶ Fragestellung: Soll die Flussrate  $F$  höher oder niedriger eingestellt werden?
- ▶ Intuitiv: Eiskaltes Wasser strömt über die Hand.
  - ▶ Es ist länger auszuhalten, wenn die Flussrate niedriger ist,
  - ▶ d.h. Energietransport  $E'$  ist weniger, wenn  $F$  kleiner ist.
  - ▶ Für das Erdwärmesystem soll Energietransport höher sein.
- ▶ Im obigen System der GDG ist der Energietransport ins Haus,
$$-(E_K + E_E)' = \rho_K c_K F_K (T_K - T_P)$$
- ▶ Wenn  $\Delta T = T_K - T_P$  fixiert ist, ist die gewonnene Energie pro Zeiteinheit umso höher, je größer  $F_K$  ist.
- ▶  $T_K - T_P$  im obigen System soll mit einer Funktion  $\phi(T_K)$  ersetzt werden, die von der Wärmepumpe abhängt, z.B.
$$\phi(T) \approx 2, T \approx 5, \text{ aber } \phi(T) \rightarrow 0 \text{ für } T < 0.$$
Eine Möglichkeit wäre,  $\phi$  ist eine logistische Funktion.

# Wärmeaufnahme

- Der Energietransport ins Haus wird

$$-(E_K + E_E)' = \rho_K c_K F_K \phi(T_K)$$

und die Wirkung einer größeren Flussrate  $F_K$  nimmt ab, wenn  $\phi(T_K)$  klein wird.

**Hausaufgabe:** Sei  $t^*(F_K)$  die Laufzeit der Pumpe, die notwendig ist, um eine gezielte Energie  $E^*$  ins Haus zu bringen:

$$E^* = \rho_K c_K F_K \int_0^{t^*(F_K)} \phi(T_K(t; F_K)) dt \quad \text{mit} \quad \phi(T) = 2 \min\left\{\max\left\{\frac{T}{T_K(0)}, 0\right\}, 1\right\}$$

Zeige  $T_K \in [0, T_K(0)]$  und daher  $\phi(T_K) = \frac{2T_K}{T_K(0)}$ . Zeige  $t^{*'}(F_K) < 0$ .

- Folglich ist es theoretisch vorteilhaft, dass  $F_K$  möglichst groß ist.
- Wenn die Flussrate immer größer wird, gibt es trotzdem Kosten für eine große Flussrate, besonders wenn sehr kalte Flüssigkeit visköser wird. Daher gibt es praktisch eine optimale Flussrate.
- Die Flussrate kann passiv durch parallele Leitungen erhöht werden.

# Parallele Kollektoren

- ▶ Mit Druckdifferenz  $\Delta P$  von der Wärmepumpe, Flussrate  $F$  und Widerstand  $W$  des Kollektorensystems folgt aus dem Ohmschen Gesetz:  
$$\Delta P = W \cdot F$$

- ▶ Für eine einzige Leitung mit Radius  $R$  und Länge  $L$  ist der Widerstand durch das Poiseuille'sche Gesetz gegeben,

$$W = 8\mu L / (\pi R^4)$$

wobei  $\mu$  die Viskosität der Flüssigkeit ist.

- ▶ Wenn die Strömung turbulent ist, ist der Widerstand noch höher, aber er hängt von  $L$  immer noch linear ab.
- ▶ Üblicherweise ist eine gegebene Fläche verfügbar für das Kollektorensystem, und daher wird angenommen dass die gesamte Länge aller Leitungen fixiert ist.
- ▶ Wenn  $n$  gleich lange Leitungen parallel verlegt werden, folgt wieder aus dem Ohmschen Gesetz dass

$$\Delta P = W^{(n)} F^{(n)} = w_i f_i, \quad i = 1, \dots, n$$

gilt, wobei  $w_i$  and  $f_i$  der Widerstand bzw. Flussrate der  $i$ ten Leitung sind,  $W^{(n)}$  und  $F^{(n)}$  für das gesamte Leitungssystem.

# Parallele Kollektoren

- ▶ Da der Widerstand linear von der Leitungslänge abhängt,

$$W^{(1)} = nw_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

- ▶ Laut dem Kirchhoff'schen Gesetz gilt

$$F^{(n)} = f_1 + \dots + f_n$$

- ▶ Laut dem Ohmschen Gesetz

$$\frac{\Delta P}{W^{(n)}} = F^{(n)} = f_1 + \dots + f_n = \frac{\Delta P}{w_1} + \dots + \frac{\Delta P}{w_n}$$

und zusammen mit  $W^{(1)} = nw_i, i = 1, \dots, n$ , folgt

$$\frac{1}{W^{(n)}} = \frac{1}{w_1} + \dots + \frac{1}{w_n} = \frac{n}{W^{(1)}/n}$$

oder

$$W^{(n)} = \frac{W^{(1)}}{n^2}, \quad F^{(n)} = \frac{\Delta P}{W^{(n)}} = n^2 \frac{\Delta P}{W^{(1)}} = n^2 F_1$$

- ▶ Daher für fixiertes  $\Delta P$  steigt die Flussrate quadratisch mit der Anzahl  $n$  der gleich langen parallelen Leitungen.
- ▶ Wie viele Leitungen können praktisch parallel verlegt werden?



# Einfaches Modell für ein Erdwärmesystem

Nun die Wärmeabgabe:

- ▶ Das einfachste Modell der Fussbodenheizung:
  - ▶ 1 Kompartiment für das Austeilersystem.
  - ▶ 1 Kompartiment für das Haussystem.

- ▶ Für das Austeiler- bzw. Haus-Kompartiment,

$$E_A = \rho_A c_A V_A T_A, \quad E_H = \rho_H c_H V_H T_H$$

- ▶ Für reine Diffusion über die Grenzfläche:

$$E'_A = \alpha_A^H S_A^H (T_H - T_A), \quad E'_H = \alpha_A^H S_A^H (T_A - T_H)$$

- ▶ Die Flussrate durch das Austeilersystem:  $F_A$
- ▶ Der Zufluss für das Austeilersystem hat die Temperatur  $T_S$  eines Wärmespeichers, der von der Wärmepumpe versorgt wird.

- ▶ Energieerhaltung:  $T_S > T_A(0) = T_H(0)$

$$\begin{cases} \rho_H c_H V_H T'_H &= \alpha_A^H S_A^H (T_A - T_H) \\ \rho_A c_A V_A T'_A &= \alpha_A^H S_A^H (T_H - T_A) + F_A (\rho_S c_S T_S - \rho_A c_A T_A) \end{cases}$$

- ▶ Wie mit der Wärmeaufnahme soll der Energietransport für Wärmeabgabe höher sein, wenn die Flussrate  $F_A$  höher ist.

# Wärmeabgabe

- Die Temperatur  $T_S$  des Wärmespeichers bleibt aber nicht konstant. Deswegen wird ein Kompartiment für den Wärmespeicher eingeführt:  $E_S = \rho_S c_S T_S$ .
- Das Kollektorensystem und das Austeilersystem werden nun durch die Einführung des neuen Kompartiments gekoppelt:  $E'_H + E'_A + E'_S + E'_K + E'_E = 0$ . (ohne  $Q$  und  $\alpha_H^L$ )
- Auch mit Lufttemperatur  $T_L$  und Sonnenstrahlung  $Q$  gelten  

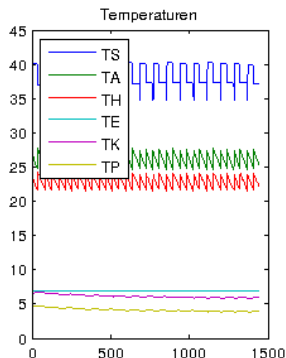
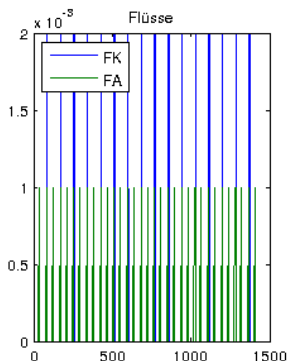
$$\rho_H c_H V_H T'_H = \alpha_H^L S_H^L (T_L - T_H), \quad \rho_E c_E V_E T'_E = Q$$
 ohne Heizung.  $T_S > T_A(0) = T_H(0) > T_K(0) = T_E(0) > T_L$
- Das Modell mit diesen Kopplungen ist:  $T_P = T_K - \phi(T_K)$

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \rho_H c_H V_H T'_H & = & \alpha_A^H S_A^H (T_A - T_H) + \alpha_H^L S_H^L (T_L - T_H) \\ \rho_A c_A V_A T'_A & = & \alpha_A^H S_A^H (T_H - T_A) + F_A(\rho_S c_S T_S - \rho_A c_A T_A) \\ \rho_S c_S V_S T'_S & = & F_A(\rho_A c_A T_A - \rho_S c_S T_S) \\ & & + F_K(\rho_K c_K T_K - \rho_P c_P T_P) \\ \rho_K c_K V_K T'_K & = & \alpha_K^E S_K^E (T_E - T_K) + F_K(\rho_P c_P T_P - \rho_K c_K T_K) \\ \rho_E c_E V_E T'_E & = & \alpha_K^E S_K^E (T_K - T_E) + Q \end{array} \right.$$

**Hausaufgabe:** Entwickle  $F_K(t)$  und  $F_A(t)$  damit  $T_H \in [T_{\min}, T_{\max}]$ .

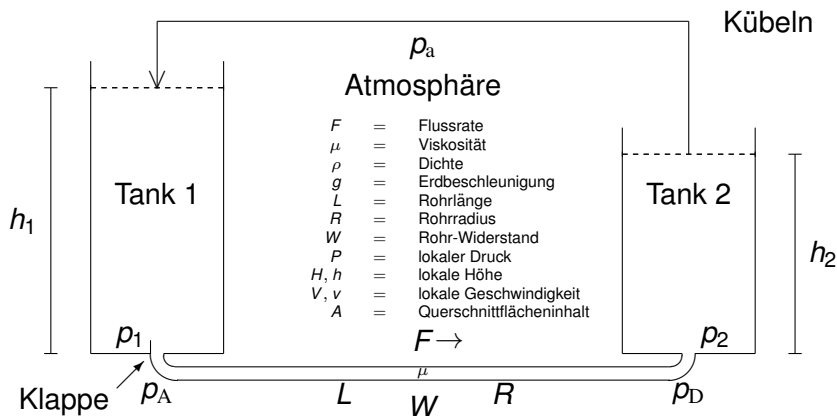
# Simulation des Erdwärmesystems

- Eine Simulation mit  $T_H \in [22\text{C}, 23\text{C}]$  und  $T_S \in [35\text{C}, 40\text{C}]$ :



- Siehe Matlab-Code. Größen durch realistische Geometrie.
  - Schlauchdurchmesser: 1cm Fußbodenheizung, 3cm Erdekollektoren. Flächen:  $5.8\text{m}^2$  Haus,  $70.7\text{m}^2$  Erde.
  - Abstände in spiralförmiger Verlegung: 20cm Fussbodenheizung, 60cm Erdekollektoren.

# Effekt der Luftblasen in Rohren



► Bernoulli:  $P + \rho g H + \frac{\rho}{2} V^2 = \text{Konstante},$

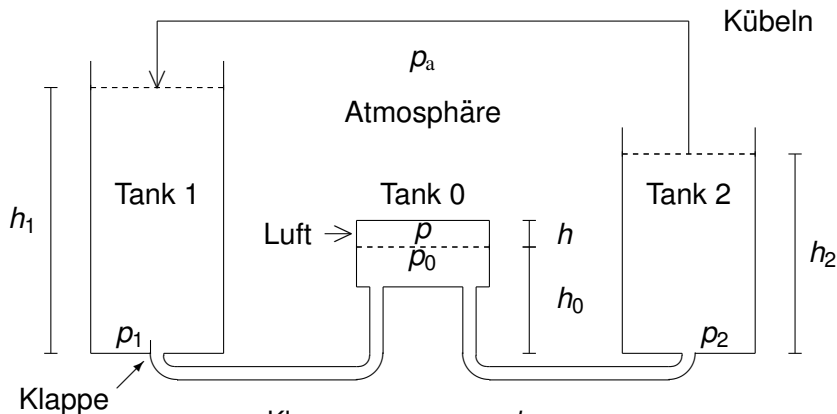
$$v = F/A, \quad A = \pi R^2, \quad p_{1,2} = p_a + \rho g h_{1,2}, \quad \frac{\rho}{2} v^2 + p_{A,D} = p_{1,2}.$$

► Poiseuille:  $p_A - p_D = W \cdot F, \quad W = 8\mu L/(\pi R^4)$

► Klappe auf,  $F$  nach rechts,  $h_1, h_2$  konstant durch Kübeln.

**Hausaufgabe:** Entwickle ein dynamisches Modell fürs System.

# Effekt der Luftblasen in Rohren



- ▶ Klappe zu,  $p_0 + \rho g h_0 = p_2$
- ▶ Bernoulli:
  - ▶ Klappe auf,  $p_0 + \rho g h_0 = \frac{1}{2}(p_1 + p_2) > p_2$
- ▶ Ideales Gas:  $p = \rho_L \mathcal{R} T = p_0$
- ▶ Strömung erhöht  $p_0 = p$ , reduziert Luftvolumen daher  $h$ .
- ▶ Für neues Flüssigkeitsvolumen im Tank 0 kommt gleich viel von Tanks 1 und 2, damit  $p_1 - p_2 = FW$  konstant bleibt.

**Hausaufgabe:** Bestimme die Gleichgewicht-Druckverteilung.

# Rudern Dynamik

- Die Bootgeschwindigkeit soll bestimmt werden, wenn 8 Sportler das Boot rudern.

- Grundmodell: Das Newtonsche Gesetz  $F = m \cdot a$ ,

$$Mu' = T - D$$

wobei  $M$  = Masse des Boots,  $u$  = Bootgeschwindigkeit,  $T$  = Treibkraft (Traction) und  $D$  = Zugkraft (Drag).

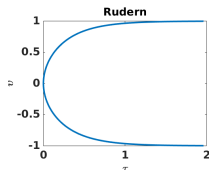
- Bemerkung:  $\text{sign}(u') = \text{sign}(T - D)$  und  $\text{sign}(u) = \text{sign}(D)$
- $D \propto$  Grenzflächeninhalt  $S$ . Strömungstheorie:  $D \propto u^2$ .

$$D = bSu|u|$$

- $T$ ? Arbeit = Kraft  $\times$  Weg =  $T \cdot (udt)$ ,  
Leistung = Kraft  $\times$  Geschwindigkeit =  $T \cdot u$ .
- Angenommen: Leistung fixiert,  $P$  pro Sportler:  $8P = Tu$ .
- Mathematisches Modell,  $Mu' = 8P/u - bSu|u|$ .

- Lösung:  $v := \frac{u}{v}$ ,  $v := 2\left[\frac{P}{bS}\right]^{\frac{1}{3}}$ ,  $\tau := \frac{bSvt}{M}$ ,  

$$\ln \left[ \frac{v^2 + |v| + 1}{(1 - |v|)^2} \right] + \frac{\pi}{\sqrt{3}} - 2\sqrt{3} \tan^{-1} \left[ \frac{1 + 2|v|}{\sqrt{3}} \right] = 6\tau$$



# Globale Stabilität

- ▶ Beispiel: Schadstoff im See, Zufluss  $rK$ , Abfluss  $rS$ ,

$$VS' = r(K - S), \quad S(0) = S_0$$

Gleichgewicht:  $S^* = K$ . Stabil? Laut dem Satz,

$$S' = f(S), \quad f(S) = \frac{r}{V}(K - S), \quad f'(S) = -\frac{r}{V} < 0$$

Daher ist  $S^*$  **lokal** asymptotisch stabil. Lösung:

$$S(t) = K + (S_0 - K)e^{-rt/V}, \quad S(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} K, \quad \forall S_0$$

Daher ist  $S^*$  **global** asymptotisch stabil.

- ▶ Beispiel: Rudern Dynamik,  $Mu' = 8P/u - bSu|u|$ ,

$$u' = f(u), \quad f(u) = \frac{bS}{Mu}(v^3 - |u|^3), \quad v^3 = \frac{8P}{bS}$$

Gleichgewichte:  $u_1^* = +v$ ,  $u_2^* = -v$ . Stabil?

Laut dem Satz,

$$f'(u) = -\frac{bS}{Mu^2}(v^3 + 2|u|^3), \quad f'(\pm v) = -3\frac{bS}{M}v < 0$$

Daher sind  $u_{1,2}^* = \pm v$  **lokal** asymptotisch stabil.

Da es zwei lokal asymptotisch stabile Gleichgewichte gibt, sind diese nicht global asymptotisch stabil.

# Chaos

**Def:** Ein dynamisches System, das sich innerhalb einer Phasenraummenge  $\Omega$  entwickelt, ist *chaotisch* wenn:

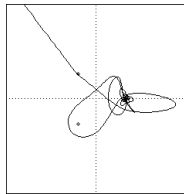
- (a)  $\forall x_0 \in \Omega, \forall \epsilon > 0, \exists$  periodische Lösung  $\pi$  und Zeit  $t$  mit  $|\pi(t) - x_0| < \epsilon$ . (periodische Bahnen sind dicht)
- (b)  $\forall x_1, x_2 \in \Omega, \forall \epsilon > 0, \exists$  Lösung  $x$  und Zeiten  $t_1, t_2$  mit  $|x(t_1) - x_1| < \epsilon, |x(t_2) - x_2| < \epsilon$ . (topologisch mischend)
- (c)  $\exists M > 0$  wobei für jede Lösung  $x$  und  $\forall \epsilon > 0, \exists$  Lösung  $\tilde{x}$  und Zeit  $t$  mit  $|x(t) - \tilde{x}(t)| > M$  obwohl  $|x(0) - \tilde{x}(0)| < \epsilon$ . (empfindliche Abhängigkeit - folgt aus den anderen!)

- ▶ Chaos ist möglich für Systeme in  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ,
  - ▶ mit  $n \geq 1$  für diskrete Systeme, z.B. logistisch, aber
  - ▶ nur mit  $n \geq 3$  für kontinuierliche Systeme, z.B. Lorenz.
- ▶ Kontinuierlich in  $\mathbb{R}^2$ : Sei  $D = \cup \{x \in \pi : \pi \text{ ist periodisch}\}$ . Fixiere  $x \in \overline{D} \setminus D$  und  $\{x_n\} \subset D$  mit  $x_n \in \pi_n$  und  $x_n \rightarrow x$ . System ist autonom und regulär, d.h. (Jordan)  $\pi_n$  teilt  $\mathbb{R}^2$  in das Innere  $I_n$  und das Äußere  $\ddot{A}_n$ . So  $\pi_n$  trennt  $x_k \in I_n$  von  $x_m \in \ddot{A}_n$  für gewisse  $k, m \neq n$ , und verhindert topologisches Mischen.



# Seltsame Attraktoren für Chaotische Systeme

- ▶ Kontinuierliches chaotisches System: Pendel und Magneten

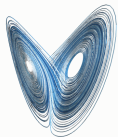


- ▶ Freiheitsgrade  $x_1(t), x_2(t)$ ,  
Position in  $\mathbb{R}^2$ ,  $v_1(t), v_2(t)$   
Geschwindigkeiten in  $\mathbb{R}^2$ .
- ▶ Zustand  
 $\langle x_1(t), x_2(t), v_1(t), v_2(t) \rangle \in \mathbb{R}^4$ .

- ▶ Kontinuierliches chaotisches System: Lorenz, Atmosphäre

$$\begin{aligned}\dot{X} &= \sigma(Y - X) & \sigma &= \text{Prandtl \#} \\ \dot{Y} &= (\rho - Z)X - Y & \rho &= \text{Rayleigh \#} \\ \dot{Z} &= XY - \beta Z & \sigma &= 10, \beta = 8/3, \\ & & \rho &= 28 \Rightarrow \text{Chaos}\end{aligned}$$

Seltsamer Attraktor  
 $D \approx 2.06 \pm 0.01$



**Def:** Sei  $E$  eine Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$  mit Durchmesser  
 $L = \sup\{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_{\ell_2} : \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E\}$  und  $N(\ell)$  die Mindestanzahl von  
Mengen mit Durchmesser  $\ell$ , die nötig sind, um  $E$  zu überdecken.  
Die Dimension von  $E$  definiert durch  $D(E) = \lim_{\ell \downarrow 0} \ln(N(\ell)) / \ln(L/\ell)$ .

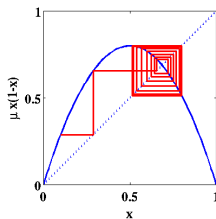
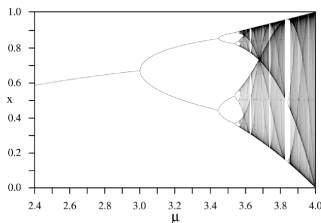
**Hausaufgabe:** Zeige, die Cantormenge hat Dimension  $\ln(2)/\ln(3)$ .

# Diskrete Modelle

- ▶ Beispiel: logistische Evolution,

$$x_{n+1} = \mu x_n (1 - x_n)$$

$x_n$  = Population nach der  $n$ ten Zeiteinheit oder nach dem  $n$ ten Übergang.



- ▶  $\mu \in [0, 1]$ , aussterben.
  - ▶  $\mu \in (1, 3]$ ,  $x_n \rightarrow (\mu - 1)/\mu$ .
  - ▶  $\mu \in (3, 1 + \sqrt{6}]$ ,  $x_n \rightarrow \{x_{1,0}^*(\mu), x_{1,1}^*(\mu)\}$ .
  - ▶  $\mu \in (\mu_k, \mu_{k+1}]$ ,  $x_n \rightarrow \{x_{k,j}^*(\mu)\}_{j=0}^{2^k-1}$  (Periodenverdoppelung).
  - ▶  $\mu \approx 3.56995$  und größer, Chaos.
- ▶ Hybrid: kontinuierlich in einem diskreten Modell,  
$$y(t_n) = A(x_n), \quad y' = g(y), \quad x_{n+1} = B(y(t_{n+1}))$$

# Lachs Dynamik

- ▶ Zustandsvariablen:
  - ▶  $x_n$  = Anzahl von  $10^8$  Lachsen (Erwachsene) am Ende des  $n$ ten Laichzyklus, auch zu Beginn des  $(n+1)$ ten.
  - ▶  $y(t)$  = Anzahl von  $10^8$  Larven zur Zeit  $t \in [t_n, t_{n+1}]$ , d.h. während des  $(n+1)$ ten Laichzyklus.
- ▶ Beziehung zwischen  $y(t_n)$  und  $x_n$ ?
  - ▶  $x_n \uparrow \Rightarrow$  Weibchen  $\uparrow \Rightarrow$  Eier  $\uparrow \Rightarrow$  Larven  $\uparrow$
  - ▶ Also einfach 
$$y(t_n) = \alpha x_n$$
- ▶ Beziehung zwischen  $y(t_n)$ , d.h.  $x_n$ , und  $y(t_{n+1})$ ?
  - ▶ Erwachsene fressen die Larven.
  - ▶  $x_n \uparrow \Rightarrow$  Anzahl der gefressenen Larven  $\uparrow$ .
  - ▶ Also einfach 
$$y' = -\beta x_n y, \quad y(t_{n+1}) = y(t_n) e^{-\beta x_n (t_{n+1} - t_n)} = \alpha x_n e^{-\beta x_n (t_{n+1} - t_n)}$$
- ▶ Beziehung zwischen  $y(t_{n+1})$  und  $x_{n+1}$ ?
  - ▶ Bruchteil  $\gamma$  von  $y(t_{n+1})$  überleben.
  - ▶ Bruchteil  $\delta$  von überlebenden  $x_n$ ? Pazifik:  $\delta = 0$ . Atlantik:  $\delta > 0$ . Nimm Pazifik, also  $\delta = 0$ .
  - ▶ Also einfach 
$$x_{n+1} = \gamma y(t_{n+1}) + \delta x_n$$

# Lachs Dynamik

- ▶ Alles zusammen

$$x_{n+1} = ax_n e^{-bx_n}$$

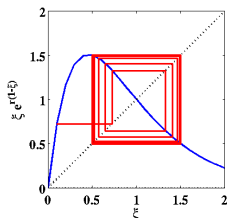
wobei  $a = \gamma\alpha$ ,  $b = \beta(t_{n+1} - t_n)$ .

- ▶ Weiter,

$$x_{n+1} = x_n e^{\ln a - bx_n} = x_n e^{\ln a [1 - \frac{b}{\ln a} x_n]}$$

- ▶ Dimensionslos,  $r = \ln a$ ,  $\xi_n = \frac{b}{r} x_n$ ,

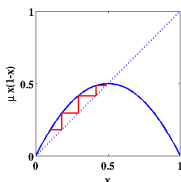
$$\xi_{n+1} = \frac{b}{r} x_{n+1} = \frac{b}{r} x_n e^{r(1 - \frac{b}{r} x_n)} = \xi_n e^{r(1 - \xi_n)}$$



- ▶  $r \in [r_0, r_1]$ ,  $\xi_n \rightarrow \xi_{0,0}^*$ .
- ▶  $r \in (r_1, r_2]$ ,  $\xi_n \rightarrow \{\xi_{1,0}^*, \xi_{1,1}^*\}$ .
- ▶  $r \in (r_k, r_{k+1}]$ ,  $\xi_n \rightarrow \{\xi_{k,j}^*\}_{j=0}^{2^k-1}$   
(Periodenverdoppelung).
- ▶  $r^* \approx 2.6924$ , Chaos.

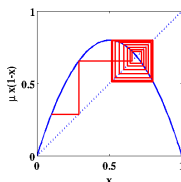
# Stabilität für Diskrete Dynamische Systeme

- Das logistische Modell:  $x_{n+1} = f(x_n)$ ,  $f(x) = \mu x(1-x)$



$$\mu = 2, \quad x^* = \frac{\mu-1}{\mu} = \frac{1}{2}$$

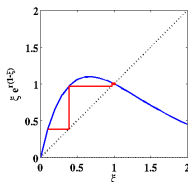
$$f'(x^*) = 0,$$



$$\mu = \frac{16}{5}, \quad x^* = \frac{\mu-1}{\mu} = \frac{11}{16}$$

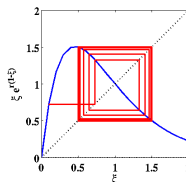
$$f'(x^*) = -6/5$$

- Das Lachs-Modell:  $\xi_{n+1} = F(\xi_n)$ ,  $F(\xi) = \xi e^{r(1-\xi)}$



$$r = \frac{3}{2}, \quad \xi^* = 1$$

$$F'(\xi^*) = -1/2,$$



$$r = \frac{11}{5}, \quad \xi^* = 1$$

$$F'(\xi^*) = -6/5$$

# Stabilität für Diskrete Dynamische Systeme

**Def:** Für  $\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}^k)$ , wobei gilt  $\mathbf{x}^* = \mathbf{f}(\mathbf{x}^*)$ , ist das Gleichgewicht  $\mathbf{x}^*$

- ▶ *global asymptotisch stabil* wenn  $\forall \mathbf{x}^0$  gilt

$$\mathbf{x}^k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}^*,$$

- ▶ *lokal asymptotisch stabil* wenn  $\exists \delta > 0$  s.d.

$$|\mathbf{x}^0 - \mathbf{x}^*| \leq \delta \Rightarrow \mathbf{x}^k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}^*,$$

- ▶ *lokal stabil* wenn  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$  s.d.

$$|\mathbf{x}^0 - \mathbf{x}^*| \leq \delta \Rightarrow |\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*| \leq \epsilon, \forall k \geq 0,$$

- ▶ *instabil* wenn nicht lokal stabil.

**Satz** (linearisierte Stabilität): Für  $\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}^k)$ , wobei gilt  $\mathbf{x}^* = \mathbf{f}(\mathbf{x}^*)$ , sei  $J = \partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{x}(\mathbf{x}^*)$  mit Spektralradius  $\rho(J)$ . Das Gleichgewicht  $\mathbf{x}^*$

- ▶ ist lokal asymptotisch stabil wenn  $\rho(J) < 1$ ,
- ▶ ist instabil wenn  $\rho(J) > 1$ ,
- ▶ könnte stabil oder instabil sein wenn  $\rho(J) = 1$ .

# Stabilität für Diskrete Dynamische Systeme

- Für das Lachs-Modell:

$$F(\xi) = \xi e^{r(1-\xi)}, \quad F'(\xi) = (1 - r\xi)e^{r(1-\xi)}$$

Mit  $\xi^* = 1$ ,

$$|F'(\xi^*)| = |1 - r| \begin{cases} < 1, & 0 < r < 2, \\ > 1, & r > 2, \end{cases} \begin{array}{l} \text{asymptotisch stabil} \\ \text{instabil.} \end{array}$$

Für  $r = 0$  gilt  $F(\xi) = \xi$ , und  $\xi^*$  ist stabil:

$$|\xi_0 - 1| < \epsilon \Rightarrow |\xi_n - 1| = |\xi_0 - 1| < \epsilon.$$

Für  $r = 2$ ,  $(F(1) = 1, F'(1) = -1, F''(1) = 0, F'''(1) = 4)$

$$\exists \epsilon \text{ s.d. } -1 \leq F'(\xi) \leq 0, \quad \forall \xi \in [1 - \epsilon, 1 + \epsilon]$$

Wenn  $\xi \in [1 - \epsilon, 1]$ ,  $\exists \eta \in [1 - \epsilon, 1]$  s.d.

$$\begin{aligned} 0 &\geq 1 - F(\xi) = F(1) - F(\xi) = F'(\eta)(1 - \xi) \geq -(1 - \xi) \\ &\Rightarrow 1 = F(1) \leq F(\xi) \leq 2 - \xi \leq 2 - (1 - \epsilon) = 1 + \epsilon \end{aligned}$$

Wenn  $\xi \in [1, 1 + \epsilon]$ ,  $\exists \zeta \in [1, 1 + \epsilon]$  s.d.

$$\begin{aligned} 0 &\geq F(\xi) - 1 = F(\xi) - F(1) = F'(\zeta)(\xi - 1) \geq -(\xi - 1) \\ &\Rightarrow 1 = F(1) \geq F(\xi) \geq 2 - \xi \geq 2 - (1 + \epsilon) = 1 - \epsilon \end{aligned}$$

Daher gilt  $F([1 - \epsilon, 1 + \epsilon]) \subset [1 - \epsilon, 1 + \epsilon]$  und

$$|\xi_0 - 1| \leq \epsilon \Rightarrow |\xi_n - 1| \leq \epsilon$$

und  $\xi^*$  ist stabil.

# Stabilität für Diskrete Dynamische Systeme

## ► Experimente für das Lachs-Modell:

- $r = 1.609$ ,  $\xi_0 = 1.4311$ ,  $\xi_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 = \xi^*$ .
- $r = 2.306$ ,  $\xi_0 = 1$ ,  $\xi_n = 1$ ,  $\forall n$ . (aber instabil)
- $r = 2.3979$ ,  $\xi_0 = 1.4311$ ,  $\xi_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \{0.342658, 1.65734\}$ .
- $r = 2.70805$  ( $> 2.6924 = r^*$ ), Chaos.

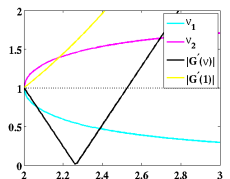
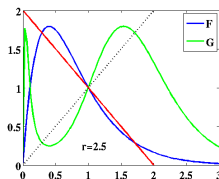
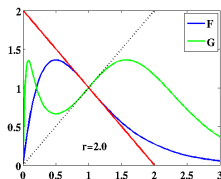
## ► Herleitung periodischer Grenzzyklen:

$$G(\xi) = F(F(\xi)) = \xi \exp[r(2 - \xi - \xi e^{r(1-\xi)})]$$

$$G'(\xi) = (1 - r\xi)(1 - r\xi e^{r(1-\xi)}) \exp[r(2 - \xi - \xi e^{r(1-\xi)})]$$

$$\xi = 1 \text{ oder } \xi = \nu \text{ wobei } \nu e^{r(1-\nu)} = 2 - \nu \Rightarrow G(\xi) = \xi$$

Genau 4 Lösungen für  $r > 2$ :  $0 < \nu_1 < 1 < \nu_2$ ,



Weiters:

$$G'(\nu) = (1 - r\nu)(1 - r(2 - \nu))$$

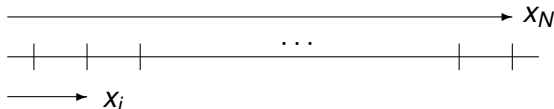
und

$$G'(1) = (1 - r)^2 > 1, \quad |G'(\nu_1)| = |G'(\nu_2)| < 1, \quad r \in (2, 2.5265)$$



# Verkehr Dynamik

- ▶ Auto Positionen  $x_i(t)$ , Geschwindigkeiten  $x'_i(t)$ .



- ▶  $x_N(t)$  ist fixiert und stellt dar, unendlich viele vordere Fahrer im gleichen Zustand.
- ▶ Der  $i$ te Fahrer bremmt stärker wenn
  - ▶  $x_{i+1}(t) - x_i(t)$  kleiner. (Abstand vor mir kleiner)
  - ▶  $x'_i(t) - x'_{i+1}(t)$  größer. (Entschleunigung vor mir)
  - ▶ Zusammen,

$$\text{Bremsenkraft} = a \frac{x'_i - x'_{i+1}}{x_{i+1} - x_i} \quad a \approx m \frac{x'_i + x'_{i+1}}{2}$$

- ▶ Newtonsches Gesetz  $ma = F$ , Reaktionszeit  $\tau$ ,

$$-mx''_i(t + \tau) = a \frac{x'_i(t) - x'_{i+1}(t)}{x_{i+1}(t) - x_i(t)} = -a \frac{d}{dt} \ln[x_{i+1}(t) - x_i(t)]$$

Mit  $\lambda = a/m$ ,  $x_N$  gegeben,

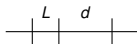
$$x'_i(t + \tau) = \lambda \ln[x_{i+1}(t) - x_i(t)] + \alpha_i, \quad i = 1, \dots, N-1$$

# Stabilität für Verkehr Dynamik

- Das Modell der Verkehr Dynamik:  $x_N$  gegeben,

$$x'_i(t + \tau) = \lambda \ln[x_{i+1}(t) - x_i(t)] + \alpha_i, \quad i = 1, \dots, N-1$$

- Idealisierter Zustand:



- Alle Autos haben die gleiche Länge  $L$ , den gleichen Abstand  $d$  und die gleiche Geschwindigkeit  $u$ .
  - Die Verkehrsdichte  $\rho = 1/(d + L) = 1/[x_{i+1} - x_i]$  ist räumlich konstant und maximiert den Verkehrsfluss  $f(\rho) = \rho \cdot u(\rho)$ .

DG  $\Rightarrow \alpha_i = u - \lambda \ln(1/\rho) =: \alpha$ . Stabilität dieser Zustand?

- Modell der Geschwindigkeit:  $u = u(\rho)$ ,  $u'(\rho) \leq 0$ ,

$$u(\rho) = \begin{cases} u_{\max}, & 0 \leq \rho \leq \rho_c & (u_{\max} \text{ für } \rho \text{ klein}) \\ ?, & \rho_c \leq \rho \leq \rho_{\max} \\ 0, & \rho = \rho_{\max} & (\rho_{\max} \approx 1/L) \end{cases}$$

wobei  $u_{\max}$  = Geschwindigkeitsgrenze,  $\rho_c$  = kritische Dichte.

$$\text{DG} \Rightarrow u(\rho) = \lambda \ln(d + L) + \alpha = \lambda \ln(1/\rho) + \alpha$$

$$\rho = \rho_{\max} \Rightarrow u(\rho) = 0 \Rightarrow \alpha^* = \lambda^* \ln(\rho_{\max}). \text{ Mit der DG,}$$

$$u(\rho) = \lambda \ln(1/\rho) + \lambda \ln(\rho_{\max}) = \lambda \ln(\rho_{\max}/\rho)$$

$$\rho = \rho_c \Rightarrow u(\rho) = u_{\max} \Rightarrow \lambda^* = u_{\max} / \ln(\rho_{\max}/\rho_c). \text{ Mit der DG,}$$

$$u(\rho) = u_{\max} \ln(\rho_{\max}/\rho) / \ln(\rho_{\max}/\rho_c), \quad \rho_c \leq \rho \leq \rho_{\max}$$

# Stabilität für Verkehr Dynamik

- ▶ Verkehrsfluss  $f(\rho) = \rho u(\rho)$  wird maximiert in

$$\rho^* = \rho_{\max}/e.$$

Die entsprechende Geschwindigkeit ist:

$$u^* = u(\rho^*) = u_{\max}/\ln(\rho_{\max}/\rho_c)$$

- ▶ Der idealisierte Zustand ist explizit:

$$\xi_i(t) = u^*t + (i-1)/\rho^*, \quad i = 1, \dots, N$$

- ▶ Sei  $\{x_i\}_{i=1}^{N-1}$  eine störende Lösung des Systems,  $x_N(t) = \xi_N(t)$ ,

$$x_i''(t + \tau) = \lambda \frac{d}{dt} \ln[x_{i+1}(t) - x_i(t)], \quad i = 1, \dots, N-1$$

wobei  $\lambda = u^*$  und die Differenzen  $\phi_i(t) = x_i(t) - \xi_i(t)$ ,  
 $\phi_N = 0$ , erfüllen  $\phi_i([0, \tau])$ ,  $\phi_i'(\tau) = \mathcal{O}(\epsilon)$  und

$$\begin{aligned} \phi_i'(t + \tau) &= x_i'(t + \tau) - \xi_i'(t + \tau) = u^* \ln[x_{i+1}(t) - x_i(t)] + \alpha_i - u^* \\ &= u^* \ln[(\phi_{i+1}(t) + \xi_{i+1}(t)) - (\phi_i(t) + \xi_i(t))] + \alpha_i - u^* \\ &= u^* \ln[1/\rho^* + \phi_{i+1}(t) - \phi_i(t)] + \alpha_i - u^* \end{aligned}$$

Es folgt ( $t = 0$ ),  $\mathcal{O}(\epsilon) = u^* \ln[1/\rho^* + \mathcal{O}(\epsilon)] + \alpha_i - u^*$   
 $= u^* \ln[(\mathcal{O}(\epsilon) + 1)/\rho^*] + \alpha_i - u^* = \mathcal{O}(\epsilon) + \alpha_i - u^* \ln(e\rho^*)$

# Stabilität für Verkehr Dynamik

- Daher  $\alpha_i - u^* \ln(e\rho^*) = \mathcal{O}(\epsilon)$ , und die Nullstellen erfüllen
$$\phi_i^* = \sum_{j=i}^{N-1} (1/\rho^* - e^{1-\alpha_j/u^*}) = \mathcal{O}(\epsilon), \quad i = 1, \dots, N$$

Gilt  $\phi_i(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \phi_i^*$ ? Für  $\tau > 0$ , kein Werkzeug.

- Nimm an,  $\tau = 0$ ,  $N = 2$ .

$$\begin{aligned}\phi_1'(t) &= f(\phi_1(t)), & f(\phi) &= u^* \ln[1/\rho^* - \phi] + \alpha_1 - u^* \\ f'(\phi) &= -u^*/(1/\rho^* - \phi), & f'(\phi_1^*) &= -u^* e^{\alpha_1/u^* - 1} < 0\end{aligned}$$

Daher für  $\epsilon$  klein genug gilt  $\phi_1(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \phi_1^*$  und

$$x_1(t) - \xi_1(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \mathcal{O}(\epsilon)$$

d.h. die Lösung  $\xi_1(t) = u^* t$  ist stabil.

**Hausaufgabe:** ( $\tau = 0$ ,  $N = 3$ ) Zeige für das System,  $\phi_3(t) = 0$ ,

$$\phi_2'(t) = u^* \ln[1/\rho^* - \phi_2(t)] + \alpha_2 - u^*$$

$$\phi_1'(t) = u^* \ln[1/\rho^* + \phi_2(t) - \phi_1(t)] + \alpha_1 - u^*$$

mit  $\phi_i([0, \tau])$ ,  $\phi_i'(\tau) = \mathcal{O}(\epsilon)$  und  $\epsilon$  klein genug, es gelten

$$\phi_i(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \phi_i^* = \sum_{j=i}^2 (1/\rho^* - e^{1-\alpha_j/u^*}) = \mathcal{O}(\epsilon), \quad i \leq 3$$

und daher ist die Lösung  $\xi_i(t) = u^* t + (i-1)/\rho^*$ ,  $i \leq 3$  stabil.

# Stabilität für Verkehr Dynamik

- Für  $\tau > 0$  wird die Diskretisierung analysiert:

$$\Delta t = 1/M, \quad t = n/M, \quad \tau = \sigma/M$$

$$\Xi_i(n) = \xi_i(n/M) = u^* n/M + (i-1)/\rho^*$$

$$X_i(n) \approx x_i(n/M), \quad \Phi_i(n) = X_i(n) - \Xi_i(n) \approx \phi_i(n/M)$$

- Die Diskretisierung der x-Gleichung ist  $X_N(n) = \Xi_N(n)$ ,

$$M^2 \Delta_n^2 X_i(n) = u^* M \Delta_n \ln[X_{i+1}(n-\sigma) - X_i(n-\sigma)]$$

wobei  $i = 1, \dots, N-1$

$$\Delta_n X(n) = X(n+1) - X(n).$$

Analog zur Integration  $\exists \{\alpha_i\}_{i=1}^{N-1}$  s.d.

$$M \Delta_n X_i(n) = u^* \ln[X_{i+1}(n-\sigma) - X_i(n-\sigma)] + \alpha_i$$

$i = 1, \dots, N-1$

- Die Differenzen  $\Phi_i(n) = X_i(n) - \Xi_i(n)$  erfüllen

$$\Phi_N = 0, \quad \Phi_i(\{n\}_{n=0}^{\sigma+1}) = \mathcal{O}(\epsilon) \quad \text{und}$$

$$M \Delta_n \Phi_i(n) = M \Delta_n X_i(n) - M \Delta_n \Xi_i(n)$$

$$= u^* \ln[X_{i+1}(n-\sigma) - X_i(n-\sigma)] + \alpha_i - u^*$$

$$= u^* \ln[1/\rho^* + \Phi_{i+1}(n-\sigma) - \Phi_i(n-\sigma)] + \alpha_i - u^*$$

$i = 1, \dots, N-1$

# Stabilität für Verkehr Dynamik

- Es folgt ( $n = \sigma$ ),

$$\begin{aligned}\mathcal{O}(\epsilon) &= u^* \ln[1/\rho^* + \mathcal{O}(\epsilon)] + \alpha_i - u^* \\ &= u^* \ln[(\mathcal{O}(\epsilon) + 1)/\rho^*] + \alpha_i - u^* = \mathcal{O}(\epsilon) + \alpha_i - u^* \ln(e\rho^*) \\ \text{Daher } \alpha_i - u^* \ln(e\rho^*) &= \mathcal{O}(\epsilon) \text{ und } 1/\rho^* - e^{1-\alpha_i/u^*} = \mathcal{O}(\epsilon).\end{aligned}$$

- Nimm  $N = 2$ ,  $\sigma = 1$ ,

$$\Phi_1(n+1) = \Phi_1(n) + \frac{u^*}{M} \ln[1/\rho^* - \Phi_1(n-1)] + \frac{\alpha_1 - u^*}{M}$$

Die Differenzengleichung beinhaltet Zustände

$\{\Phi_1(n-1), \Phi_1(n), \Phi_1(n+1)\}$ . Fixpunkt-Iteration?

- Mit  $\Psi(n+1) =$

$$\begin{bmatrix} \Phi_1(n) \\ \Phi_1(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_1(n) \\ \Phi_1(n) + \frac{u^*}{M} \ln[1/\rho^* - \Phi_1(n-1)] + \frac{\alpha_1 - u^*}{M} \end{bmatrix}$$

gibt es die Fixpunkt-Iteration  $\Psi_{n+1} = F(\Psi_n)$ , wobei

$$\Psi = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix}, \quad F(\Psi) = \begin{bmatrix} \psi_2 \\ \psi_2 + \frac{u^*}{M} \ln[1/\rho^* - \psi_1] + \frac{\alpha_1 - u^*}{M} \end{bmatrix}$$

und in dem Fixpunkt  $\Psi^* = (1/\rho^* - e^{1-\alpha_1/u^*})\langle 1, 1 \rangle^\top (= \mathcal{O}(\epsilon))$

$$\frac{\partial F}{\partial \Psi} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-u^*/M}{1/\rho^* - \psi_1} & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\Psi=\Psi^*} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\theta & 1 \end{bmatrix}, \quad \theta = \frac{u^*}{M} e^{\alpha_1/u^* - 1}$$

# Stabilität für Verkehr Dynamik

- Das Spektrum  $\sigma(J)$  mit  $J = \partial F / \partial \Psi(\Psi^*)$  ist:

$$\sigma(J) = \{\lambda_{1,2}\} = \left\{ \frac{1}{2} [1 \pm \sqrt{1 - 4\theta}] \right\}$$

Für  $0 < \theta \leq \frac{1}{4}$  gelten

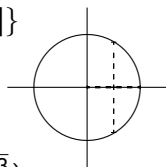
$$\lambda_1, \lambda_2 \in (0, 1)$$

Für  $\frac{1}{4} \leq \theta < 1$  gelten

$$(\lambda_1 - \frac{1}{2})/i, (\lambda_2 - \frac{1}{2})/i \in (-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$$

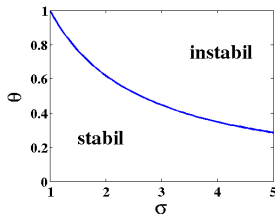
Für  $\theta \in (0, 1)$  und  $\epsilon$  klein genug gelten  $\Psi_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Psi^* = \mathcal{O}(\epsilon)$   
und

$$X_2(n) - \Xi_2(n) = \Phi_2(n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathcal{O}(\epsilon)$$



**Hausaufgabe:** Leite eine Stabilitätsbedingung für den Fall  $N = 2$  und  $\sigma = 2$  explizit her.

- Mit  $\theta$  oben,  $N = 2$  und  $\sigma \in \mathbb{N}$  gilt  
 $\det[-\lambda I + J] = (-1)^\sigma [\lambda^\sigma (1 - \lambda) - \theta]$ .  
 Lösung der Gleichung  $\lambda^\sigma (1 - \lambda) = \theta$   
 mit  $\lambda = e^{it}$  und  $e^{i(\sigma + \frac{1}{2})t} (e^{-\frac{it}{2}} - e^{\frac{it}{2}}) = \theta$ ,  
 $(\sigma + \frac{1}{2})t = \pm \frac{\pi}{2}$ ,  $\theta = 2 \sin(\frac{\pi}{2(\sigma+1)})$



# Simulationen

- Idealisierter Zustand:

$$\rho_{\max} = 1$$

$$\rho_c = \frac{1}{10}$$

$$u_{\max} = 1$$

- Reaktionszeit

$$\tau = 0$$

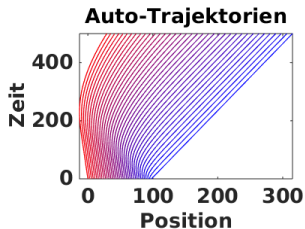
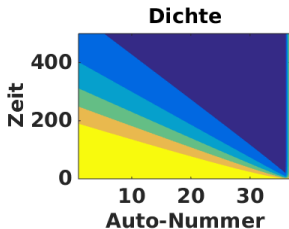
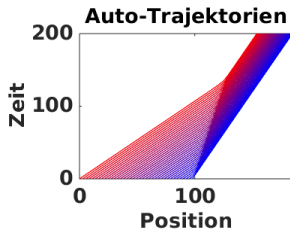
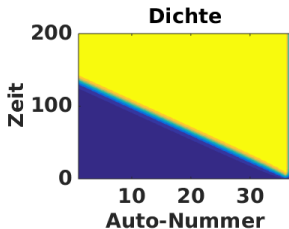
- Störungen:

Mit  $\alpha = \alpha^* + \frac{1}{2}$

entsteht ein  
Entschleunigungschock.

Mit  $\alpha = \alpha^* - \frac{1}{2}$

entsteht eine  
Verdünnungswelle.





# Simulationen

- Idealisierter Zustand:

$$\rho_{\max} = 1$$

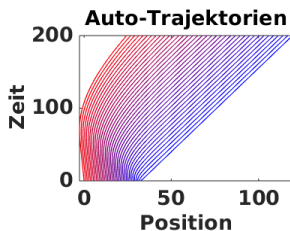
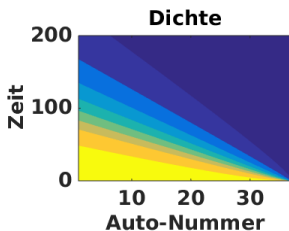
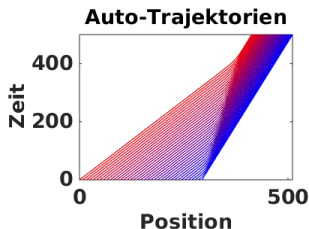
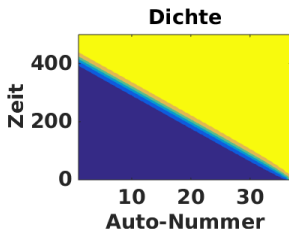
$$\rho_c = \frac{1}{10}$$

$$u_{\max} = 1$$

- Reaktionszeit

$$\tau = 0$$

- Störungen:  
Mit  $x_i(0) = 3\xi_i(0)$   
entsteht ein  
Entschleunigungsschock.  
Mit  $x_i(0) = \xi_i(0)/3$   
entsteht eine  
Verdünnungswelle.



# Simulationen

- Idealisierter Zustand:

$$\rho_{\max} = 1$$

$$\rho_c = \frac{1}{10}$$

$$u_{\max} = 1$$

- Zufällige Störungen

$$x_i(0) = \xi_i(0) + \frac{u}{5\rho^*}$$

$$\alpha = \alpha^* + \frac{u\lambda^*}{5}$$

$$(u \sim N(0, 1))$$

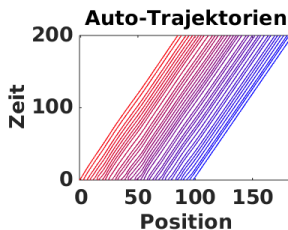
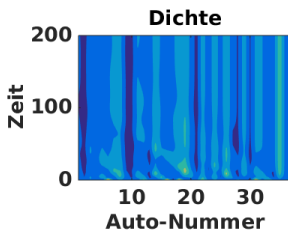
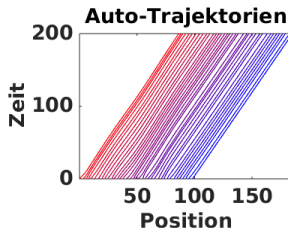
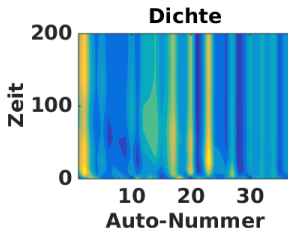
- Reaktionszeiten

$$\tau = 0$$

bzw.

$$\tau = 2$$

- Bei noch höherer Reaktionszeit finden Kollisionen statt.



# Vorteil von Doppelverglasung

- ▶ Wärmefluss:

früher:  $\rho, c, \lambda$

Gesetz vom Fourier:

$$\mathbf{F} = -\lambda \nabla T$$

Wärme fließt von höheren nach niedrigeren Temperaturen.

Energieerhaltung in einem Gebiet  $D \subset \Omega$  mit  $V = |D|$ ,

$$D_t \int_D E/V d\mathbf{x} + \int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} d\mathbf{x} = 0$$

oder

$$\int_D \rho c \partial_t T d\mathbf{x} = \int_{\partial D} \lambda \nabla T \cdot \hat{\mathbf{n}} d\mathbf{x} = \int_D \nabla \cdot (\lambda \nabla T) d\mathbf{x}$$

Wenn diese Gleichung  $\forall D \subset \Omega$  gilt, folgt

$$\rho c \partial_t T = \nabla \cdot (\lambda \nabla T), \quad \Omega$$

Für  $\Omega \subset \mathbb{R}^1$ ,

$$\rho c T_t = [\lambda T_x]_x, \quad \Omega$$

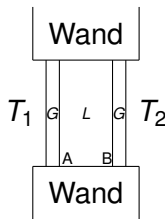
Fließgleichgewicht:  $F = -\lambda T_x = \text{Konstante}$ .

- ▶ Für die 3 Fensterschichte im Fließgleichgewicht:

$$F = -\lambda_G \frac{T_A - T_1}{G} = -\lambda_L \frac{T_B - T_A}{L} = -\lambda_G \frac{T_2 - T_B}{G}$$

Lösung:

$$T_1 - T_A = FG/\lambda_G = T_B - T_2 \quad \Rightarrow \quad T_{A,B} = T_{1,2} \mp FG/\lambda_G$$



# Vorteil von Doppelverglasung

► Lösung:

$$T_B - T_A = (T_2 + FG/\lambda_G) - (T_1 - FG/\lambda_G) = T_2 - T_1 + 2FG/\lambda_G$$

und

$$-F = \frac{\lambda_L}{L} \left[ (T_2 - T_1) + \frac{2FG}{\lambda_G} \right] = \frac{\lambda_L}{L} (T_2 - T_1) + \frac{2F}{\rho}, \quad \rho = \frac{\lambda_G L}{\lambda_L G}$$

oder mit  $F(-1 - 2/\rho) = (\lambda_L/L)(T_2 - T_1)$ ,

$$F = \frac{\lambda_L}{L} \frac{T_1 - T_2}{1 + 2/\rho} = \frac{\lambda_G}{G} \frac{T_1 - T_2}{\rho + 2}$$

► Mit  $L = 0$  folgen  $\rho = 0$  und  $F_0 = \frac{\lambda_G}{2G}(T_1 - T_2)$ .

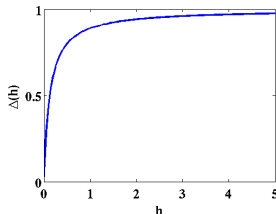
► Relative Verminderung des Energieverlustes:

$$\Delta = \frac{F_0 - F}{F_0} = \frac{\rho}{\rho + 2}, \quad \Delta(h) \approx \frac{h}{h + 1/8}$$

wobei  $h = \frac{L}{G}$  und  $\frac{\lambda_G}{\lambda_L} \approx 16 \Rightarrow \rho \approx 16h$ .

► Nach  $h > 4$  zählt es sich nicht mehr aus.

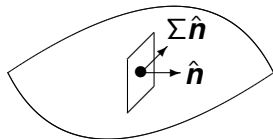
► Innenluft muss still und dicht sein!



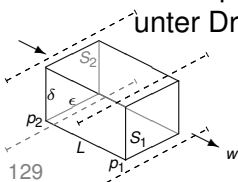
# Einführung in die Strömungsmechanik

## ► Euler-Cauchy Spannungsprinzip:

- Spannungen werden in einem Material verteilt.
- Für einen gegebenen Punkt  $\bullet$  sei  $\hat{n}$  der Normaleinheitsvektor für eine gegebene Ebene durch den Punkt.
- Das Material auf einer Seite der Ebene übt eine vektorielle Kraft pro Flächeneinheit auf das Material auf der anderen Seite aus.
- Es gibt eine ortsabhängige Matrix  $\Sigma$  (*Spannungstensor*), wobei  $\Sigma \hat{n}$  diese wirkende Kraft darstellt.
- Modell für eine Flüssigkeit:  $\Sigma = T - pI$ , wobei  $T$  Scherkraft darstellt und  $p$  der Druck ist.



- Modellproblem: Zwischen 2 Platten strömt eine Flüssigkeit unter Druck  $p_2$  links und Druck  $p_1$  rechts, wobei  $p_2 > p_1$ .



Kräftebilanz fürs Kontrollvolumen:

$$-\int_{S_2} \Sigma \hat{e}_z + \int_{S_1} \Sigma \hat{e}_z + \int_0^L \int_{\partial S} \Sigma \hat{n} = 0 \quad (S \parallel S_i)$$

# Einführung in die Strömungsmechanik

- ▶ Sei  $(x, y) = (0, 0)$  im Zentrum des Kontrollvolumens.
- ▶ Laut Messungen erfüllt die Geschwindigkeit  $\mathbf{w} = (u, v, w)$   
 $u = v = 0, w(x, y, z) = c(y_{\max}^2 - y^2), w_y = -2cy.$
- ▶ Es gelten  $w_x = 0 = w_z$  und so mit  $\Sigma = T - pl, T\hat{\mathbf{e}}_x = 0 = T\hat{\mathbf{e}}_z,$

$$0 = \int_{S_2} p_2 \hat{\mathbf{e}}_z - \int_{S_1} p_1 \hat{\mathbf{e}}_z - \int_0^L \left[ \int_{-\frac{\epsilon}{2}}^{+\frac{\epsilon}{2}} p(\hat{\mathbf{e}}_y - \hat{\mathbf{e}}_y) + \int_{-\frac{\delta}{2}}^{+\frac{\delta}{2}} p(\hat{\mathbf{e}}_x - \hat{\mathbf{e}}_x) \right] + \int_0^L \left\{ \int_{-\frac{\epsilon}{2}}^{+\frac{\epsilon}{2}} \left[ T^{(+\frac{\delta}{2})}(\hat{\mathbf{e}}_y) + T^{(-\frac{\delta}{2})}(-\hat{\mathbf{e}}_y) \right] + \int_{-\frac{\delta}{2}}^{+\frac{\delta}{2}} \left[ T^{(+\frac{\epsilon}{2})}(\hat{\mathbf{e}}_x) + T^{(-\frac{\epsilon}{2})}(-\hat{\mathbf{e}}_x) \right] \right\}$$

$$\hat{\mathbf{e}}_z(p_2 - p_1)\epsilon\delta + \epsilon L(T^{(+\frac{\delta}{2})} - T^{(-\frac{\delta}{2})})\hat{\mathbf{e}}_y = 0 \Rightarrow L\partial_y T\hat{\mathbf{e}}_y = (p_1 - p_2)\hat{\mathbf{e}}_z$$

- ▶ In  $y = 0$  gelten  $w_y = 0$  und (daher)  $T\hat{\mathbf{e}}_y = 0$ . Folglich

$$T\hat{\mathbf{e}}_y = \hat{\mathbf{e}}_z(p_1 - p_2)y/L \propto \hat{\mathbf{e}}w_y$$

- ▶ Das Modell mit  $\mu = \text{Viskosität},$

$$T\hat{\mathbf{e}}_y = \mu w_y \hat{\mathbf{e}}_z, \quad w = (1 - y^2)(p_2 - p_1)/(2L\mu)$$

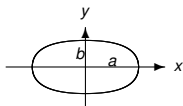
- ▶ Im allgemeinen  $T = \mu(\nabla \mathbf{w} + \nabla \mathbf{w}^\top).$

# Vorteil von kreisförmigen Rohren

- ▶ Schnittfläche eines Rohrs:

$$E = \{(x, y) : x^2/a^2 + y^2/b^2 < 1\}$$

$w(x, y)$  = Geschwindigkeit,  $w = 0, \partial E$  wegen Reibung



- ▶ Mit  $\Sigma = T - pl$ ,  $\mathbf{w} = \langle 0, 0, w \rangle$ ,  $T\hat{\mathbf{e}}_x = \mu w_x \hat{\mathbf{e}}_z$ ,  
 $T\hat{\mathbf{e}}_y = \mu w_y \hat{\mathbf{e}}_z$ .

- ▶ Kräftebilanz,

$$\hat{\mathbf{e}}_z \left\{ \int_{S_2} p_2 - \int_{S_1} p_1 + \int_{\Gamma} \mu \nabla \mathbf{w} \cdot \hat{\mathbf{n}} \right\} = \mathbf{0}$$

$$\int_{\Gamma} \mu \nabla \mathbf{w} \cdot \hat{\mathbf{n}} = L \int_{\partial S} \mu \nabla \mathbf{w} \cdot \hat{\mathbf{n}} = L \int_S \nabla \cdot (\mu \nabla \mathbf{w})$$

- ▶ Gebiet beliebig,  $\delta p = p_2 - p_1$  im ganzen Rohr,  
 $-\delta p = L \nabla \cdot (\mu \nabla \mathbf{w})$  im  $E$ ,  $w = 0$  am  $\partial E$

Lösung:

$$w(x, y) = \frac{\delta p}{2\mu L} \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \left[ 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right]$$

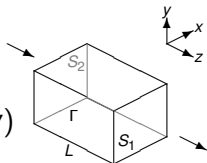
- ▶ Volumenfluss:

$$Q = \int_E w d\mathbf{x} = \frac{\pi a^3 b^3 \delta p}{4\mu L (a^2 + b^2)}, \quad Q_0 = \frac{\pi r^4 \delta p}{8\mu L}, \quad \frac{Q_0 - Q}{Q_0} \stackrel{ab=r^2}{=} \frac{(a-b)^2}{a^2 + b^2}$$

$a = b = r \Rightarrow Q = Q_0$ ,

- ▶ Weniger Volumenfluss wenn  $a \neq b$ .

↙ Poiseuille!



# Optimierung einer Fischfangflotte

- ▶ Wie viele Boote einer Fischfangflotte sollen im Betrieb sein?
- ▶ Größen:

$x(t)$  = Population der Fische zur Zeit  $t$

$u(t)$  = Anzahl der Boote im Betrieb zur Zeit  $t$

$w$  = Gehalt / Angestellten in einem Boot / Zeit

$c_B$  = Fixkosten / Boot

$n$  = Anzahl der Angestellten / Boot

$p$  = Einheitspreis für Fisch

$h(t)$  = Anzahl der gefangenen Fische / Zeit  
(hängt von  $u$  und  $x$  ab)

$ph(t)$  = Umsatz / Zeit

$c$  = Kosten / Boot

$cu(t)$  =  $c_B u(t) + wnu(t)$ , Gesamtkosten / Zeit

$P(t)$  =  $ph(t) - cu(t)$ , Profit / Zeit

$G(t)$  = Geld zur Zeit  $t$

$\delta(t)$  =  $G'/G$ , Zinsensrate (Konstante)



## Zielfunktion der Fischfangflotte

- ▶ Der Firmenchef hat  $G(t)$  zur Zeit  $t$ , weil  $G(0)$  in das eigene Geschäft investiert worden ist.
- ▶ Wenn  $G(0)$  auf eine Bank mit Zinsrate  $\delta$  investiert worden wäre, wäre das Geld zu  $G(0)e^{\delta t}$  gewachsen. Besser?
- ▶ Der zukünftige Gesamtprofit ist  $G(t) - G(0) = \int_0^t P(s)ds$ .
- ▶ Der *gegenwärtige Wert*  $G_0(t)$  vom zukünftigen Gesamtprofit ist  $G_0(t) = [G(t) - G(0)]e^{-\delta t}$ .

**Hausaufgabe:** Zeige  $\delta \int_0^\infty G_0(t)dt = \int_0^\infty e^{-\delta t} P(t)dt$ .

- ▶ Zielfunktion der optimalen Steuerung: Die Summe

$$\int_0^\infty G_0(t)dt$$

aller gegenwärtigen Werte der zukünftigen Gelder soll maximiert werden.

- ▶ Mit  $P(t) = ph(t) - cu(t)$  soll maximiert werden,

$$J(u) = \int_0^\infty e^{-\delta t} [ph(t) - cu(t)]dt$$

## Nebenbedingungen für die Zielfunktion

- ▶ Raubmodell:

Anzahl der gefangenen Fische / Zeit  $\propto$   
Anzahl der Boote im Betrieb zur Zeit  $t \times$   
Population der Fische zur Zeit  $t$ , d.h.  
$$h(t) = qu(t)x(t)$$

- ▶ Fisch-Dynamik: logistisch mit Raubeffekt,  
$$x' = Rx(1 - x/K) - h(t)$$
- ▶ Die Zielfunktion soll unter diesen Nebenbedingungen maximiert werden.
- ▶ Angenommen:  $x(0) \ll K$ , d.h.  $x(0) = K/N$ ,  $N$  groß.
- ▶ Steuerungsstrategie:

$$u(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq s \\ U, & s < t < \infty \end{cases} \quad \text{wobei} \quad x(s) = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$$

**Hausaufgabe:** Zeige mit diesem  $u$ ,

$$x(t) = \begin{cases} K/[1 + (N-1)e^{-Rt}], & 0 \leq t \leq s \\ K(1 - qU/R), & s < t < \infty \end{cases}$$

# Vereinfachung der Zielfunktion

- ▶ Mit Stetigkeit,  $x(s^+) = x(s^-)$ , gilt

$$\frac{1}{1 + (N-1)e^{-Rs}} = 1 - \frac{qU}{R} = \frac{x(s)}{K} > 0$$

- ▶ Nach  $s$  auflösen,

$$s(U) = \frac{1}{R} \ln \left\{ (N-1) \left( \frac{R}{qU} - 1 \right) \right\}$$

- ▶ In  $J$  einstellen,

$$\begin{aligned} J(U) &= \int_0^{s(U)} e^{-\delta t} [pqUK/[1 + (N-1)e^{-Rt}] - c] dt \\ &+ \int_{s(U)}^{\infty} e^{-\delta t} [pqU(1 - qU/R) - c] dt \\ &= \frac{e^{-\delta t}}{-\delta} pqUK \left[ 1 - \frac{qU}{R} - \frac{c}{pqK} \right] \Big|_0^{s(U)} \\ &= \frac{pqKU}{\delta} e^{-\delta s(U)} \left[ 1 - \frac{qU}{R} - \frac{c}{pqK} \right] =: f(U) \end{aligned}$$

- ▶  $f(U)$  soll bezüglich  $U$  maximiert werden.

# Lösung des Optimierungsproblems

- Angenommen ist das Geschäft profitabel,

$$P_{\infty} = ph_{\infty} - cu_{\infty} = pqU \left(1 - \frac{qU}{R}\right) K - cU = pqKU \left[1 - \frac{qU}{R} - \frac{c}{pqK}\right] > 0$$

**Hausaufgabe:** Zeige, über  $[0, \frac{R}{q}(1 - \frac{c}{pqK})]$  gilt  $f = f_{\max}$  in

$$U^* = \frac{R}{4q} \left[ 3 - \frac{c}{pqK} + \frac{\delta}{R} - \sqrt{\left(1 + \frac{c}{pqK} - \frac{\delta}{R}\right)^2 + \frac{8\delta}{R} \frac{c}{pqK}} \right]$$

und daher ist die optimale Schaltzeit  $s^* = s(U^*)$ .

- Allgemeinere Formulierung: max über  $0 \leq u(t) \leq U_{\max}$ ,

$$J(u) = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} [pqu(t)x(t) - cu(t)] dt$$

unter der Nebenbedingung

$$x' = Rx(1 - x/K) - qux, \quad x(0) = x_0$$

Mit  $x_0 = K/N$ ,  $U^*$  und  $s^* := s(U^*)$  wie oben ist die Lösung

$$u(t) = \begin{cases} U_N, & 0 \leq t \leq s^* \\ U^*, & s^* < t < \infty \end{cases} \quad U_N = \begin{cases} 0, & N > (1 - qU^*/R)^{-1} \\ U_{\max}, & N < (1 - qU^*/R)^{-1} \end{cases}$$

# Einführung in die Spieltheorie

- ▶ Das Konzept, mit statischem *a priori* Blickwinkel
  - ▶ Es gibt mindestens 2 *Spieler*.
  - ▶ Spieler haben *Strategien*.
  - ▶ Strategien bestimmen das *Ergebnis*.
  - ▶ Jedes Ergebnis hat eine *Auszahlung* für jeden Spieler.

- ▶ Beispiel:

		Jörge's Strategien	
		<i>a</i>	<i>b</i>
Inge's Strategien	$\alpha$	(2,-2)	(-3,3)
	$\beta$	(0,0)	(3,-3)

Auszahlungen:  $(A,B)$ ,  $A$  = Inge's Gewinn,  $B$  = Jörge's Gewinn

- ▶ Ein Null-Summen-Spiel erfüllt:

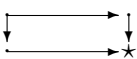
$$\text{Inge-Gewinn} + \text{Jörg-Gewinn} = 0.$$

- ▶ Bewegungsdiagramm zeigt Anreize zur Strategieänderungen:

		Jörge's Strategien	
		<i>a</i>	<i>b</i>
Inge's Strategien	$\alpha$	→	↓
	$\beta$	↑	←

# Konzept eines Spiels

- Dieses ist ein nicht-Null-Summen-Spiel:

		Jörgs Strategien				Jörgs Strategien	
		$a$	$b$			$a$	$b$
Inges Strategien	$\alpha$	(0,0)	(-2,1)	Inges Strategien	$\alpha$		$\beta$
	$\beta$	(1,-2)	(-1,-1)		$\beta$		

- Dieses Spiel heißt *Gefangenendilemma*. Jeder Spieler hat einen Anreiz zum *Gleichgewicht* mit Strategien  $\beta b$ .

**Def:** Ein Ergebnis ist ein *Gleichgewicht*, wenn kein Spieler einen Anreiz hat, eine andere Strategie auszuwählen, während die Strategie des Gegners an der Stelle fixiert bleibt.

**Def:** Der *Wert eines Spiels* für einen Spieler ist seine Auszahlung im Gleichgewicht.

- Gemischte Strategien:

(a priori Blinkwinkel)	$\alpha p + \beta(1 - p)$		$aq + b(1 - q)$	
	Inges Strategien	Jörgs Strategien	Inges Strategien	Jörgs Strategien
	$\alpha$	$\beta$	$a$	$b$
Wahrscheinlichkeiten:	$p$	$1 - p$	$q$	$1 - q$

# Gemischte Strategien

- Auszahlungen sind Erwartungswerte:

			Jörgs Strategien		Inges Auszahlung:
			$q$	$1 - q$	
Inges Strategien	$p$	$\alpha$	$a$	$b$	
	$1 - p$	$\beta$	$(2,-2)$	$(-3,3)$	$5q - 3$
			$(0,0)$	$(3,-3)$	$3 - 3q$
Jörgs Auszahlung:			$-2p$	$6p - 3$	

- Mit  $q^* = 3/4$  vermeidet Jörg, dass Inge seine gemischte Strategie ausnutzt:  $5q^* - 3 = 3 - 3q^* =$  Inges Wert.
- Mit  $p^* = 3/8$  vermeidet Inge, dass Jörg seine gemischte Strategie ausnutzt:  $-2p^* = 6p^* - 3 =$  Jörgs Wert.
- Wie entscheidet man, was die Auszahlung oder Gewinn oder *Utilität* eines Ergebnisses ist?
  - Die meisten Resultaten sind so hergeleitet worden, dass sie von positiven linearen Transformationen der Utilität unabhängig sind.
  - Beispiel: Das Bewegungsdiagramm für Gefangenendilemma bleibt so, wenn die (Inge,Jörg) Auszahlungen  $(I, J)$  durch  $\tilde{I} = x + yI$ ,  $y > 0$ , und  $\tilde{J} = u + vJ$ ,  $v > 0$ , transformiert werden.

# Umweltpolitik

- ▶ Länder X und Y entscheiden, ob sie Verschmutzung reduzieren oder nicht.
  - ▶ Kosten für Reduzieren: 7 Einheiten
  - ▶ Gewinn von Reduzieren: 5 Einheiten für beide genießbar

- ▶ Darstellung des Spiels:

X:            Y:	verschmutzen	reduzieren
verschmutzen	$\uparrow$ (0,0) $\leftarrow$	(5,-2) $\uparrow$
reduzieren	(-2,5) $\leftarrow$	(3,3) $\uparrow$

- ▶ Struktur wie Gefangenendilemma: Gleichgewicht in (0,0).
- ▶ Nun mit Kosten wenn beide nichts tun: 4 Einheiten

X:            Y:	verschmutzen	reduzieren
verschmutzen	$\downarrow$ (-4,-4) $\rightarrow$	(5,-2) $\uparrow$
reduzieren	(-2,5) $\leftarrow$	(3,3) $\uparrow$

- ▶ Struktur wie Angsthasenspiel: X schwenkt ab (-2,5) oder fährt geradeaus (5,-2).
- ▶ Wer bedroht oder den ersten Zug hat, kann das Gleichgewicht bestimmen.



# Umweltpolitik

- ▶ Länder X und Y entscheiden, ob sie zu einem Allgemeinwohl beitragen.
  - ▶ Kosten eines Beitrags: 8 Einheiten
  - ▶ Gewinn: 12 Einheiten für beide, nur wenn beide beitragen.

- ▶ Darstellung des Spiels:

X: Y:		beitragen	nicht
beitragen	↑	(4,4) ←	(-8,0) ↓
nicht		(0,-8) →	(0,0)

- ▶ Struktur wie Koordinationsspiel (*stag hunt*): beide kooperieren (4,4) oder beide überlaufen (0,0).
- ▶ Kooperative Lösung entsteht durch Wiederholung des Spiels.
- ▶ Kontinuum von Strategien, z.B. wie *viel* will man beitragen?
  - ▶  $N$  Länder spielen. Land  $i$  trägt  $z_i$  bei. Gesamtbeitrag ist
$$Z = \sum_{i=1}^N z_i.$$
  - ▶ Land  $i$  hat Gewinn  $B_i(Z)$  und Kosten  $C_i(z_i)$ .
  - ▶ Zu maximieren ist:  $B_i(Z) - C_i(z_i)$ .

# Spiel gegen Natur: Entscheidungstheorie

- Inge entscheidet, zur Zentralbibliothek oder zur Zweigbibliothek für ein gesuchtes Buch? Seien:

- $k$  = Kosten zur Zweigbibliothek zu gehen
- $\theta k$  = Kosten zur Zentralbibliothek zu gehen ( $\theta > 1$ )
- $q$  = Wahrscheinlichkeit, Buch in der Zweigbibliothek
- $\alpha$  = Strategie: zuerst zur Zweigbibliothek
- $\beta$  = Strategie: sofort zur Zentralbibliothek
- $a$  = Zustand der Natur: Buch in der Zweigbibliothek
- $b$  = Zustand der Natur: Buch nur in der Zentralbibliothek

- Spiel gegen Natur sieht so aus:

		Strategien der Natur		Inges Kosten:
		$a$	$b$	
Inges Strategien	$\alpha$	$k$	$(1 + \theta)k$	$E(\alpha) = qk + (1 - q)(1 + \theta)k$
	$\beta$	$\theta k$	$\theta k$	$E(\beta) = q\theta k + (1 - q)\theta k$
Wahrscheinlichkeiten:		$q$	$1 - q$	

- Zuerst zur Zweigbibliothek, wenn  $1/\theta < q$ , d.h.

$$E(\alpha) = qk + (1 - q)(1 + \theta)k < q\theta k + (1 - q)\theta k = E(\beta)$$

# Nash Gleichgewicht

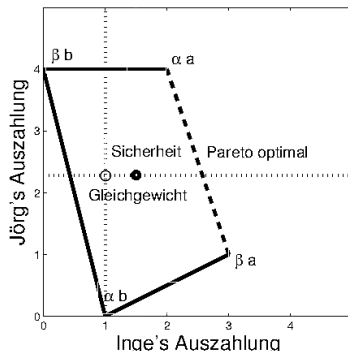
- Ein nicht Null-Summen-Spiel,

			Jörigs Strategien		Inges Auszahlung:
			$q$ $a$	$1 - q$ $b$	
Inges Strategien	$p$	$\alpha$	(2,4)	$\leftarrow$ (1,0)	$1 + q$
	$1 - p$	$\beta$	$\downarrow$ (3,1)	$\rightarrow$ (0,4)	$3q$
Jörigs Auszahlung:			$1 + 3p$	$4 - 4p$	

- Kein reines Gleichgewicht, Spieler suchen gemischte Strategien.
- Mit  $q^* = 1/2$  vermeidet Jörg, dass Inge seine gemischte Strategie ausnutzt:  $1 + q^* = 3q^* = 3/2 =$  Inges Wert.
- Mit  $p^* = 3/7$  vermeidet Inge, dass Jörg seine gemischte Strategie ausnutzt:  $1 + 3p^* = 4 - 4p^* = 16/7 =$  Jörigs Wert.
- Wenn ein Spieler so bleibt, gewinnt der andere durch eine unterschiedliche Strategie nicht.
- Satz (Nash):** Jedes 2-Personen Spiel hat ein Gleichgewicht!

# Pareto Optimalität

- ▶ Ein Ergebnis ist nicht *Pareto optimal*, wenn es ein anderes Ergebnis gibt, bei dem mindestens ein Spieler eine höhere Auszahlung bekommt und kein Spieler eine niedrigere Auszahlung bekommt. Ansonsten ist ein Ergebnis *Pareto optimal*.
- ▶ Auszahlungen des letzten Spiels:



- ▶ Soll Inge  $\beta$  spielen? Soll Jörg  $a$  spielen?

# Sicherheitsstrategien

- Nun betrachten die Spieler nur den eigenen Gewinn:

			Jörqs Strategien		Jörqs Auszahlung:
			$q$ $a$	$1 - q$ $b$	
Inges Strategien	$p$	$\alpha$	(2,4) ←	(1,0)	$4q$
	$1 - p$	$\beta$	(3,1) →	(0,4)	$4 - 3q$
Inges Auszahlung:			$3 - p$	$p$	

- Die Spieler wollen den minimalen Gewinn maximieren. Eine solche Strategie ist die *Sicherheitsstrategie*.
- Mit  $\tilde{p} = 3/2$  gleicht Inge ihre Gewinne aus:  
 $3 - \tilde{p} = \tilde{p} = 3/2$ , aber  $p \in [0, 1]$ ! Sie wählt  $\hat{p} = 1$ , um ihren minimalen Gewinn zu maximieren,  $\max_{0 \leq p \leq 1} \min\{3 - p, p\} = 1$ .
- Mit  $\hat{q} = 4/7$  gleicht Jörg seine Gewinne aus:  
 $4\hat{q} = 4 - 3\hat{q} = 16/7$ .
- Die Sicherheitsstrategien liegen in der Kreuzung der gestrichelten Linien in der obigen Grafik.

# Gefangenendilemma

- ▶ Inge und Jörg begehen ein Verbrechen und werden gefangen.
- ▶ Bei der Polizei haben sie folgende Auszahlungen, wobei  $T > R > U > S$ ,  $R > (S + T)/2$ .

		Jörgs Strategien	
		kooperieren	überlaufen
Inges Strategien	kooperieren	$(R, R)$	$(S, T)$
	überlaufen	$(T, S)$	$(U, U)$

- ▶ Wenn kein Spieler gesteht, sind die beiden frei und bekommen die Belohnung  $R$ . z.B. Freiheit
- ▶ Der Spieler der gesteht, während der andere nicht, bekommt eine Belohnung  $T$ . z.B. Immunität  
Der andere eine schwere Strafe  $S$ . z.B. kürzer vs. länger
- ▶ Wenn beide gestehen, bekommen sie eine leichte Strafe  $U$ .
- ▶ Viele Spiele haben diese Struktur, z.B.
  - ▶ 2 Geschäfte im Preiskrieg
  - ▶ 2 Länder im Bewaffnungskrieg

# Gefangenendilemma

- ▶ Ein anderes Ergebnis durch wiederholtes Spielen?
- ▶ Sei  $p$  die Wahrscheinlichkeit, dass das Spiel wiederholt wird. Mit Wahrscheinlichkeit  $p^n$  wird es  $n$ -Mal wiederholt.
- ▶ Der Gewinn durch ununterbrochenes Kooperieren ist:

$$R + pR + p^2R + \dots = R \sum_{n=0}^{\infty} p^n = \frac{R}{1-p}$$

- ▶ Der Gewinn durch Überlaufen beim  $(m+1)$ ten Zug ist:

$$R \sum_{n=0}^{m-1} p^n + Tp^m + U \sum_{n=m+1}^{\infty} p^n = R \frac{1-p^m}{1-p} + Tp^m + U \frac{p^{m+1}}{1-p}$$

- ▶ Wenn gilt  $p > (T-R)/(T-U)$ , d.h.  $m$  unabhängig!

$$R \frac{1-p^m}{1-p} + Tp^m + U \frac{p^{m+1}}{1-p} < \frac{R}{1-p}$$

dann zahlt es sich aus, ununterbrochen zu kooperieren!

# Evolutionär Stabile Strategien

- ▶ Interaktion zwischen Individuen wird so modelliert:

		Spezies Strategien	
		Falke	Taube
Spezies Strategien	Falke	$(-25, -25)$	$(50, 0)$
	Taube	$(0, 50)$	$(15, 15)$

- ▶ Auf dem Spiel stehen angenommen 50 Fitnesspunkte.
- ▶ Wenn 2 Falken sich begegnen, kämpfen sie. Der Gewinner kriegt 50 Fitnesspunkte und der Verlierer kriegt  $-100$ .  
Durchschnittlich kriegt ein Falke  $(50 - 100)/2 = -25$ .
- ▶ Wenn ein Falke und eine Taube sich begegnen, siegt der Falke immer.
- ▶ Wenn 2 Tauben sich begegnen, posieren sie. Eine nimmt die Punkte nach Verzögerung. Wegen der Verzögerung verlieren beide 10 Punkte. Also kriegt der Gewinner 40 Fitnesspunkte und der Verlierer kriegt  $-10$ .  
Durchschnittlich kriegt eine Taube  $(40 - 10)/2 = 15$ .



# Evolutionär Stabile Strategien

- ▶ Population von Tauben vorteilhaft?
  - ▶ Ein paar Falken (durch Mutation) dringen ein (mit einem Gewinn von 50 statt 15), und sie vermehren sich.
- ▶ Population von Falken vorteilhaft?
  - ▶ Ein paar Tauben dringen (durch Mutation) ein (mit einem Gewinn von 0 statt -25), und sie vermehren sich.
- ▶ Kann eine gemischte Population vorteilhaft sein?
  - ▶ Sei  $q$  der Bruchteil von Falken.
  - ▶ Folgendes Spiel zwischen einem Individuum der Spezies und einem möglichen Eindringling findet statt.

		Spezies Strategien		Eindringlinge Auszahlung:
		$q$ Falke	$1 - q$ Taubе	
Eindringlinge Strategien	Falke	$(-25, -25)$	$(50, 0)$	$-25q + 50(1 - q)$
	Taubе	$(0, 50)$	$(15, 15)$	$0q + 15(1 - q)$

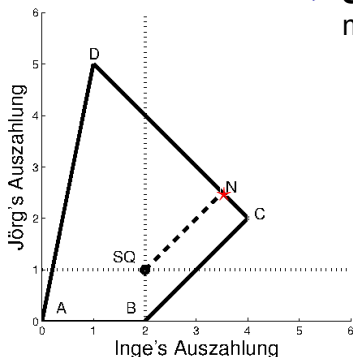
- ▶ Mit  $q^* = 7/12$  kann ein Eindringling die gemischte Strategie nicht ausnutzen,  $-25q^* + 50(1 - q^*) = 15(1 - q^*)$ .
- ▶ Die Strategie mit  $q^*$  ist *evolutionär stabil*.

# Nash Verhandlungsschema

- ▶ Inge und Jörg möchten verhandeln.
- ▶ Sie überlegen folgende Ergebnisse,

$$A = (0, 0), \quad B = (2, 0), \quad C = (4, 2), \quad D = (1, 5),$$

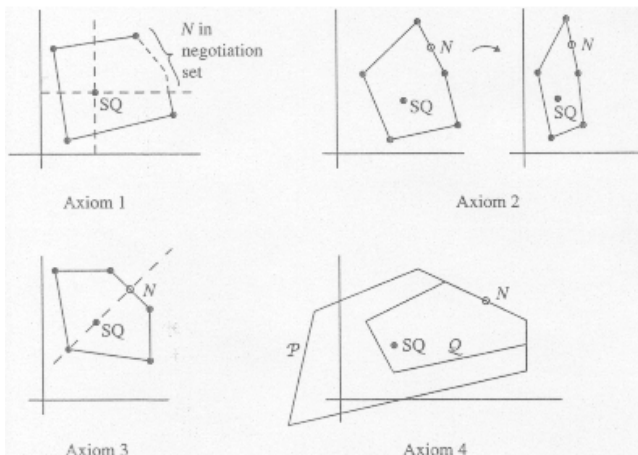
- ▶ Es wird vereinbart,  $SQ = (2, 1)$  (Status Quo) wird ausgeführt, falls es keine Einigung gibt.
- ▶ Die Ergebnisse bilden ein Polygon  $\mathcal{P}$ :



- ▶ **Satz (Nash):**  $\exists ! N$  eine Verhandlungsstelle mit folgenden Eigenschaften:

- ▶  $N$  soll Pareto optimal und sicher sein.
- ▶  $N$  soll dasselbe sein, wenn die Utilitäten positiv linear transformiert werden.
- ▶ Wenn das Polygon  $\mathcal{P}$  symmetrisch bezüglich der Gerade  $IA=JA$  ist, soll das Ergebnis auf dieser Gerade liegen.
- ▶ Sei  $\mathcal{Q}$  ein Polygon, das  $SQ$  und  $N$  enthält, während  $\mathcal{Q}$  in  $\mathcal{P}$  liegt. Dann soll  $N$  die Verhandlungsstelle in  $\mathcal{Q}$  sein.
- ▶ Grafische Darstellung der Axiome:

# Nash Verhandlungsschema



- $N$  wird so berechnet: Wenn  $SQ = (x_0, y_0)$  so gegeben ist, folgt  $N = (x^*, y^*)$  wobei  $(x^* - x_0)(y^* - y_0) = \max$  in  $\{(x, y) \text{ in } P : x \geq x_0, y \geq y_0\}$ .

# Nash Verhandlungsschema

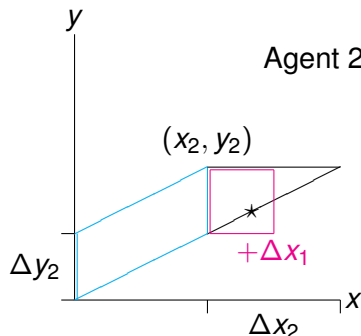
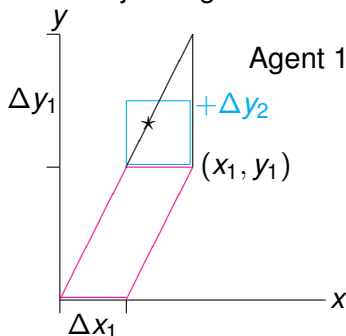
- ▶ Beispiel: Seien  $A = (0, 0)$ ,  $B = (2, 0)$ ,  $C = (4, 2)$ ,  $D = (1, 5)$ ,  
 $SQ = (2, 1)$ ,  $E = (3, 1)$ ,  $F = (2, 4)$   
und  $\mathcal{P} = \text{Konvexe H\ddot{u}lle}\{SQ, E, C, F\}$ .
- ▶ Der Geradenabschnitt  $FC$  erf\ddot{u}llt die Bedingungen (z.B. Pareto optimal und sicher) im Satz, und er ist explizit so gegeben:  
$$y = 6 - x, \quad 2 \leq x \leq 4$$
- ▶ Auf  $FC$  wird  $(x - 2)(y - 1)$  maximiert, wenn maximiert wird  
$$(x - 2)(y - 1) = (x - 2)((6 - x) - 1) = -x^2 + 7x - 10 = f(x)$$
- ▶ Mit  $f'(x) = -2x + 7$ ,  $f'(7/2) = 0$ ,  $f(7/2) = 9/4$ ,  $f(2) = 0$   
und  $f(4) = 2 < 9/4$  folgt, dass  $f$  ein globales Maximum in  
 $x^* = 7/2$  hat.
- ▶ Da  $2 \leq x^* \leq 4$  gilt, liegt  $(x^*, y^*)$  in  $FC$ , wobei  
 $y^* = 6 - x^* = 5/2$ .
- ▶ Die Zielfunktion  $F(x, y) = (x - 2)(y - 1)$  wird tats\ddot{a}chlich  
\ddot{u}ber  $\mathcal{P}$  in der Verhandlungsstelle  $N = (7/2, 5/2)$  maximiert.

# Nash Verhandlungsschema

- ▶ Angenommen gibt es eine Population von *Agenten*, und jeder verbraucht Ressourcen  $x$  und  $y$ .
- ▶ Sobald der eigene Vorrat einer Ressource aus ist, stirbt der Agent.
- ▶ Die Agenten suchen und tauschen Ressourcen.
- ▶ Zwei Agenten treffen sich und bestimmen einen Tausch nach dem Nash Verhandlungsschema.
- ▶ Seien  $a_i$  und  $b_i$  die Verbrauchsrate für die Ressourcen  $x$  und  $y$  für den  $i$ ten Agenten,  $i = 1, 2$ .
- ▶ Wenn  $x_i$  und  $y_i$  zur Zeit  $t = 0$  vorhanden sind, gelten
$$x = x_i - a_i t, \quad y = y_i - b_i t$$
für den  $i$ ten Agenten, wenn kein Tausch stattfindet.
- ▶ Der  $i$ te Agent stirbt in der frühesten Zeit  $t$ , die erfüllt
$$0 = x_i - a_i t, \quad \text{oder} \quad 0 = y_i - b_i t$$
- ▶ Die natürliche Utilität ist Lebenszeit,
$$u_i = \min\{x_i/a_i, y_i/b_i\}$$

# Nash Verhandlungsschema

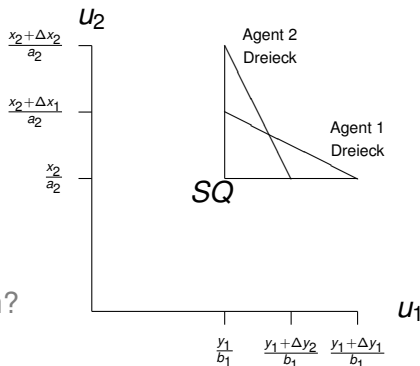
- Die gestrichelten Geraden mit Steigungen  $dy/dx = y'/x' = s_i = b_i/a_i$  sind die jeweiligen Bahnen ohne Tauschen:



- Ohne Tauschen sterben die Agenten mit Überschüssen,  $\Delta x_1 = x_1 - y_1/s_1$  bzw.  $\Delta y_2 = y_2 - s_2 x_2$ .
- Wenn sie zusätzliche Vorräte  $\Delta y_1 = s_1 x_1 - y_1$  bzw.  $\Delta x_2 = y_2/s_2 - x_2$  hätten, wären die Lebenszeiten verlängert, und beide Ressourcen wären gleichzeitig erschöpft.

# Nash Verhandlungsschema

- ▶ In der obigen Konfiguration haben Agenten 1 und 2 Ressourcen  $x$  bzw.  $y$  dem anderen anzubieten.
- ▶ Was ist ein fairer Tausch?  $SQ$  = nichts tauschen.
- ▶ Die Utilitäten können so grafisch dargestellt werden:
- ▶ Rechtes Dreieck:  
Agent 1 hat  $\Delta x_1$ ,  
will  $\Delta y_1$ .
- ▶ Linkes Dreieck:  
Agent 2 hat  $\Delta y_2$ ,  
will  $\Delta x_2$ .
- ▶ Spiel findet im **Durchschnitt S** der Dreiecke statt. Warum?
- ▶  $(u_1 - y_1/b_1)(u_2 - x_2/a_2)$  soll in  $S$  maximiert werden.
- ▶ Je nach Parametern befindet sich die Lösung im Mittelpunkt einer Hypotenuse oder in der Kreuzung zwischen diesen.



# Stochastische Prozesse

- Man kennt die Eigenschaft der autonomen deterministischen Modelle,

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(t+s) = \ell(t; \mathbf{x}(s))$$

dass die Lösungsformel  $\ell$  unabhängig von  $s$  gilt.

- In Wahrscheinlichkeitstheorie gibt es analog die *Markov*-Eigenschaft, wobei die bedingte Wahrscheinlichkeit

$$P(X(t+s) = j \mid X(s) = i)$$

von  $s$  nicht abhängt. Hier ist  $X(t)$  eine Zufallsvariable und  $\{X(t)\}_{t \geq 0}$  ist ein *stochastischer Prozess*.

- Insbesondere gilt

$$P(X(t+s) = j \mid X(s) = i) = P(X(t) = j \mid X(0) = i)$$

- Analog zum Modell  $x' = \text{Geburtsrate} - \text{Todesrate}$  oder

$$x(t+dt) - x(t) = \underbrace{b(x)dt + o(dt)}_{\text{Geburte in } [t, t+dt]} - \underbrace{d(x)dt + o(dt)}_{\text{Todesfälle in } [t, t+dt]}$$

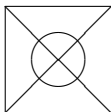
gibt es probabilistisch,

$$\begin{aligned} P(X(t+dt) = i+1 \mid X(t) = i) &= b_i dt + o(dt) && \text{(beschränkte} \\ P(X(t+dt) = i-1 \mid X(t) = i) &= d_i dt + o(dt) && \text{Übergänge)} \\ P(X(t+dt) = i \mid X(t) = i) &= 1 - \oplus - \ominus = 1 - b_i dt - d_i dt + o(dt) \end{aligned}$$



# Markovsche Eigenschaft und Bayessche Regel

- Sei  $p_i(t) = P(X(t) = i)$ . Wenn die möglichen Zustände  $X(t) \in \{0, 1, \dots, N\}$  sind, dann gilt



(Bayes)

(Markov)

(Übergänge)

$$\begin{aligned}
 & p_i(t + dt) \\
 &= P(X(t + dt) = i) \\
 &= \sum_{j=0}^N P(X(t + dt) = i \mid X(t) = j) \cdot P(X(t) = j) \\
 &= \sum_{j=0}^N P(X(dt) = i \mid X(0) = j) \cdot p_j(t) \\
 &= \sum_{|i-j| \leq 1} P(X(dt) = i \mid X(0) = j) \cdot p_j(t) + o(dt) \\
 &= \underbrace{b_{i-1} dt}_{i \geq 1} p_{i-1}(t) + (1 - \underbrace{b_i dt}_{i \leq N-1} - \underbrace{d_i dt}_{i \geq 1}) p_i(t) + \underbrace{d_{i+1} dt}_{i \leq N-1} p_{i+1}(t) + o(dt)
 \end{aligned}$$

- Es folgt für  $1 \leq i \leq N$ ,

$$p'_i(t) \stackrel{0 \leftarrow dt}{\leftarrow} \frac{p_i(t + dt) - p_i(t)}{dt} = \underbrace{b_{i-1}}_{i \geq 1} p_{i-1}(t) - (\underbrace{b_i}_{i \leq N-1} + \underbrace{d_i}_{i \geq 1}) p_i(t) + \underbrace{d_{i+1}}_{i \leq N-1} p_{i+1}(t)$$

oder

$$\mathbf{p}' = \mathbf{A} \mathbf{p}, \quad \mathbf{A} = \text{tridiag} \left\{ \underbrace{b_{i-1}}_{i \geq 1}, -(\underbrace{b_i}_{i \leq N-1} + \underbrace{d_i}_{i \geq 1}), \underbrace{d_{i+1}}_{i \leq N-1} \right\} \in \mathbb{R}^{(N+1) \times (N+1)}$$

# Populationsdynamik

- ▶ Beispiel: Population ist 1 Individuum,  $N = 1$ .

$$\begin{aligned}0 = P(X(dt) = 1 \mid X(0) = 0) &= b_0 dt + o(dt) \Rightarrow b_0 = 0 \\ P(X(dt) = 0 \mid X(0) = 1) &= d_1 dt + o(dt)\end{aligned}$$

Das System der GDG  $\mathbf{p}' = A\mathbf{p}$  ist

$$\begin{aligned}p'_0 &= -b_0|_{=0}p_0 + d_1p_1 && \text{mit Lösung,} \\ p'_1 &= -d_1p_1 && \Rightarrow p_1(t) = e^{-d_1t}p_1(0) \\ p_0(t) + p_1(t) &= 1 && \Rightarrow p_0(t) = 1 - e^{-d_1t}p_1(0)\end{aligned}$$

- ▶ Beispiel: Population besteht aus  $N$  Männern.

$$\begin{aligned}0 = P(X(dt) = i + 1 \mid X(0) = i) &= b_i dt + o(dt) \Rightarrow b_i = 0 \\ P(X(dt) = i - 1 \mid X(0) = i) &= d_i dt + o(dt) \quad d_i = D\end{aligned}$$

Für das System der GDG  $\mathbf{p}' = A\mathbf{p}$  gilt

$$A = \text{tridiag}\{0, -d_i\delta_{i>0}, d_{i+1}\} = \text{tridiag}\{0, -D\delta_{i>0}, D\}$$

# Todesprozess

Lösung des Systems,

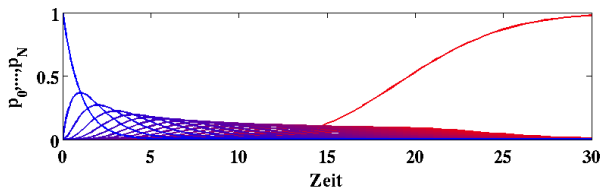
$$\begin{aligned}
 p'_N &= -Dp_N \Rightarrow p_N(t) = e^{-Dt} p_N(0) \\
 p'_{N-1} &= -Dp_{N-1} + Dp_N = -Dp_{N-1} + De^{-Dt} p_N(0) \\
 &\Rightarrow (e^{Dt} p_{N-1})' = Dp_N(0) \quad | \quad \int_0^t dt \\
 &\Rightarrow e^{Dt} p_{N-1}(t) - p_{N-1}(0) = p_N(0) Dt \\
 &\Rightarrow p_{N-1}(t) = e^{-Dt} [p_{N-1}(0) + p_N(0) Dt] \\
 p'_{N-2} &= -Dp_{N-2} + Dp_{N-1} = -Dp_{N-2} + De^{-Dt} [p_{N-1}(0) + p_N(0) Dt] \\
 &\Rightarrow (e^{Dt} p_{N-2})' = D[p_{N-1}(0) + p_N(0) Dt] \quad \dots \\
 &\Rightarrow p_{N-2}(t) = e^{-Dt} [p_{N-2}(0) + p_{N-1}(0) Dt + p_N(0) \frac{1}{2} (Dt)^2]
 \end{aligned}$$

usw.

$$p_i(t) = e^{-Dt} \sum_{j=i}^N p_j(0) \frac{(Dt)^{j-i}}{(j-i)!}, \quad 1 \leq i \leq N, \quad p_0(t) = 1 - \sum_{i=1}^N p_i(t)$$

Todesprozess,  $N=20$ ,  $p_N$  blau,  $p_0$  rot

Mit Anfangsbedingungen  
 $p_i(0) = \delta_{i,N}$ :



# Todesprozess

- Bestätigung dass die Formel  $p_0(t) = 1 - \sum_{i=1}^N p_i(t)$  passt:

$$\begin{aligned} p_0' &= -\sum_{i=1}^N p_i' &= D \sum_{i=1}^N p_i - D \sum_{i=1}^{N-1} p_{i+1} \\ &= D \sum_{i=1}^N p_i - D \sum_{i=2}^N p_i = D p_1 \checkmark \end{aligned}$$

- Der Erwartungswert  $\mathbb{E}[X(t)]$  erfüllt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X(t)] &= \sum_{n=0}^N n p_n(t) \Rightarrow \\ \mathbb{E}[X(t)]' &= \sum_{n=0}^N n p_n'(t) \\ &= -D \sum_{n=1}^N n p_n(t) + D \sum_{n=0}^{N-1} n p_{n+1}(t) \\ &= -D \sum_{n=1}^N n p_n(t) + D \sum_{n=1}^N (n-1) p_n(t) \\ &= -D \sum_{n=1}^N p_n(t) = -D[1 - p_0(t)] \end{aligned}$$

Während  $p_0(t)$  klein ist, gilt

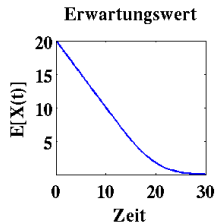
$$\mathbb{E}[X(t)]' \approx -D$$

oder

$$\mathbb{E}[X(t)] \approx \mathbb{E}[X(0)] - Dt$$

Schliesslich gilt

$$\mathbb{E}[X(t)] \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0.$$



# Geburtsprozess

► Beispiel: Ein Entdeckungsprozess.

- $X(t)$  = Anzahl der Entdeckungen bis zur Zeit  $t$ .
- $X(t) \in \{0, \dots, N\}$
- Es gelten

$$\begin{aligned}P(X(dt) = i + 1 \mid X(0) = i) &= b_i dt + o(dt) \quad b_i = B \\0 = P(X(dt) = i - 1 \mid X(0) = i) &= d_i dt + o(dt) \Rightarrow d_i = 0\end{aligned}$$

Für das System der GDG  $\mathbf{p}' = \mathbf{A}\mathbf{p}$  gilt

$$\mathbf{A} = \text{tridiag}\{b_i, -b_i\delta_{i < N}, 0\} = \text{tridiag}\{B, -B\delta_{i < N}, 0\}$$

► Analog zum Todesprozess,

$$\begin{aligned}p'_0 &= -Bp_0 \Rightarrow p_0(t) = e^{-Bt}p_0(0) \\p'_1 &= Bp_0 - Bp_1 \quad \cdots \quad p_1(t) = e^{-Bt}[p_1(0) + p_0(0)Bt] \\p'_2 &= Bp_1 - Bp_2 \quad \cdots \quad p_2(t) = e^{-Bt}[p_2(0) + p_1(0)Bt + p_0(0)\tfrac{1}{2}(Bt)^2] \\&\vdots\end{aligned}$$

usw.

$$p_i(t) = e^{-Bt} \sum_{j=0}^i p_j(0) \frac{(Bt)^{i-j}}{(i-j)!}, \quad 0 \leq i \leq N-1, \quad p_N(t) = 1 - \sum_{i=0}^{N-1} p_i(t)$$

# Poissonsche Verteilung

- ▶ Nun werden unendlich viele Zustände für einen Geburtsprozess erlaubt, d.h.  $N \rightarrow \infty$ .
- ▶ Geburtsprozess: Schätze werden entdeckt und nicht vergessen, also gibt es keinen gleichzeitigen Todesprozess.
- ▶ Seien
  - ▶  $X(t)$  = Anzahl der entdeckten Schätze zur Zeit  $t$ .
  - ▶  $A(t)$  = Anzahl der Schätze, die im Zeitintervall  $[0, t]$  entdeckt werden.
- ▶ Es gelten

$$\begin{aligned}P(X(dt) = i + 1 \mid X(0) = i) &= b_i dt + o(dt) \quad b_i = B \\0 = P(X(dt) = i - 1 \mid X(0) = i) &= d_i dt + o(dt) \Rightarrow d_i = 0 \\P(A(t) = k) &= P(X(t) = k \mid X(0) = 0)\end{aligned}$$

- ▶ Für  $A(t)$  sind die Anfangsbedingungen für  $p_n(t)$  gegeben durch  $p_n(0) = \delta_{n,0}$ , und es folgt die *Poissonsche Verteilung*

$$P(A(t) = k) = e^{-Bt} \sum_{j=0}^k p_j(0) \frac{(Bt)^{k-j}}{(k-j)!} = e^{-Bt} \frac{(Bt)^k}{k!}$$

# Poissonsche Verteilung

- Der Erwartungswert ist

$$\mathbb{E}[A(t)] = \sum_{n=0}^{\infty} n p_n(t) = e^{-Bt} \sum_{n=0}^{\infty} n \frac{(Bt)^n}{n!} = (Bt) e^{-Bt} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(Bt)^{n-1}}{(n-1)!} = Bt$$

- Sei  $G$  = Zeit bis zur nächsten Entdeckung. Es gilt für  $t > 0$

$$\begin{aligned} \forall i \quad P(G > t) &= P(X(t+s) = i \mid X(s) = i) \\ &= P(X(t+s) = 0 \mid X(s) = 0) \\ \forall s &= P(X(t) = 0 \mid X(0) = 0) \\ \text{(mit Anfangsbedingungen)} &= p_0(t) = e^{-Bt} \end{aligned}$$

- Sei  $g$  die Wahrscheinlichkeitsdichte für  $G$ , d.h.

$$P(G \in M) = \int_M g(s) ds$$

Mit der obigen Formel folgt die *Exponentielle Verteilung*

$$e^{-Bt} = P(G > t) = \int_t^{\infty} g(s) ds \quad (t > 0)$$

d.h.  $g(t) = Be^{-Bt}$  für  $t \geq 0$  und  $g(t) = 0$  für  $t < 0$ .

- Der Erwartungswert ist

$$\mathbb{E}[G] = \int_0^{\infty} s g(s) ds = \int_0^{\infty} s B e^{-Bs} ds = 1/B$$

# Länge einer Warteschlange

- ▶ Kunden kommen bei einer Kasse an.
  - ▶ Sei  $X(t)$  = Anzahl der Kunden in der Warteschlange.  
$$X(t) \in \{0, \dots, N\}$$
  - ▶ Geburt: Ein neuer Kunde kommt an.
  - ▶ Todesfall: Ein wartender Kunde wird bedient.
- ▶ Wie oben gesehen gelten Folgende mit entsprechenden Anfangsbedingungen.
  - ▶ Reiner Geburtsprozess:  
 $G$  = Zeit bis nächster Kunde ankommt.  
$$P(G > t) = e^{-Bt}, \quad E(G) = 1/B =: c$$
  
wobei  $c$  = durchschnittliche Zeit zwischen Kundenankünften.
  - ▶ Reiner Todesprozess:  
 $T$  = Zeit bis nächster Kunde bedient.  
$$P(T > t) = e^{-Dt}, \quad E(T) = 1/D =: s$$
  
wobei  $s$  = durchschnittliche Zeit zwischen Kundenbedienungen.
- ▶ Das System  $\mathbf{p}' = \mathbf{A}\mathbf{p}$  ist mit  $b_j = 1/c$  und  $d_j = 1/s$ ,

$$\begin{cases} p'_j &= b_{j-1}p_{j-1} - (b_j + d_j)p_j + d_{j+1}p_{j+1}, & 0 < j < N \\ p'_0 &= -b_0p_0 + d_1p_1 \\ p'_N &= b_{N-1}p_{N-1} - d_Np_N \end{cases}$$



# Länge einer Warteschlange

- ▶ Analog zu den vorherigen Beispielen ist die Systemmatrix

$$A = \text{tridiag}\left\{\frac{1}{c}, -\frac{1}{c}\delta_{i < N}, 0\right\} + \text{tridiag}\left\{0, -\frac{1}{s}\delta_{i > 0}, \frac{1}{s}\right\}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{c} & \frac{1}{s} & & & 0 \\ \frac{1}{c} & -(\frac{1}{c} + \frac{1}{s}) & \frac{1}{s} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \frac{1}{c} & -(\frac{1}{c} + \frac{1}{s}) & \frac{1}{s} \\ 0 & & & \frac{1}{c} & -\frac{1}{s} \end{bmatrix}$$

- ▶ Ein *stationärer* Zustand  $\mathbf{p}^*$  ( $\mathbf{p}' = \mathbf{A}\mathbf{p} \rightarrow 0$ ) erfüllt  $\mathbf{A}\mathbf{p}^* = 0$ .

- ▶ 1. Gleichung:

$$\frac{p_0^*}{c} = \frac{p_1^*}{s}, \quad p_1^* = \rho p_0^*, \quad \rho = s/c.$$

- ▶ 2. Gleichung:

$$0 = \left(\frac{p_0^*}{c} - \frac{p_1^*}{s}\right) - \frac{p_1^*}{c} + \frac{p_2^*}{s}, \quad p_2^* = \rho p_1^* = \rho^2 p_0^*$$

- ▶ Weiter,

$$p_i^* = \rho^i p_0^*, \quad 1 \leq i \leq N$$

# Länge einer Warteschlange

- ▶  $p_0^*$  ist gegeben durch

$$1 = \sum_{i=0}^N p_i^* = \sum_{i=0}^N \rho^i p_0^* \quad \text{oder} \quad p_0^* = 1 / \sum_{i=0}^N \rho^i = \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{N+1}}$$

- ▶ Der Erwartungswert ist

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X^*] &= \sum_{i=0}^N i p_i^* = p_0^* \sum_{i=0}^N i \rho^i = \rho p_0^* \frac{d}{d\rho} \sum_{i=1}^N \rho^i \\ &= \left[ \frac{\rho(1 - \rho)}{1 - \rho^{N+1}} \right] \frac{d}{d\rho} \left[ -1 + \frac{1 - \rho^{N+1}}{1 - \rho} \right] \\ &= \frac{\rho(1 - (N+1)\rho^N + N\rho^{N+1})}{(1 - \rho)(1 - \rho^{N+1})} \end{aligned}$$

$$\mathbb{E}[X^*] \xrightarrow{\rho \rightarrow 1} \frac{N}{2}, \quad \mathbb{E}[X^*] \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{\rho}{1 - \rho} =: L_1$$

# Wartezeit bei der Warteschlange

- ▶ Bei der Warteschlange einer Kasse komme ich zur Zeit  $t = 0$  an. Sei  $X(t)$  = Anzahl der Kunden vor mir an der Kasse zur Zeit  $t$ .
- ▶ Sei  $Y$  = meine gesamte Wartezeit, d.h. die Summe der Bedienzeiten der vorherigen Kunden plus meine eigene Bedienzeit. Verteilung? Erwartungswert?
- ▶  $c, s$  = durchschnittliche Zeiten zwischen Kunden-Ankünften bzw. -Bedienungen,  $\rho = s/c \leq 1$ .
- ▶ Zur Vereinfachung wird angenommen, die Anzahl der möglichen Plätze in der Warteschlange erfüllt  $N \rightarrow \infty$ ,  
$$p_0^* = \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 1 - \rho, \quad p_i^* = \rho^i p_0^* \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \rho^i (1 - \rho)$$

- ▶ Für die Verteilung von  $Y$ ,

$$P(Y \leq t) = \sum_{i=0}^{\infty} P(Y \leq t | X(0) = i) P(X(0) = i)$$

- ▶  $P(Y \leq t | X(0) = i)$  entspricht  $p_0(t)$  eines reinen Todesprozesses mit Anfangsbedingungen  $p_j(0) = \delta_{i+1,j}$ .
- ▶ Nimm  $P(X(0) = i) = p_i^* = \rho^i (1 - \rho)$ .

## Wartezeit bei der Warteschlange

- Für den reinen Todesprozess mit Anfangsbedingungen  $p_j(0) = \delta_{i+1,j}$  gelten für  $j = 1, \dots, i+1$ ,

$$p_j(t) = e^{-t/s} \sum_{k=j}^{\infty} \underbrace{p_k(0)}_{=\delta_{i+1,k}} \frac{(t/s)^{k-j}}{(k-j)!} = e^{-t/s} \frac{(t/s)^{i+1-j}}{(i+1-j)!} \quad p_0(t) = 1 - \sum_{j=1}^{i+1} p_j(t)$$

und mit  $p_0(0) = 0$ ,

$$p'_0(t) = -\frac{d}{dt} \sum_{j=1}^{i+1} p_j(t) = \frac{e^{-t/s}}{s} \frac{(t/s)^i}{i!}, \quad p_0(t) = \int_0^t \frac{(\tau/s)^i}{i!} \frac{e^{-\tau/s}}{s} d\tau$$

- Zusammengefasst,

$$\begin{aligned} P(Y \leq t) &= \sum_{i=0}^{\infty} \rho^i (1-\rho) \int_0^t \frac{(\tau/s)^i}{i!} \frac{e^{-\tau/s}}{s} d\tau \\ &= \frac{1-\rho}{s} \int_0^t e^{-\tau/s} \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\rho\tau/s)^i}{i!}}_{=e^{\rho\tau/s}} d\tau = \frac{1-\rho}{s} \frac{e^{(\rho-1)\tau/s}}{(\rho-1)/s} \Bigg|_0^t = 1 - e^{-(1/s-1/c)t} \end{aligned}$$

$$\text{oder } P(Y > t) = 1 - P(Y \leq t) = e^{-(1/s-1/c)t}.$$

## Wartezeit bei der Warteschlange

- Sei  $y$  die Wahrscheinlichkeitsdichte für  $Y$ , d.h.

$$P(Y \in M) = \int_M y(\tau) d\tau$$

Mit der obigen Formel folgt

$$e^{-(1/s-1/c)t} = P(Y > t) = \int_t^\infty y(\tau) d\tau \quad (t > 0)$$

d.h. die Exponentielle Verteilung,

$$y(t) = (1/s - 1/c) e^{-(1/s-1/c)t}$$

- Der Erwartungswert ist

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Y] &= \int_0^\infty \tau y(\tau) d\tau = \int_0^\infty \tau (1/s - 1/c) e^{-(1/s-1/c)\tau} d\tau \\ &= \underbrace{-\tau e^{-(1/s-1/c)\tau}}_{=0} \Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-(1/s-1/c)\tau} d\tau = \frac{e^{-(1/s-1/c)\tau}}{-(1/s-1/c)} \Big|_0^\infty \\ &= \frac{1}{1/s - 1/c} = \frac{s}{1 - \rho} =: W = cL_1 \quad L_1 = \frac{\rho}{1 - \rho}, \quad \rho = \frac{s}{c} \end{aligned}$$

- Bei Stationarität: (erwartete) Wartezeit =  
(durchschnittliche) Zeit zwischen Kundenankünften  $\times$   
(erwartete) Länge der Warteschlange bei *einer* Kasse.

# Diskrete Probabilistische Modelle

- ▶ Beispiel: Zustand eines Aufzugs.
- ▶ Zuerst kontinuierlich:
  - ▶ Mögliche Zustände:  $X(t) \in \{0 \text{ (EG)}, \dots, N\}$ , d.h.  $N + 1$  Stockwerke.
  - ▶  $X(t) = i$  zur Zeit  $t$  wenn immer noch im  $i$ ten Stockwerk oder wenn unterwegs zum  $i$ ten Stockwerk.
  - ▶ Geburt:  $X(t) = i \rightarrow X(t + dt) = i + 1$ .
  - ▶ Todesfall:  $X(t) = i \rightarrow X(t + dt) = i - 1$ .

z.B.  $N = 2$ ,  $\mathbf{p}' = A\mathbf{p}$ , wobei

$$A = \begin{bmatrix} -b_0 & d_1 & 0 \\ b_0 & -(b_1 + d_1) & d_2 \\ 0 & b_1 & -d_2 \end{bmatrix}, \quad \text{d.h.} \quad \begin{matrix} d_0 = 0 \\ b_2 = 0 \end{matrix}$$

Lösung: Mit  $A = S\Lambda S^{-1}$ ,  $\mathbf{p}(t) = e^{At}\mathbf{p}_0 = Se^{\Lambda t}S^{-1}\mathbf{p}(0)$

$$b_0 = b_1 = d_0 = d_1 \Rightarrow \mathbf{p}(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \langle \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \rangle^\top$$

d.h. alle Stockwerke sind auf die Dauer gleich wahrscheinlich.

# Markov-Ketten

- ▶ Nun diskret:
  - ▶  $X(n) = i$  wenn im  $i$ ten Stockwerk nach dem  $n$ ten Übergang.
  - ▶  $n$  = Übergangsindex, nicht lineare Zeit.
  - ▶  $p_i(n) = P(X(n) = i)$
- ▶ Die Verteilung für einen Übergang ist gegeben durch

$$p_j(1) = \sum_{i=0}^N \underbrace{P(X(1) = j | X(0) = i)}_{P_{i,j}} p_i(0)$$

wobei  $P = \{P_{i,j}\}$  die Übergangsmatrix ist.  $\sum_{j=0}^N P_{i,j} = 1$

**Def:** Eine Markov-Kette (linear mit konstanten Übergangswahrscheinlichkeiten) ist ein zeitlich diskretes dynamisches Modell bestehend aus Zuständen  $\{S_i\}$  und Wahrscheinlichkeiten  $\{P_{i,j}\}$ , wobei der Übergang  $S_i|_n \rightarrow S_j|_{n+1}$  mit Wahrscheinlichkeit  $P_{i,j}$  stattfindet.

- ▶ Ein Schritt der obigen Markov-Kette wird dargestellt durch

$$\mathbf{p}^\top(1) = \mathbf{p}^\top(0)P$$

und  $n$  Schritte durch

$$\mathbf{p}^\top(n) = \mathbf{p}^\top(n-1)P = \dots = \mathbf{p}^\top(0)P^n$$

## Zustand eines Aufzugs

- ▶ Nimm  $N = 2$ . Man fährt weder  $0 \rightarrow 2$  noch  $2 \rightarrow 0$  in einem Übergang. Deswegen gelten

$$P_{2,0} = P_{0,2} = 0$$

- ▶ Man fährt nie  $i \rightarrow i$  in einem Übergang. Deswegen gelten

$$P_{0,0} = P_{1,1} = P_{2,2} = 0$$

- ▶ Da die Zeilensumme der Übergangsmatrix immer 1 ist, gilt für ein  $\theta \in [0, 1]$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \theta & 0 & 1 - \theta \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad P^{2k} = \begin{bmatrix} \theta & 0 & 1 - \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \theta & 0 & 1 - \theta \end{bmatrix}, \quad P^{2k+1} = P$$

- ▶ Daher

$$\mathbf{p}(0) = \langle 1, 0, 0 \rangle^\top \Rightarrow \mathbf{p}(2k+1) = \langle 0, 1, 0 \rangle^\top, \quad \mathbf{p}(2k) = \langle \theta, 0, 1 - \theta \rangle^\top$$

- ▶ Startend vom EG wird der Aufzug unbedingt im mittleren Stockwerk bei ungeraden Übergängen sein, aber dies ist bei geraden Übergängen nicht möglich.
- ▶ Der Unterschied zwischen dem kontinuierlichen und dem diskreten Ergebnis hat mit der zeitlichen Variable zu tun:  $t$  vs.  $n$ .



# Wetter Übergänge

- ▶ Beispiel: Angenommen befindet sich das Wetter an einem gegebenen Tag in einem der Zustände:  $S$  (Sonne),  $W$  (Wolken) oder  $R$  (Regen).
- ▶ Abgeschätzte Übergangswahrscheinlichkeiten werden in einer Tabelle zusammengefasst,

	$S$	$W$	$R$
$S$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$0$
$W$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
$R$	$0$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (P^n > 0, n > 1)$$

- ▶  $P \in \mathbb{S}$  (stochastische Matrizen):  $(\mathbf{1})_i = 1, \forall i \Rightarrow P\mathbf{1} = \mathbf{1}$ .
- ▶  $\mathbf{s} \in \mathbb{W}$  (Wahrscheinlichkeitsvektoren):  $(\mathbf{s})_i \in [0, 1]$  und  $\mathbf{s} \cdot \mathbf{1} = 1$ .
- ▶ Mit Ausgangszustand  $\mathbf{s}^n \in \mathbb{W}$  ist  $\mathbf{s}^{n+1} = P^\top \mathbf{s}^n \in \mathbb{W}$  der Übergangszustand.
- ▶ Mit Anfangszustand  $\mathbf{s}^0 \in \mathbb{W}$  ist  $\mathbf{s}^n = (P^\top)^n \mathbf{s}^0 \in \mathbb{W}$  der  $n$ te Zustand. Fürs Beispiel  $\mathbf{s}^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \hat{\mathbf{s}} = \langle \frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5} \rangle^\top$  (Gleichgewicht).

**Satz:** Für  $P \in \mathbb{S}$  mit  $P^n > 0, n > 1, \exists! \hat{\mathbf{s}} \in \mathbb{W}$ , wobei  $P^\top \hat{\mathbf{s}} = \hat{\mathbf{s}}$ , und  $(P^\top)^n \mathbf{e}_i \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \hat{\mathbf{s}}, \forall \mathbf{e}_i$  mit  $(\mathbf{e}_i)_j = \delta_{i,j}$ .

# Optimale Entscheidung

- ▶ Wie viel soll ein Käufer für die Firma kaufen?

- ▶ Größen:

$t$  = Zeit, im Intervall  $[0, 1]$

$u$  = Menge gekauft und sofort geliefert  
zu Beginn des Zeitintervalls

$Z$  = Nachfrage im Zeitintervall (Zufallsvariable)

$f$  = Wahrscheinlichkeitsdichte für  $Z$

$$P(Z \leq s) = \int_0^s f(z) dz, \quad Z \geq 0$$

$p$  = Einheitspreis

$c_0$  = Einheitskosten

$k$  = Fixkosten: Lieferung, Verwaltung

Ziel: Profit maximieren,  $\mathbb{E}[\text{Profit}] = ?$

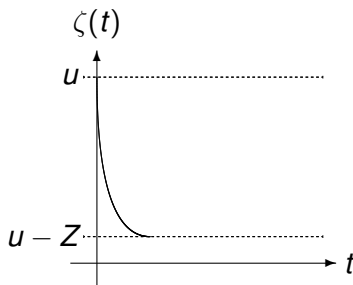
- ▶ Möglichkeiten für Erträge  $E$ :

- ganzes  $u$  verkauft,  $E = p \cdot u$
- $u - Z$  bleibt übrig,  $E = p \cdot Z$ .

- ▶ Es gibt Lagerungskosten falls  $u > Z$  gilt.

# Optimalen Warenkauf

- ▶ Sei  $\zeta(t)$  = Menge gelagert zur Zeit  $t$ ,  $\zeta(0) = u$ .
- ▶ Die gesamten Lagerungskosten sind  $c_1 \int_0^1 \zeta(t) dt$ .



z.B.

$t = 0$ : Anfang einer Woche

$t = 1$ : Ende der Woche

Sei  $\zeta(t) = \max\{u - g(t)Z, 0\}$ ,  
 $g(0) = 0$ ,  $g([0, 1]) \subset [0, 1]$ ,  
Konsumrate ist  $g'(t) \geq 0$ .

- ▶ Gesamtkosten sind

$$K(u, Z) = k + c_0 u + c_1 \int_0^1 \max\{u - g(t)Z, 0\} dt$$

- ▶ Erträge sind  $E(u, Z) = p \cdot \min\{u, Z\}$ .
- ▶ Der Profit  $P(u, Z) = E(u, Z) - K(u, Z)$  ist

$$P(u, Z) = p \cdot \max\{u, Z\} - k - c_0 u - c_1 \int_0^1 \max\{u - g(t)Z, 0\} dt$$

# Zielfunktion für den Warenkauf

- Die zu maximierende Zielfunktion ist (zu zeigen)

$$\begin{aligned} J(u) &= \mathbb{E}[P(u, Z)] = \mathbb{E}[E(u, Z)] - \mathbb{E}[K(u, Z)] = \\ &= \int_0^\infty \left[ p \cdot \min\{u, z\} - \left( k + c_0 u + c_1 \int_0^1 \max\{u - g(t)z, 0\} dt \right) \right] f(z) dz = \\ &= p \int_0^u z f(z) dz + p \int_u^\infty u f(z) dz - k - c_0 u - c_1 \int_0^1 \left[ \int_0^{u/g(t)} (u - g(t)z) f(z) dz \right] dt \end{aligned}$$

- Die Ableitung lässt sich schreiben, (zu zeigen)

$$\begin{aligned} J'(u) &= p \int_u^\infty f(z) dz - c_0 - c_1 \int_0^1 \int_0^{u/g(t)} f(z) dz dt \\ &= (p - c_0) - (p + c_1) \int_0^u f(z) dz - c_1 \int_0^1 \left[ \int_u^{u/g(t)} f(z) dz \right] dt \end{aligned}$$

- Für den Fall  $g(0) = 0$ ,  $g(t) = 1$ ,  $t > 0$ ,

$$J'(u) = (p - c_0) - (p + c_1) \int_0^u f(z) dz$$

# Maximierung der Zielfunktion

- Für diesen Fall erfüllt ein kritischer Wert  $u^*$

$$\int_0^{u^*} f(z) dz = \frac{p - c_0}{p + c_1}.$$

- Wahrscheinlichkeitsdichte? Möglichst einfach ist eine gleichmäßige Verteilung  $f(z) = \chi_{[0,U]}(z)/U$ . Dann aus

$$1 > \frac{p - c_0}{p + c_1} = \int_0^{u^*} f(z) dz = \frac{1}{U} \int_0^{u^*} \chi_{[0,U]}(z) dz = \begin{cases} u^*/U, & 0 \leq u^* \leq U \\ 1, & u^* > U \end{cases}$$

folgt

$$u^* = U(p - c_0)/(p + c_1).$$

- Mit einer Gauß-Verteilung  $f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^2} \exp[-\frac{(z-\mu)^2}{2\sigma^2}]$  und

$$\frac{p - c_0}{p + c_1} = \int_0^{u^*} f(z) dz = \frac{1}{2} \left[ \operatorname{erf} \left( \frac{\mu}{\sqrt{2}\sigma} \right) + \operatorname{erf} \left( \frac{u^* - \mu}{\sqrt{2}\sigma} \right) \right]$$

folgt

$$u^* = \mu - \sqrt{2}\sigma \operatorname{erf}^{-1} \left[ \operatorname{erf} \left( \frac{\mu}{\sqrt{2}\sigma} \right) - 2 \frac{p - c_0}{p + c_1} \right].$$

# Verteilungen von Teilchen

- ▶ Es werden hier Experimente konzipiert, in denen das Ergebnis sich aus Zufällen ergibt, aber es ist so hoch wahrscheinlich, dass es als gewiss betrachtet werden kann.
- ▶ Das Ziel dieser Modellierung ist, die Entstehung eines scheinbaren Determinismus aus einem fundamentalen Indeterminismus besser zu verstehen.
- ▶ Dabei steht der Zentrale Grenzwertsatz zentral im mathematischen Werkzeug.
- ▶ Zuerst werden Systeme im Gleichgewicht untersucht, und spielerische Beispiele mit Gelebohnen, Münzen und Würfeln werden eine hilfreiche Vorbereitung leisten.
- ▶ Dann werden Systeme von Teilchen im Gleichgewicht betrachtet, zuerst stationär und dann energetisch. So wird man die Boltzmann Verteilung kennenlernen.
- ▶ Schließlich werden dynamische Systeme von Teilchen betrachtet, und die Teilchendichte für Brownsche Bewegung und für Quantenmechanik wird modelliert.

# Geleebohnen im Glasgefäß

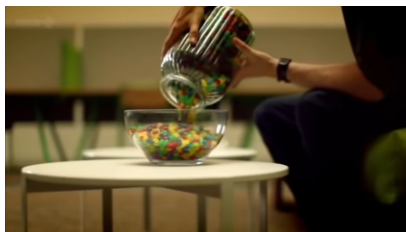
- ▶ Siehe das [Video](#).
- ▶ Sei  $X$  eine Zufallsvariable für eine beliebige Schätzung der Anzahl der Geleebohnen.
- ▶ Für eine beliebige Person in einer Menge  $\Omega$  sei

$$X : \Omega \rightarrow (0, \infty).$$

- ▶  $\Omega$  und  $M = (0, \infty)$  heißen Ergebnisraum bzw. Messraum.
- ▶ Sei  $\mu_X = 4510$ , d.h. der Erwartungswert ist die tatsächliche Anzahl der Geleebohnen im Glasgefäß. [Muss es so sein?](#)
- ▶ Sei  $\sigma_X^2$  die Varianz von  $X$  mit  $\sigma_X > 0$ . (Voraussetzung, ZGS)
- ▶ Es gelten  $|\mu_X|, \sigma_X < \infty$ . (Voraussetzungen, ZGS)
- ▶ Seien  $\{X_1, X_2, \dots\}$  unabhängige Zufallsproben, alle gleich verteilt wie  $X$ . (Voraussetzungen, ZGS)
- ▶ Die Zufallsvariable  $Y^{(n)} = X_1 + X_2 + \dots + X_n$  erfüllt:

$$\mu_{Y^{(n)}} = n\mu_X, \quad \sigma_{Y^{(n)}}^2 = n\sigma_X^2.$$

Warum?



# Geleebohnen im Glasgefäß

- Die Zufallsvariable

$$Z_n = \frac{Y^{(n)}/n - \mu_X}{\sigma_X/\sqrt{n}}$$

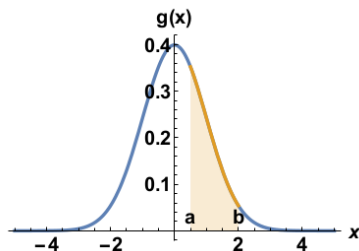
erfüllt:

Warum?

$$\mu_{Z_n} = 0, \quad \sigma_{Z_n}^2 = 1.$$

- Die Zufallsvariable  $Z \sim N(0, 1)$  sei normal verteilt mit

$$\mu_Z = 0, \quad \sigma_Z^2 = 1.$$



$$P(Z \in [a, b]) = \int_a^b g(x) dx$$

$$g(x) = e^{-x^2/2} / \sqrt{2\pi}$$

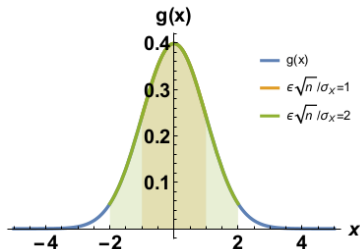
- Laut dem Zentralen Grenzwertsatz nähert sich die Verteilung von  $Z_n$  der Verteilung von  $Z$  an, wenn  $n \rightarrow \infty$ .



# Geleebohnen im Glasgefäß

- Es folgt  $\forall \epsilon > 0$ ,

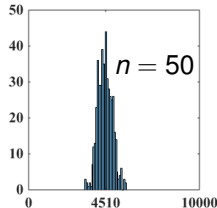
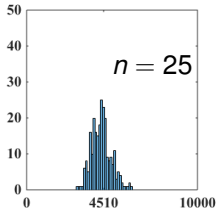
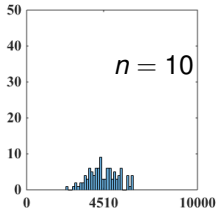
(Wie?)



$$P\left(\left|\frac{Y^{(n)}}{n} - \mu_X\right| \leq \epsilon\right) = P\left(|Z_n| \leq \frac{\epsilon\sqrt{n}}{\sigma_X}\right)$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} P\left(|Z| \leq \frac{\epsilon\sqrt{n}}{\sigma_X}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1.$$

- Für fixiertes  $n$  wird  $Y^{(n)}/n$  mehrmals geprobt und alle Proben mit Histogramm dargestellt. Für  $n \rightarrow \infty$  sehen diese so aus:

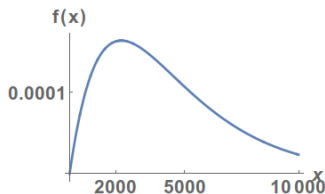


$$\text{d.h. } \forall \epsilon > 0, P(|Y^{(n)}/n - \mu_X| > \epsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

# Geleebohnen im Glasgefäß

- Sei die Zufallsvariable  $X$  modelliert mit der Wahrscheinlichkeitsdichte  $f$ ,

$$P(X \in [a, b]) = \int_a^b f(x) dx, \quad f(x) = \begin{cases} (x/\gamma^2) e^{-x/\gamma}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$



wobei  $\gamma = 4510/2$  wegen der Integrale

$$\mu_X = \int_0^\infty x f(x) dx = 2\gamma, \quad \sigma_X^2 = \int_0^\infty (x-2a)^2 f(x) dx = 2\gamma^2.$$

- Man merkt,  $f$  wird in  $\mu_X$  nicht maximiert!

## Geleebohnen im Glasgefäß

- Es gilt für  $Y^{(2)} = X_1 + X_2$ ,

$$\begin{aligned} P(a < X_1 + X_2 < b) &= \int_0^\infty P(a < x_1 + X_2 < b) f(x_1) dx_1 = \\ \int_0^\infty P(a - x_1 < X_2 < b - x_1) f(x_1) dx_1 &= \int_0^\infty \left[ \int_{a-x_1}^{b-x_1} f(x_2) dx_2 \right] f(x_1) dx_1 \\ \stackrel{\substack{y=x_1 \\ x=x_2+x_1}}{=} \int_0^\infty \left[ \int_a^b f(x-y) dx \right] f(y) dy &= \int_a^b \left[ \int_0^\infty f(x-y) f(y) dy \right] dx \end{aligned}$$

- Da  $f(x-y) = 0$  für  $x-y < 0$  d.h. für  $y > x$ , folgt

$$P(a < X_1 + X_2 < b) = \int_a^b \underbrace{\left[ \int_0^x f(x-y) f(y) dy \right]}_{=f^{(2)}(x)} dx$$

und daher ist die Dichte für  $Y^{(2)}$  gegeben durch

$$f^{(2)}(x) = \int_0^x f(x-y) f(y) dy = \frac{x^3 e^{-x/\gamma}}{3! \gamma^4}.$$

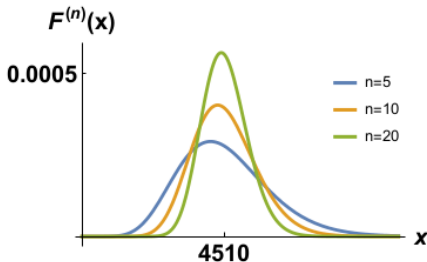
# Geleebohnen im Glasgefäß

- ▶ Ähnlich gilt für  $Y^{(n)} = X_1 + X_2 + \dots + X_n$

$$P(a < Y^{(n)} < b) = \int_a^b f^{(n)}(x) dx, \quad f^{(n)}(x) = \frac{x^{2n-1} e^{-x/\gamma}}{(2n-1)! \gamma^{2n}}$$

- ▶ Weiters gilt für  $Y^{(n)}/n$

$$\begin{aligned} P(a < Y^{(n)}/n < b) &= \int_{an}^{bn} f^{(n)}(x) dx \stackrel{x=nt}{=} \int_a^b \underbrace{nf^{(n)}(nt)}_{=F^{(n)}(t)} dt \\ P(an < Y^{(n)} < bn) &= \int_{an}^{bn} f^{(n)}(x) dx \end{aligned}$$



$$F^{(n)}(x) = \frac{n(nx)^{2n-1} e^{-nx/\gamma}}{(2n-1)! \gamma^{2n}}$$

und  $P(|Y^{(n)}/n - 4510| > \epsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \forall \epsilon > 0.$

## Geleebohnen im Glasgefäß

- ▶ Im [Video](#) sind Schätzungen  $\{x_1, \dots, x_n\}$  von  $n = 160$  Probanden gesammelt worden, und zwar mit dem Mittelwert  $(x_1 + \dots + x_n)/n \approx 4515$ .
- ▶ Laut dem Modell mit der Dichte  $f$  ist die Wahrscheinlichkeit dieses Ergebnisses gegeben durch:

$$P\left(\left|\frac{Y^{(160)}}{160} - 4510\right| \leq 5\right) = \int_{4505}^{4515} F^{(160)}(x) dx \approx 0.015819$$

- ▶ Für die Dichte  $f$  gelten  $\mu_X = 2\gamma = 4510$ ,  $\sigma_X = \sqrt{2}\gamma \approx 3189$ .
- ▶ Laut dem Zentralen Grenzwertsatz wird diese Wahrscheinlichkeit so approximiert,

$$P\left(\left|\frac{Y^{(160)}}{160} - 4510\right| \leq 5\right) \approx P\left(|Z| \leq \overbrace{\frac{5\sqrt{160}}{3189}}^{\approx 0.0198}\right) = \int_{-0.0198}^{+0.0198} \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx$$

- ▶ War das Ergebnis ein ziemlicher Glücksfall?  $\approx 0.015823$ .

# Viele Münzen Werfen

- ▶ Es wird ein Experiment mit ganz vielen Münzen konzipiert, das zu einer Folge von Histogrammen führt, wie für Geleebohnen gesehen.
- ▶ Sei  $X$  eine Zufallsvariable mit  $X(K) = 0$ ,  $X(Z) = 1$  und  $P(X = 0) = 1 - q$ ,  $P(X = 1) = q$ .
- ▶ Der Erwartungswert ist

$$\mu_X = \mathbb{E}(X) = P(X = 0) \cdot 0 + P(X = 1) \cdot 1 = q$$

und die Varianz ist

$$\begin{aligned}\sigma_X^2 = \mathbb{V}(X) = \mathbb{E}((X - \mu_X)^2) &= P(X = 0)(0 - q)^2 \\ &+ P(X = 1)(1 - q)^2 = q(1 - q)\end{aligned}$$

- ▶ Für das mehrmalige Spielen seien  $\{X_1, X_2, \dots\}$  Zufallsvariablen für das 1. Spiel, das 2. Spiel, usw.



# Viele Münzen werfen

- Diese seien gleich verteilt wie  $X$ ,

$$i = 1, 2, \dots \quad \begin{cases} P(X_i = 0) = P(X = 0) = 1 - q \\ P(X_i = 1) = P(X = 1) = q \end{cases}$$

mit

$$i = 1, 2, \dots \quad \begin{cases} \mu_{X_i} = \mu_X = q \\ \sigma_{X_i}^2 = \sigma_X^2 = q(1 - q) \end{cases}$$

- Weiters seien sie von einander unabhängig,

$$P(X_i = n \text{ \& } X_j = m) = P(X_i = n) \cdot P(X_j = m), \quad n, m \in \{0, 1\}, \quad i \neq j$$

- Deswegen gelten für  $Y^{(n)} = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y^{(n)}) &= \mathbb{E}(X_1) + \dots + \mathbb{E}(X_n) = n\mu_X \\ \mathbb{V}(Y^{(n)}) &= \mathbb{V}(X_1) + \dots + \mathbb{V}(X_n) = n\sigma_X^2 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y^{(n)}/n) &= \mathbb{E}(X_1/n) + \dots + \mathbb{E}(X_n/n) = \mu_X \\ \mathbb{V}(Y^{(n)}/n) &= \mathbb{V}(X_1/n) + \dots + \mathbb{V}(X_n/n) = \sigma_X^2/n. \end{aligned}$$

# Viele Münzen werfen

- Weiters gelten

(Wie?)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\frac{Y^{(n)}/n - \mu_{Y^{(n)}}}{\sigma_{Y^{(n)}}}\right) &= \mathbb{E}\left(\frac{Y^{(n)}/n}{\sigma_{Y^{(n)}}}\right) - \mathbb{E}\left(\frac{\mu_{Y^{(n)}}}{\sigma_{Y^{(n)}}}\right) = \frac{\mu_X}{\sigma_X/\sqrt{n}} - \frac{\mu_X}{\sigma_X/\sqrt{n}} = 0 \\ \mathbb{V}\left(\frac{Y^{(n)}/n - \mu_{Y^{(n)}}}{\sigma_{Y^{(n)}}}\right) &= \frac{1}{\sigma_{Y^{(n)}}^2} \mathbb{V}(Y^{(n)}/n) = \frac{\sigma_X^2/n}{\sigma_X^2/n} = 1.\end{aligned}$$

- Die Zufallsvariable

$$Z_n = \frac{Y^{(n)}/n - \mu_X}{\sigma_X/\sqrt{n}}$$

erfüllt:

Warum?

$$\mu_{Z_n} = 0, \quad \sigma_{Z_n}^2 = 1.$$

- Die Zufallsvariable  $Z \sim N(0, 1)$  sei normal verteilt mit

$$P(Z \in [a, b]) = \int_a^b g(x) dx, \quad g(x) = e^{-x^2/2} / \sqrt{2\pi}$$

$$\mu_Z = 0, \quad \sigma_Z^2 = 1.$$



# Viele Münzen werfen

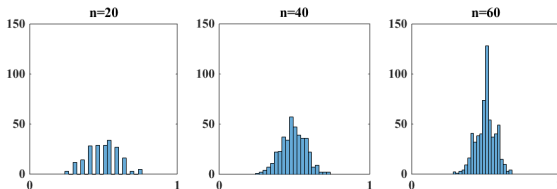
- ▶ Laut dem Zentralen Grenzwertsatz nähert sich die Verteilung von  $Z_n$  der Verteilung von  $Z$  an, wenn  $n \rightarrow \infty$ .
- ▶ Es folgt  $\forall \epsilon > 0$ ,

Wie?

$$P\left(\left|\frac{Y^{(n)}}{n} - \mu_X\right| \leq \epsilon\right) = P\left(|Z_n| \leq \frac{\epsilon\sqrt{n}}{\sigma_X}\right)$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} P\left(|Z| \leq \frac{\epsilon\sqrt{n}}{\sigma_X}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1.$$

- ▶ Je größer  $n$  ist, desto weniger ist die Streuung.



# Viele Münzen werfen

- Man **bestätigt**, mit der Bernoulli Verteilung für  $X$  hat  $Y^{(n)} = X_1 + \dots + X_n$  die Binomial Verteilung

$$P(Y^{(n)} = m) = \binom{n}{m} q^m (1 - q)^{n-m}$$

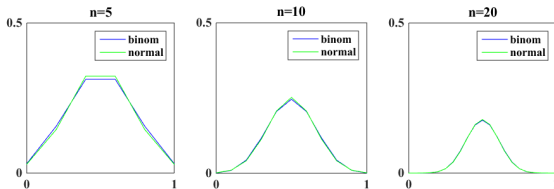
- Mit  $q = 1/2$  wird diese Verteilung in  $m = n/2$  maximiert.
- Mit der Formel von Stirling,

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} (n/e)^n, \quad n \rightarrow \infty$$

folgt nach Vereinfachung

$$P(Y^{(n)} = n/2) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n}{2\pi(n/2)(n - n/2)}} \frac{n^n}{(n/2)^{n/2} (n - n/2)^{n - n/2}} 2^{-n} = \sqrt{\frac{2}{\pi n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

- Je größer  $n$  ist, desto ähnlicher sind die Verteilungen.



# Viele Würfel Werfen

- ▶ Es wird ein Experiment mit ganz vielen Würfeln konzipiert, das zu einer Folge von Histogrammen führt, wie schon bei den vorigen Beispielen gesehen.



- ▶ Seien  $S_1, \dots, S_6$  die Augenzahlen  $1, \dots, 6$  für eine Würfel.
- ▶ Sei  $X$  eine Zufallsvariable mit

$$\text{und} \quad X(S_1) = 1, \quad \dots, \quad X(S_6) = 6$$

$$P(X = 1) = \dots = P(X = 6) = \frac{1}{6}, \quad P(X \notin \{1, \dots, 6\}) = 0$$

- ▶ Der Erwartungswert ist

$$\mu_X = \mathbb{E}(X) = P(X = 1) \cdot 1 + \dots + P(X = 6) \cdot 6 = \frac{7}{2}$$

und die Varianz ist

$$\sigma_X^2 = \mathbb{V}(X) = P(X = 1) \cdot \left(\frac{7}{2} - 1\right)^2 + \dots + P(X = 6) \cdot \left(\frac{7}{2} - 6\right)^2 = \frac{35}{12}$$

## Viele Würfel werfen

- ▶ Für das mehrmalige Spielen seien  $\{X_1, X_2, \dots\}$  Zufallsvariablen für die 1. Würfel, die 2. Würfel, usw.
- ▶ Diese seien gleich verteilt wie  $X$ ,

$$P(X_i = m) = P(X = m) = \frac{1}{6}, \quad m \in \{1, \dots, 6\}, \quad i = 1, 2, \dots$$

mit

$$i = 1, 2, \dots \quad \left\{ \begin{array}{l} \mu_{X_i} = \mu_X = \frac{7}{2} \\ \sigma_{X_i}^2 = \sigma_X^2 = \frac{35}{12} \end{array} \right.$$

- ▶ Weiters seien sie von einander unabhängig,

$$P(X_i = n \text{ \& } X_j = m) = P(X_i = n) \cdot P(X_j = m), \quad n, m \in \{1, \dots, 6\}, \quad i \neq j$$

- ▶ Deswegen gelten für  $Y^{(n)} = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ ,

$$\mathbb{E}(Y^{(n)}) = \mathbb{E}(X_1) + \dots + \mathbb{E}(X_n) = n\mu_X$$

$$\mathbb{V}(Y^{(n)}) = \mathbb{V}(X_1) + \dots + \mathbb{V}(X_n) = n\sigma_X^2$$

und

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y^{(n)}/n) &= \mathbb{E}(X_1/n) + \dots + \mathbb{E}(X_n/n) = \mu_X \\ \mathbb{V}(Y^{(n)}/n) &= \mathbb{V}(X_1/n) + \dots + \mathbb{V}(X_n/n) = \sigma_X^2/n. \end{aligned}$$

# Viele Würfel werfen

- ▶ Weiters gelten

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\frac{Y^{(n)}/n - \mu_{Y^{(n)}}}{\sigma_{Y^{(n)}}}\right) &= \mathbb{E}\left(\frac{Y^{(n)}/n}{\sigma_{Y^{(n)}}}\right) - \mathbb{E}\left(\frac{\mu_{Y^{(n)}}}{\sigma_{Y^{(n)}}}\right) = \frac{\mu_X}{\sigma_X/\sqrt{n}} - \frac{\mu_X}{\sigma_X/\sqrt{n}} = 0 \\ \mathbb{V}\left(\frac{Y^{(n)}/n - \mu_{Y^{(n)}}}{\sigma_{Y^{(n)}}}\right) &= \frac{1}{\sigma_{Y^{(n)}}^2} \mathbb{V}(Y^{(n)}/n) = \frac{\sigma_X^2/n}{\sigma_X^2/n} = 1.\end{aligned}$$

- ▶ Die Zufallsvariable

$$Z_n = \frac{Y^{(n)}/n - \mu_X}{\sigma_X/\sqrt{n}}$$

erfüllt:

$$\mu_{Z_n} = 0, \quad \sigma_{Z_n}^2 = 1.$$

- ▶ Die Zufallsvariable  $Z \sim N(0, 1)$  sei normal verteilt mit

$$\begin{aligned}P(Z \in [a, b]) &= \int_a^b g(x) dx, \quad g(x) = e^{-x^2/2} / \sqrt{2\pi} \\ \mu_Z &= 0, \quad \sigma_Z^2 = 1.\end{aligned}$$

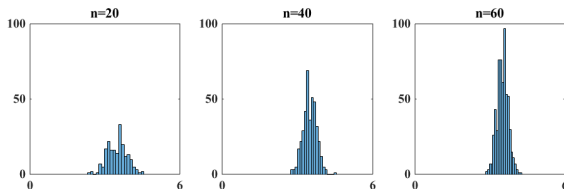
- ▶ Laut dem Zentralen Grenzwertsatz nähert sich die Verteilung von  $Z_n$  der Verteilung von  $Z$  an, wenn  $n \rightarrow \infty$ .

# Viele Würfel werfen

- Es folgt  $\forall \epsilon > 0$ ,

$$P\left(\left|\frac{Y^{(n)}}{n} - \mu_X\right| \leq \epsilon\right) = P\left(|Z_n| \leq \frac{\epsilon\sqrt{n}}{\sigma_X}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P\left(|Z| \leq \frac{\epsilon\sqrt{n}}{\sigma_X}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1.$$

- Je größer  $n$  ist, desto weniger ist die Streuung.



- Das Ergebnis  $(Y^{(2)} = m)$  lässt sich so darstellen,

$$\begin{aligned} (Y^{(2)} = m) &= (Y^{(1)} = m - 1 \text{ und } X_2 = 1) \\ &\text{oder } (Y^{(1)} = m - 2 \text{ und } X_2 = 2) \\ &\text{oder } \dots \\ &\text{oder } (Y^{(1)} = m - 6 \text{ und } X_2 = 6). \end{aligned}$$

## Viele Würfel werfen

- ▶ Da die Ereignisse  $(X_2 = i)$ ,  $i = 1, \dots, 6$ , disjunkt sind, gilt

$$\begin{aligned}P(Y^{(2)} = m) &= P(Y^{(1)} = m - 1 \text{ und } X_2 = 1) \\&+ P(Y^{(1)} = m - 2 \text{ und } X_2 = 2) \\&+ \dots \\&+ P(Y^{(1)} = m - 6 \text{ und } X_2 = 6).\end{aligned}$$

- ▶ Da die Würfe unabhängig sind, gilt

$$\begin{aligned}P(Y^{(2)} = m) &= P(Y^{(1)} = m - 1) \cdot P(X_2 = 1) \\&+ P(Y^{(1)} = m - 2) \cdot P(X_2 = 2) \\&+ \dots \\&+ P(Y^{(1)} = m - 6) \cdot P(X_2 = 6)\end{aligned}$$

- ▶ Daher gilt für  $2 \leq m \leq 6 \cdot 2$ ,

$$P(Y^{(2)} = m) = \left[ P(Y^{(1)} = m - 1) + \dots + P(Y^{(1)} = m - 6) \right] / 6.$$

- ▶ **Ähnlich** für jedes  $n$  gilt für  $n \leq m \leq 6n$ ,

$$P(Y^{(n+1)} = m) = \left[ P(Y^{(n)} = m - 1) + \dots + P(Y^{(n)} = m - 6) \right] / 6.$$

# Viele Würfel werfen

- $P(Y^{(n)} = m)$  wird in  $m^* = \lfloor 7n/2 \rfloor$  maximiert. Man bestätigt

$$P(Y^{(n)} = m) = 0, \quad m = 1, \dots, n-1$$

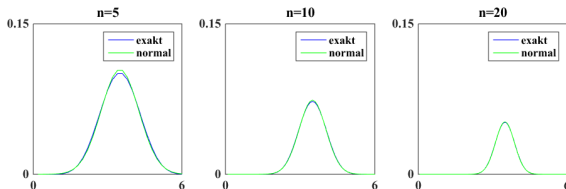
$$P(Y^{(n)} = m) > 0, \quad m = n, \dots, 6n$$

$$P(Y^{(n)} = m) = P(Y^{(n)} = 7n - m), \quad m = n, \dots, m^*$$

$$P(Y^{(n)} = m) \text{ ist } \begin{cases} \text{steigend,} & m = n-1, \dots, m^* \\ \text{fallend,} & m = \begin{cases} m^*, & n \text{ gerade} \\ m^* + 1, & n \text{ ungerade} \end{cases}, \dots, 6n \end{cases}$$

und  $P(Y^{(n)} = m^*) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ .

- Je größer  $n$  ist, desto ähnlicher sind die Verteilungen.





# Viele Teilchen Zerfallen

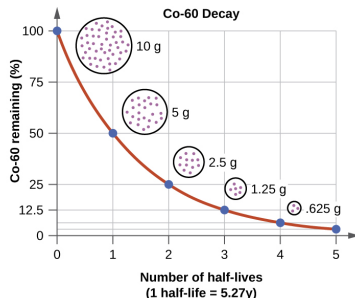
- ▶ Es wird ein Experiment mit ganz vielen zerfallenden Teilchen konzipiert, das zu einer Folge von Histogrammen führt, wie bei den bisherigen Beispielen gesehen.
- ▶ Überlege den Zerfall eines zufälligen Teilchens im Zeitintervall  $[0, t]$ .
- ▶ Sei  $X(t)$  eine Zufallsvariable mit

keinen Zerfall in  $[0, t]$  :  $X(t) = 0$

Zerfall in  $[0, t]$  :  $X(t) = 1$

- ▶ Wenn das Teilchen kein Gedächtnis hat, gilt

$$P(X(s+t) = 0 | X(s) = 0) = P(X(t) = 0).$$



## Viele Teilchen zerfallen

- ▶ Durch die Regel von Bayes gilt

$$P(X(s+t) = 0 | X(s) = 0) = \frac{P(X(s+t) = 0 \text{ \& } X(s) = 0)}{P(X(s) = 0)} = \frac{P(X(s+t) = 0)}{P(X(s) = 0)}.$$

- ▶ Zusammengefasst erfüllt die Überlebensfunktion

$$S(t) = P(X(t) = 0), \quad S(t)S(s) = S(s+t).$$

- ▶ Mit  $S(0) = P(X(0) = 0) = 1$  folgt aus Gedächtnislosigkeit

$$\frac{S(t+dt) - S(t)}{dt} = \frac{S(t)S(dt) - S(t)S(0)}{dt} = S(t) \frac{S(dt) - S(0)}{dt}.$$

- ▶ Mit  $\lambda = -S'(0)/S(0) = -S'(0)$  und  $dt \rightarrow 0$  ergibt sich

$$S'(t) = -\lambda S(t), \quad S(0) = 1.$$

- ▶ Die Lösung führt zu der exponentiellen Verteilung

$$P(X(t) = 0) = e^{-\lambda t}, \quad P(X(t) = 1) = 1 - e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0.$$

- ▶ Man **bestätigt**, die Gedächtnislosigkeitsbedingung wird erfüllt.

# Viele Teilchen zerfallen

- Der Erwartungswert ist

$$\mu_{X(t)} = \mathbb{E}(X(t)) = P(X(t) = 0) \cdot 0 + P(X(t) = 1) \cdot 1 = 1 - e^{-\lambda t}$$

und die Varianz ist  $\mathbb{V}(X(t)) = \mathbb{E}((X(t) - \mu_{X(t)})^2) =$

$$\begin{aligned}\sigma_{X(t)}^2 &= P(X(t) = 0)(1 - e^{-\lambda t} - 0)^2 \\ &+ P(X(t) = 1)(1 - e^{-\lambda t} - 1)^2 = \dots = (1 - e^{-\lambda t})e^{-\lambda t}\end{aligned}$$

- Für mehrere Teilchen seien  $\{X_1(t), X_2(t), \dots\}$  Zufallsvariablen für das 1. Teilchen, das 2. Teilchen, usw.
- Diese seien gleich verteilt wie  $X(t)$ ,

$$i = 1, 2, \dots \quad \begin{cases} P(X_i(t) = 0) = P(X(t) = 0) = e^{-\lambda t} \\ P(X_i(t) = 1) = P(X(t) = 1) = 1 - e^{-\lambda t} \end{cases}$$

mit

$$i = 1, 2, \dots \quad \begin{cases} \mu_{X_i(t)} = \mu_{X(t)} = 1 - e^{-\lambda t} \\ \sigma_{X_i(t)}^2 = \sigma_{X(t)}^2 = (1 - e^{-\lambda t})e^{-\lambda t} \end{cases}$$

# Viele Teilchen zerfallen

- ▶ Weiters seien sie von einander unabhängig, d.h. für  $i \neq j$ ,

$$P(X_i(t) = n \& X_j(t) = m) = P(X_i(t) = n) \cdot P(X_j(t) = m), \quad n, m \in \{0, 1\}.$$

- ▶ Deswegen gelten für  $Y^{(n)}(t) = X_1(t) + X_2(t) + \dots + X_n(t)$ ,

$$\mathbb{E}(Y^{(n)}(t)) = \mathbb{E}(X_1(t)) + \dots + \mathbb{E}(X_n(t)) = n\mu_{X(t)}$$

$$\mathbb{V}(Y^{(n)}(t)) = \mathbb{V}(X_1(t)) + \dots + \mathbb{V}(X_n(t)) = n\sigma_{X(t)}^2$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y^{(n)}(t)/n) &= \mathbb{E}(X_1(t)/n) + \dots + \mathbb{E}(X_n(t)/n) = \mu_{X(t)} \\ \mathbb{V}(Y^{(n)}(t)/n) &= \mathbb{V}(X_1(t)/n) + \dots + \mathbb{V}(X_n(t)/n) = \sigma_{X(t)}^2/n.\end{aligned}$$

- ▶ Weiters gelten

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\frac{Y^{(n)}(t)/n - \mu_{Y^{(n)}(t)}}{\sigma_{Y^{(n)}(t)}}\right) &= \mathbb{E}\left(\frac{Y^{(n)}(t)/n}{\sigma_{Y^{(n)}(t)}}\right) - \mathbb{E}\left(\frac{\mu_{Y^{(n)}(t)}}{\sigma_{Y^{(n)}(t)}}\right) = \frac{\mu_{X(t)}}{\sigma_{X(t)}/\sqrt{n}} - \frac{\mu_{X(t)}}{\sigma_{X(t)}/\sqrt{n}} = 0 \\ \mathbb{V}\left(\frac{Y^{(n)}(t)/n - \mu_{Y^{(n)}(t)}}{\sigma_{Y^{(n)}(t)}}\right) &= \frac{1}{\sigma_{Y^{(n)}(t)}^2} \mathbb{V}(Y^{(n)}(t)/n) = \frac{\sigma_{X(t)}^2/n}{\sigma_{X(t)}^2/n} = 1.\end{aligned}$$

# Viele Teilchen zerfallen

- Die Zufallsvariable

$$Z_n(t) = \frac{Y^{(n)}(t)/n - \mu_{X(t)}}{\sigma_{X(t)}/\sqrt{n}}$$

erfüllt:

$$\mu_{Z_n(t)} = 0, \quad \sigma_{Z_n(t)}^2 = 1.$$

- Die Zufallsvariable  $Z \sim N(0, 1)$  sei normal verteilt mit

$$P(Z \in [a, b]) = \int_a^b g(x) dx, \quad g(x) = e^{-x^2/2} / \sqrt{2\pi}$$

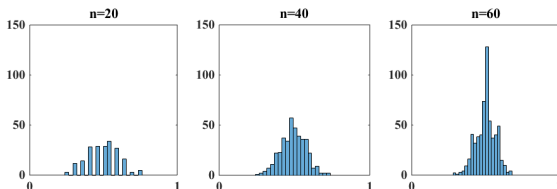
$$\mu_Z = 0, \quad \sigma_Z^2 = 1.$$

- Laut dem Zentralen Grenzwertsatz nähert sich die Verteilung von  $Z_n(t)$  der Verteilung von  $Z$  an, wenn  $n \rightarrow \infty$ .
- Es folgt  $\forall \epsilon > 0$ ,

$$P\left(\left|\frac{Y^{(n)}(t)}{n} - \mu_{X(t)}\right| \leq \epsilon\right) = P\left(|Z_n(t)| \leq \frac{\epsilon\sqrt{n}}{\sigma_{X(t)}}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P\left(|Z| \leq \frac{\epsilon\sqrt{n}}{\sigma_{X(t)}}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1.$$

# Viele Teilchen zerfallen

- Je größer  $n$  ist, desto weniger ist die Streuung.



- Man **bestätigt**, mit der Bernoulli Verteilung für  $X(t)$  hat  $Y^{(n)}(t) = X_1(t) + \dots + X_n(t)$  die Binomial Verteilung

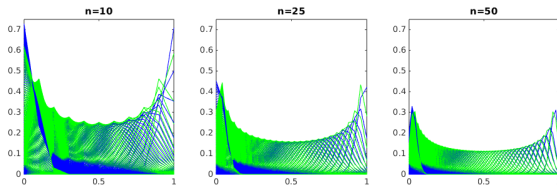
$$P(Y^{(n)}(t) = m) = \binom{n}{m} (1 - e^{-\lambda t})^m (e^{-\lambda t})^{n-m}$$

- Bei der Halbwertszeit  $\hat{t} = \log(2)/\lambda$  wird in  $m = n/2$  maximiert.
- Mit der Formel von Stirling,  $n! \approx \sqrt{2\pi n}(n/e)^n$ ,  $n \rightarrow \infty$  folgt nach Vereinfachung

$$P(Y^{(n)}(\hat{t}) = n/2) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n}{2\pi(n/2)(n - n/2)}} \frac{n^n}{(n/2)^{n/2} (n - n/2)^{n-n/2}} 2^{-n} = \sqrt{\frac{2}{\pi n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

# Viele Teilchen zerfallen

- ▶ Je größer  $n$  ist, desto ähnlicher sind die Verteilungen: unten **Binomial** und **Normal**, für  $t = 0$  (rechts),  $\dots$ ,  $T$  (links).
- ▶ Da die Wahrscheinlichkeit des Zerfallens später höher wird, liegen die Maxima anfänglich rechts, und sie bewegen sich nach links.



- ▶ Man **bestätigt**,  $p_k(t) = P(Y^{(n)}(t) = k)$  erfüllen  $p_0(t) = e^{-\lambda nt}$ ,  
$$p'_k(t) = \lambda(n - k + 1)p_{k-1}(t) - \lambda(n - k)p_k(t), \quad k = 1, \dots, n$$
und dieses System entspricht keinem Poisson-Prozess, der folgendermaßen in Zusammenhang mit radioaktivem Zerfall verwendet wird.

## Viele Teilchen zerfallen

- Die Wartezeit bis ein einziges Teilchen zerfällt sei mit der Zufallsvariable  $T$  bezeichnet. Wegen Gedächtnislosigkeit

$$P(T > t + s \mid T > s) = P(T > t)$$

und wie vorher mit  $S(t) = P(T > t)$  und  $\lambda = -S'(0)$ ,

$$P(T > t) = e^{-\lambda t} = \int_t^{\infty} f(s) ds, \quad f(t) = \lambda e^{-\lambda t}.$$

- Bei einem *homogenen* Poisson-Prozess hängt die durchschnittliche Ereignisrate von der Zeit nicht ab.
- Mit der Regel von Bayes ergibt sich die nutzbare Formel,

$$\begin{aligned} P(T \in [t_1, t_2] \mid T > t_1) &= \frac{P(T \in [t_1, t_2] \ \& \ T > t_1)}{P(T > t_1)} = \\ \frac{P(T \in [t_1, t_2])}{P(T > t_1)} &= \frac{e^{-\lambda t_2} - e^{-\lambda t_1}}{e^{-\lambda t_1}} = 1 - e^{-\lambda(t_2 - t_1)}. \end{aligned} \quad (\star)$$

- Für eine praktisch unendlich große Population sei  $N(\tau)$  die Anzahl der Teilchen, die in einem Zeitintervall der Länge  $\tau$  zerfallen. Sei  $p_k(\tau) = P(N(\tau) = k)$ ,  $k \in \mathbb{N}_0$ .



# Viele Teilchen zerfallen

- ▶ Um die Verteilung für  $\{p_k\}$  zu bestimmen wird zur Kenntnis genommen,  $k$  Zerfallsereignisse im Zeitintervall  $[0, \tau]$  verlangen
  - ▶  $k - 1$  Ereignisse in einem Zeitintervall  $[0, s] \subset [0, \tau)$  mit
$$P(N(s) = k - 1) = p_{k-1}(s)$$
  - ▶ 1 Ereignis in einem Zeitintervall  $[s, s + ds]$ , und zwar mit  $(\star)$ 
$$P(N(s + ds) = k \mid N(s) = k - 1) = P(T \in [s, s + ds] \mid T > s) \\ = 1 - e^{-\lambda ds} = \lambda ds + o(ds)$$
  - ▶ 0 Ereignisse in einem Zeitintervall  $[s + ds, \tau]$ , und zwar mit  $(\star)$ 
$$P(N(\tau) = k \mid N(s + ds) = k) = P(T > \tau \mid T > s + ds) \\ = 1 - P(T \in (s + ds, \tau] \mid T > s + ds) = e^{-\lambda(\tau-s)} + o(ds).$$
- ▶ Da diese unabhängig sind, ist die Wahrscheinlichkeit der Vereinigung durch das Produkt gegeben, integriert über alle Zwischenzeiten  $s$ ,

$$p_k(\tau) = \int_0^\tau p_{k-1}(s)(\lambda ds)e^{-\lambda(\tau-s)} = e^{-\lambda\tau} \int_0^\tau p_{k-1}(s)\lambda e^{\lambda s} ds, \quad k \in \mathbb{N}.$$

# Viele Teilchen zerfallen

- ▶ Es ergibt sich durch Ableiten

$$p'_k(\tau) = -\lambda e^{-\lambda\tau} \int_0^\tau p_{k-1}(s) \lambda e^{\lambda s} ds + e^{-\lambda\tau} \lambda p_{k-1}(\tau) e^{+\lambda\tau} \lambda$$

oder

$$p'_k(\tau) = -\lambda p_k(\tau) + \lambda p_{k-1}(\tau), \quad k \in \mathbb{N}.$$

- ▶ Für den Fall  $k = 0$  folgt  $p'_0(\tau) = -\lambda p_0(\tau)$  aus

$$p_0(\tau) = P(N(\tau) = 0 \text{ in } [0, \tau]) = P(T > \tau) = e^{-\lambda\tau},$$

- ▶ Da es keine Ereignisse in Null Zeit geben kann, gilt für  $\tau = 0$ ,

$$p_0(0) = 1, \quad p_k(0) = 0, \quad k \in \mathbb{N}.$$

- ▶ Die Lösung des unendlichen Systems ist

$$P(N(\tau) = k) = p_k(\tau) = \frac{(\lambda\tau)^k}{k!} e^{-\lambda\tau}, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

- ▶ Man **bestätigt**, der Erwartungswert erfüllt  $\mathbb{E}(N(\tau)) = \lambda\tau$ .
- ▶ Lineares Wachstum ist adäquat nur für  $\tau \ll \hat{t} = \ln(2)/\lambda$ !

## Viele Teilchen zerfallen

- ▶ Um eine Rettung von diesem Problem mit linearem Wachstum zu basteln, wird ein *nicht* homogener Poisson-Prozess überlegt, bei dem die durchschnittliche Ereignisrate von Zeit abhängt.
- ▶ Mit  $S(t) = P(T > t)$  und

$$\lambda(t) = -\frac{S'(t)}{S(t)} = -\frac{d}{dt} \ln(S(t))$$

folgt  $S(t_2) = S(t_1) \exp[-\int_{t_1}^{t_2} \lambda(t) dt]$ .

- ▶ Man **bestätigt**,

$$S(t_2 - t_1) \neq S(t_2)/S(t_1)$$

und daher wird die Bedingung der Gedächtnislosigkeit nicht erfüllt!

- ▶ Mit  $S(0) = 1$  folgt  $P(T > t) =$

$$\exp\left[-\int_0^t \lambda(t) dt\right] = \int_t^\infty f(s) ds, \quad f(t) = \lambda(t) \exp\left[-\int_0^t \lambda(s) ds\right] ds$$

# Viele Teilchen zerfallen

- ▶ Mit der Regel von Bayes ergibt sich die nutzbare Formel,

$$\begin{aligned}P(T \in [t_1, t_2] \mid T > t_1) &= \frac{P(T \in [t_1, t_2] \ \& \ T > t_1)}{P(T > t_1)} = \frac{P(T \in [t_1, t_2])}{P(T > t_1)} \\&= 1 - \exp \left[ - \int_{t_1}^{t_2} \lambda(s) ds \right].\end{aligned}\tag{*}$$

- ▶ Für eine praktisch unendlich große Population sei  $N(\tau)$  die Anzahl der Teilchen, die in einem Zeitintervall der Länge  $\tau$  zerfallen. Sei  $p_k(\tau) = P(N(\tau) = k)$ ,  $k \in \mathbb{N}_0$ .
- ▶ Um die Verteilung für  $\{p_k\}$  zu bestimmen wird zur Kenntnis genommen,  $k$  Zerfallsereignisse im Zeitintervall  $[0, \tau]$  verlangen
  - ▶  $k - 1$  Ereignisse in einem Zeitintervall  $[0, s] \subset [0, \tau)$  mit
$$P(N(s) = k - 1) = p_{k-1}(s)$$
  - ▶ 1 Ereignis in einem Zeitintervall  $[s, s + ds]$ , und zwar mit (\*)
$$\begin{aligned}P(N(s + ds) = k \mid N(s) = k - 1) &= P(T \in [s, s + ds] \mid T > s) \\&= 1 - \exp \left[ - \int_s^{s+ds} \lambda(r) dr \right] = \lambda(s) ds + o(ds)\end{aligned}$$
  - ▶ 0 Ereignisse in einem Zeitintervall  $[s + ds, \tau]$ , und zwar mit (\*)
$$\begin{aligned}P(N(\tau) = k \mid N(s + ds) = k) &= P(T > \tau \mid T > s + ds) = \\1 - P(T \in (s + ds, \tau] \mid T > s + ds) &= \exp \left[ - \int_s^\tau \lambda(r) dr \right] + o(ds).\end{aligned}$$

## Viele Teilchen zerfallen

- ▶ Da diese unabhängig sind, ist die Wahrscheinlichkeit der Vereinigung durch das Produkt gegeben, integriert über alle Zwischenzeiten  $s$ ,

$$p_k(\tau) = \int_0^\tau p_{k-1}(s)(\lambda(s)ds) \exp \left[ - \int_s^\tau \lambda(r)dr \right] = \\ \exp \left[ - \int_0^\tau \lambda(r)dr \right] \int_0^\tau p_{k-1}(s)\lambda(s) \exp \left[ \int_0^s \lambda(r)dr \right] ds, \quad k \in \mathbb{N}.$$

- ▶ Es ergibt sich durch Ableiten,

$$p'_k(\tau) = -\lambda(\tau) \exp \left[ - \int_0^\tau \lambda(r)dr \right] \int_0^\tau p_{k-1}(s)\lambda(s) \exp \left[ \int_0^s \lambda(r)dr \right] \\ + \exp \left[ - \int_0^\tau \lambda(r)dr \right] p_{k-1}(\tau)\lambda(\tau) \exp \left[ \int_0^\tau \lambda(r)dr \right]$$

oder

$$p'_k(\tau) = -\lambda(\tau)p_k(\tau) + \lambda(\tau)p_{k-1}(\tau), \quad k \in \mathbb{N}.$$

# Viele Teilchen zerfallen

- Für den Fall  $k = 0$  folgt  $p'_0(\tau) = -\lambda(\tau)p_0(\tau)$  aus

$$p_0(\tau) = P(N(\tau) = 0 \text{ in } [0, \tau]) = P(T > \tau) = \exp \left[ - \int_0^\tau \lambda(s) ds \right].$$

- Da es keine Ereignisse in Null Zeit geben kann, gilt für  $\tau = 0$ ,

$$p_0(0) = 1, \quad p_k(0) = 0, \quad k \in \mathbb{N}.$$

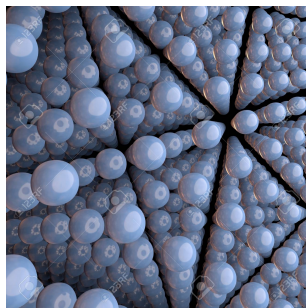
- Die Lösung dieses unendlichen Systems ist

$$P(N(\tau) = k) = p_k(\tau) = \exp \left[ - \int_0^\tau \lambda(s) ds \right] \times \\ \left\{ \int_0^\tau ds_1 \lambda(s_1) \int_0^{s_1} ds_2 \lambda(s_2) \cdots \int_0^{s_{k-1}} ds_k \lambda(s_k) \right\}, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

- Man **bestätigt**, der Erwartungswert erfüllt  $\mathbb{E}(N(\tau)) = \int_0^\tau \lambda(s) ds$ .
- Mit einer vermuteten Form  $1 - e^{-\mu\tau} = \mathbb{E}[N(\tau)]/\mathbb{E}[N(\infty)]$  folgt  $\lambda(t) = \nu\mu e^{-\mu t}$  wobei  $\nu = \mathbb{E}(N(\infty))$ , aber eine unendliche Anzahl von Teilchen ist angenommen worden!
- Fazit: Das Bernoulli-Modell passt am besten.

# Viele stationäre Teilchen in einem Behälter

- ▶ Seien ganz viele Teilchen und ein Behälter gegeben, wobei der Behälter in ganz vielen Bins unterteilt ist.
- ▶ Siehe das [Video](#) mit der derzeitigen Vorstellungen, dass alle Teilchen auf den Boden fallen. Im nächsten Abschnitt bleiben sie im energetischen Gleichgewicht.
- ▶ Sei es gleich wahrscheinlich, dass ein beliebiges Bin mit einem beliebigen Teilchen besetzt wird.
- ▶ Es wird die Verteilung von  $n$  Teilchen in  $k$  Bins bestimmt, die am wahrscheinlichsten ist.
- ▶ Diese ist auch die Erwartungsverteilung, der von Verteilungen eines Zufallsexperiments für  $n$  immer größer angenähert wird.



# Viele stationäre Teilchen in einem Behälter

- ▶ Sei  $\Omega = \{B_1, B_2, \dots, B_k\}$  das Ergebnisraum mit den möglichen Orten der Teilchen.
- ▶ Seien die Teilchen mit  $\{T_1, T_2, \dots, T_n\}$  markiert.
- ▶ Für ein zufälliges Teilchen  $T$  sei  $X_i : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$  eine Zufallsvariable mit  $X_i(T \text{ in } B_l) = \delta_{i,l}$ .
- ▶ Mit  $X_1 + \dots + X_k = 1$  sind  $\{X_1, \dots, X_k\}$  korreliert, wie z.B. mit  $K$  und  $Z$  ( $k = 2$ ) im Münzenspiel.
- ▶ Für das  $j$ te Teilchen sei  $X_{i,j} : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$  eine Zufallsvariable mit  $X_{i,j}(T_j \text{ in } B_l) = \delta_{i,l}$ .
- ▶ Weil die Teilchen unabhängig von einander Platz finden, sind  $\{X_{i,1}, \dots, X_{i,n}\}$  für fixiertes  $i$  unabhängig.
- ▶ Sei die Zufallsvariable  $Y_i^{(n)} = X_{i,1} + \dots + X_{i,n}$  die Anzahl der  $n$  Teilchen im  $i$ ten Bin.
- ▶ Es wird gezeigt,  $P(|Y_i^{(n)}/n - 1/k| \leq \epsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1, \forall \epsilon > 0$ .
- ▶ Das Experiment kann mit Histogrammen dargestellt werden, die sich den vorherigen ähneln.



## Viele stationäre Teilchen in einem Behälter

- Für ein beliebiges Teilchen sei  $X_i$  eine Zufallsvariable mit

$$\begin{aligned}\text{Teilchen im Bin } i: & \quad X_i = 1 \\ \text{Teilchen nicht im Bin } i: & \quad X_i = 0\end{aligned}$$

$$P(X_i = 0) = 1 - q_i, \quad P(X_i = 1) = q_i, \quad q_1 + \dots + q_k = 1.$$

- Man **bestätigt** für  $\mathbf{X} = \{X_1, \dots, X_k\}$ ,

$$\mu_{\mathbf{X}} = \mathbb{E}(\mathbf{X}) = \mathbf{q} = \{q_1, \dots, q_k\}$$

ist der Erwartungsvektor, und die Kovarianzmatrix ist

$$\Sigma_{\mathbf{X}}^2 = \mathbb{V}(\mathbf{X}) = \mathbb{E}((\mathbf{X} - \mu_{\mathbf{X}})(\mathbf{X} - \mu_{\mathbf{X}})^{\top}) = \text{diag}(\mathbf{q}) - \mathbf{q}\mathbf{q}^{\top}$$

- Für das  $j$ te Teilchen sei  $X_{i,j}$  eine Zufallsvariable mit

$$\begin{aligned}\text{das } j\text{te Teilchen im Bin } i: & \quad X_{i,j} = 1 \\ \text{das } j\text{te Teilchen nicht im Bin } i: & \quad X_{i,j} = 0\end{aligned}$$

wobei  $X_{i,j}$  gleich verteilt ist wie  $X_i$ .

- Da die Teilchen von einander unabhängig sind, sind  $\{X_{i,1}, \dots, X_{i,n}\}$  für fixiertes  $i$  unabhängig.

## Viele stationäre Teilchen in einem Behälter

- ▶ Sei die Zufallsvariable  $Y_i^{(n)} = X_{i,1} + \dots + X_{i,n}$  die Anzahl der Teilchen im  $i$ ten Bin.
- ▶ Seien  $\mathbf{1} = \{1, \dots, 1\}$  und  $\mathbf{m} = \{m_1, \dots, m_k\}$  mit  $m_i$  Teilchen im  $i$ ten Bin.
- ▶ Der Zufallsvektor  $\mathbf{Y}^{(n)} = \{Y_1^{(n)}, \dots, Y_k^{(n)}\}$  hat die Multinomialverteilung

$$P(\mathbf{Y}^{(n)} = \mathbf{m}) = \binom{n!}{\mathbf{m}!} \mathbf{q}^{\mathbf{m}}, \quad \mathbf{1}^\top \mathbf{m} = n, \quad \mathbf{1}^\top \mathbf{q} = 1$$

wobei der Multinomialkoeffizient  $\binom{n!}{\mathbf{m}!}$  gegeben ist durch  $n!/(m_1! \dots m_k!)$ , und die Potenz ist  $\mathbf{q}^{\mathbf{m}} = q_1^{m_1} \dots q_k^{m_k}$ .

- ▶ Da die Zufallsvektoren  $\mathbf{X}_j = \{X_{1,j}, \dots, X_{k,j}\}$ ,  $j = 1, \dots, n$ , unabhängig sind, gelten

$$\mathbb{E}(\mathbf{Y}^{(n)}) = \mathbb{E}(\mathbf{X}_1) + \dots + \mathbb{E}(\mathbf{X}_n), \quad \mathbb{V}(\mathbf{Y}^{(n)}) = \mathbb{V}(\mathbf{X}_1) + \dots + \mathbb{V}(\mathbf{X}_n)$$

- ▶ Mit  $\mathbf{q} = \mathbf{1}/k$  gelten

$$\mathbb{E}(\mathbf{Y}^{(n)}) = \mathbf{1}/k, \quad \mathbb{V}(\mathbf{Y}^{(n)}) = (k \cdot \text{diag}(\mathbf{1}) - \mathbf{1}\mathbf{1}^\top)/k^2$$

# Viele stationäre Teilchen in einem Behälter

- ▶ Laut dem Zentralen Grenzwertsatz gilt

$$\forall \epsilon > 0$$

$$P\left(\left|\mathbf{Y}^{(n)}/n - \mathbf{1}/k\right| \leq \epsilon\right) = P\left(\frac{|\mathbf{Y}^{(n)}/n - \mathbf{1}/k|}{1/\sqrt{n}} \leq \epsilon\sqrt{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P(|\mathbf{Z}| \leq \epsilon\sqrt{n}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1.$$

wobei  $\mathbf{Z} \sim \mathbf{N}(\mathbf{0}, \Sigma_{\mathbf{X}}^2)$  mit Erwartungsvektor  $\mathbf{0}$  und Kovarianzmatrix  $\Sigma_{\mathbf{X}}^2$ .

- ▶ Um die wahrscheinlichste Verteilung zu bestimmen, werden  $\mathbf{q} = \mathbf{1}/k$  und die gröbere Stirling Formel  $\ln(n!) \approx n \ln(n) - n$  in der transformierten Zielfunktion  $\ln(P(\mathbf{Y}^{(n)} = \mathbf{m}))$  verwendet.
- ▶ Man **bestätigt** durch die stationäre Stelle von der Lagrange-Funktion

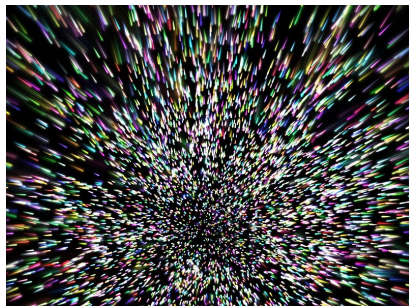
$$L(\mathbf{m}, \lambda) = \mathbf{m}^\top (1 - \ln(\mathbf{m})) - \lambda(\mathbf{1}^\top \mathbf{m} - n)$$

dass  $P(\mathbf{Y}^{(n)} = \mathbf{m})$  bezüglich  $\mathbf{m}$  unter  $\mathbf{1}^\top \mathbf{m} = n$  mit dem Erwartungsvektor  $\mathbf{m}^* = \mathbb{E}(\mathbf{Y}^{(n)}) = (n/k)\mathbf{1}$  maximiert wird.

- ▶ Zufallssimulationen: Je höher  $n$  ist, desto enger liegen die Durchschnittsverteilungen beim Erwartungsvektor.

# Viele energetische Teilchen in einem Behälter

- ▶ Seien ganz viele energetische Teilchen in einem Behälter gegeben.
- ▶ Alle Teilchen besitzen nur kinetische Energie, und die gesamte Energie im Behälter ist fixiert.
- ▶ Analog zur Position im letzten Abschnitt seien nun die Energien der Teilchen in vielen Bins unterteilt.
- ▶ Es wird die Verteilung von  $n$  Teilchen in  $k$  Bins bestimmt, die am wahrscheinlichsten ist.
- ▶ Es wird gezeigt, für  $n$  immer größer nähert sich die Erwartungsverteilung der wahrscheinlichsten Verteilung an.
- ▶ Es wird gezeigt, für  $n$  immer größer nähern sich diese Verteilungen der sogenannten *Boltzmann Verteilung* an.



# Viele energetische Teilchen in einem Behälter

- ▶ Sei  $\Omega = \{B_1, B_2, \dots, B_k\}$  das Ergebnisraum mit den möglichen Energien der Teilchen.
- ▶ Ein Teilchen im  $i$ ten Bin hat Energie  $E_i$ , wobei
$$E_k > E_{k-1} > \dots > E_2 > E_1 \geq 0.$$
- ▶ Seien die Teilchen mit  $\{T_1, T_2, \dots, T_n\}$  markiert.
- ▶ Für ein zufälliges Teilchen  $T$  sei  $X_i : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$  eine Zufallsvariable mit  $X_i(T \text{ in } B_l) = \delta_{i,l}$ .
- ▶ Für das  $j$ te Teilchen sei  $X_{i,j} : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$  eine Zufallsvariable mit  $X_{i,j}(T_j \text{ in } B_l) = \delta_{i,l}$ .
- ▶ Sei die Zufallsvariable  $Y_i^{(n)} = X_{i,1} + \dots + X_{i,n}$  die Anzahl der  $n$  Teilchen, die im  $i$ ten Bin zu finden sind.
- ▶ Wegen der fixierten gesamten Energie  $E$  ist das Platzfinden für ein Teilchen im Allgemeinen abhängig von den anderen, aber es wird gesehen, für  $E = \mathcal{O}(n)$  immer größer sind  $X_{i,j}$  und  $X_{i',j'}$  annäherungsweise unabhängig, und daher:
- ▶ Für  $\mathbf{X} = \{X_1, \dots, X_k\}$  und  $\mathbf{Y}^{(n)} = \{Y_1^{(n)}, \dots, Y_k^{(n)}\}$  wird gezeigt,
$$P(|\mathbf{Y}^{(n)}/n - \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{X}}| \leq \epsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1, \forall \epsilon > 0.$$

# Viele energetische Teilchen in einem Behälter

- ▶ Mit  $m_i$  Teilchen im  $i$ ten Bin der Energie  $E_i$  seien

$$\mathbf{1} = \{1, \dots, 1\}, \quad \mathbf{m} = \{m_1, \dots, m_k\}, \quad \mathbf{E} = \{E_1, \dots, E_k\}.$$

- ▶ Sei  $\hat{E} = E/n$  die durchschnittliche Energie mit

$$E_1 < \hat{E} < \mathbf{1}^\top \mathbf{E} / k$$

- ▶ Mikrozustände sind Verteilungen von  $\{T_1, T_2, \dots, T_n\}$ .
- ▶ Makrozustände sind Verteilungen von  $\{m_1, \dots, m_k\}$ .
- ▶ Alle möglichen Mikrozustände seien gleich wahrscheinlich.
- ▶ Der Zufallsvektor  $\mathbf{Y}^{(n)} = \{Y_1^{(n)}, \dots, Y_k^{(n)}\}$  ist dann so verteilt,

$$P(\mathbf{Y}^{(n)} = \mathbf{m}) = \begin{cases} \frac{1}{N} \binom{n!}{\mathbf{m}!} & \begin{matrix} \mathbf{1}^\top \mathbf{m} = n \\ \mathbf{m}^\top \mathbf{E} = E, \end{matrix} \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \quad N = \sum_{\mathbf{1}^\top \mathbf{m} = n, \mathbf{m}^\top \mathbf{E} = E} \binom{n!}{\mathbf{m}!}.$$

- ▶ Mit dem Multinomialkoeffizienten werden mögliche Mikrozustand-Permutationen für einen gegebenen Makrozustand berücksichtigt.

# Viele energetische Teilchen in einem Behälter

- Diese Verteilung wird mit den folgenden Größen untersucht.

Makrozustände	$\mathbf{E} = \{E_j\}_{j=1}^k$	# Mikrozustände
$\{M = i\}_{i=1}^N$ :	$\{\mathbf{m}_i\}_{i=1}^N = \{m_{i,j}\}_{i=1, j=1}^N, k$	$\{K_i\}_{i=1}^N, K_i = \binom{n!}{m_i!}$
Erwartungen:	$\bar{\mathbf{m}} = \sum_{i=1}^N \mathbf{m}_i K_i / N$	$N$

- Z.B. seien  $\mathbf{E} = \{(i-1)\Delta E\}_{i=1}^k$ ,  $\Delta E = \frac{n}{k-1}$ ,  $E = n$  und  $n, k = 5$ .

Makrozustände	$E_1$	$E_2$	$E_3$	$E_4$	$E_5$	# Mikrozustände
$M = 1$ :	1	4	0	0	0	5
2:	4	0	0	0	1	5
⋮ 3:	3	0	2	0	0	10
4:	3	1	0	1	0	20
am wahr- scheinlichsten $M = 5$ :	2	2	1	0	0	30
Erwartungen:	2.50	1.43	0.71	0.29	0.07	Gesamt: 70

- Mit Wahrscheinlichkeit 30/70 ist Makrozustand  $\mathbf{m}_\star = \mathbf{m}_5$  am wahrscheinlichsten, und die Erwartungen  $\bar{\mathbf{m}}$  sind ähnlich.

# Viele energetische Teilchen in einem Behälter

- ▶ Sei  $M$  eine Zufallsvariable für den Makrozustand.
- ▶ Beispielsweise wird  $\mathbb{E}[X_1] = 0 \cdot P(X_1 = 0) + 1 \cdot P(X_1 = 1)$  durch die Bayesche Regel gegeben,

$$\begin{aligned}P(X_1 = 1) &= \sum_{i=1}^N P(X_1 = 1 \mid M = i)P(M = i) = \sum_{i=1}^N \frac{m_{i,1}}{n} \frac{K_i}{N} \\&= \frac{1}{5} \frac{5}{70} + \frac{4}{5} \frac{5}{70} + \frac{3}{5} \frac{10}{70} + \frac{3}{5} \frac{20}{70} + \frac{2}{5} \frac{30}{70} = 0.5\end{aligned}$$

- ▶ Analog ergeben sich die Erwartungswerte:

$$\mu_{\mathbf{X}} = \mathbb{E}[\mathbf{X}] = \mathbb{E}[\mathbf{X}_j] = \bar{\mathbf{m}}/n, \quad \mathbb{E}[\mathbf{Y}^{(n)}] = \mathbb{E}[\mathbf{X}_1] + \dots + \mathbb{E}[\mathbf{X}_n] = \bar{\mathbf{m}}.$$

- ▶ Unabhängigkeit wird mit der Bayeschen Regel so kontrolliert,

$$\begin{aligned}P(X_{2,j} = 1 \ \& \ X_{1,j'} = 1) &= \sum_{i=1}^N P(X_{2,j} = 1 \ \& \ X_{1,j'} = 1 \mid M = i)P(M = i) \\&= \sum_{i=1}^N P(X_{2,j} = 1 \mid X_{1,j'} = 1 \ \& \ M = i)P(X_{1,j'} = 1 \mid M = i)P(M = i) \\&= \frac{4}{4} \frac{1}{5} \frac{5}{70} + \frac{0}{4} \frac{4}{5} \frac{5}{70} + \frac{0}{4} \frac{3}{5} \frac{10}{70} + \frac{1}{4} \frac{3}{5} \frac{20}{70} + \frac{2}{4} \frac{2}{5} \frac{30}{70} = \frac{1}{7} = P(X_{2,j} = 1) \cdot P(X_{1,j'} = 1)\end{aligned}$$

- ▶ Hier ist Unabhängigkeit genau. Im Allgemeinen gilt die Übereinstimmung annäherungsweise für  $\hat{E} = E/n = \text{fix}$  und  $n \rightarrow \infty$ .



## Viele energetische Teilchen in einem Behälter

- ▶ Mit der Unabhängigkeit von  $\{\mathbf{X}_j\}_{j=1}^n$  für fixiertes  $\hat{E} = E/n$  und großes  $n$  folgt mit dem Zentralen Grenzwertsatz,

$$P\left(\left|\mathbf{Y}^{(n)}/n - \mu_{\mathbf{X}}\right| \leq \epsilon\right) = P\left(\frac{|\mathbf{Y}^{(n)}/n - \mu_{\mathbf{X}}|}{1/\sqrt{n}} \leq \epsilon\sqrt{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P(|\mathbf{Z}| \leq \epsilon\sqrt{n}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

$\forall \epsilon > 0$ , wobei  $\mathbf{Z} \sim \mathbf{N}(\mathbf{0}, \Sigma_{\mathbf{X}}^2)$  mit Erwartungsvektor  $\mathbf{0}$  und Kovarianzmatrix  $\Sigma_{\mathbf{X}}^2$ .

- ▶ Da andere Zustände sehr unwahrscheinlich werden, ist  $\mu_{\mathbf{X}}$  annäherungsweise auch die wahrscheinlichste Verteilung.
- ▶ Trotzdem sind Unterschiede zwischen dem wahrscheinlichsten Zustand  $m_{\star}$  und dem Erwartungszustand  $\bar{m}$  in der obigen Tabelle mit  $n = k = 5$  nicht trivial.
- ▶ Die Methode von Boltzmann wird nun verwendet, um den Makrozustand zu bestimmen, der annäherungsweise für großes  $n$  am wahrscheinlichsten ist.
- ▶ Dieser Zustand wird durch das Maximum des Multinomialkoeffizienten unter Einschränkungen mit Lagrange-Multiplikatoren bestimmt.

# Viele energetische Teilchen in einem Behälter

- ▶ Dafür soll der Multinomialkoeffizienten in der Zielfunktion  $P(\mathbf{Y}^{(n)} = \mathbf{m})$  bezüglich  $\mathbf{m}$  unter den Einschränkungen  $\mathbf{1}^\top \mathbf{m} = n$  und  $\mathbf{m}^\top \mathbf{E} = E$  maximiert werden.
- ▶ Die gröbere Stirling Formel  $\ln(n!) \approx n \ln(n) - n$  wird in der transformierten Zielfunktion  $\ln(P(\mathbf{Y}^{(n)} = \mathbf{m}))$  verwendet.
- ▶ Der gesuchte Zustand ist stationär für die Lagrange-Funktion

$$L(\mathbf{m}, \lambda, \mu) = \mathbf{m}^\top (\mathbf{1} - \ln(\mathbf{m})) - \lambda(\mathbf{1}^\top \mathbf{m} - n) - \mu(\mathbf{m}^\top \mathbf{E} - E)$$

- ▶ Für die entstehenden Rechnungen seien definiert

$$Z(\mu) = \sum_{i=1}^k e^{-\mu E_i}, \quad \phi(\mu) = e^{\mu \hat{E}} [Z'(\mu) + \hat{E} Z(\mu)]$$

wobei  $Z(\mu)$  die sogenannte Partitionsfunktion ist.

- ▶ Die Stationaritätsbedingungen der Lagrange-Funktion sind

$$\mathbf{m} = e^{-\lambda - \mu \mathbf{E}}, \quad n e^\lambda = Z(\mu) \quad \text{und} \quad \phi(\mu) = 0.$$

# Viele energetische Teilchen in einem Behälter

- ▶ Unter der Annahme  $E_1 < \hat{E} < \mathbf{1}^\top \mathbf{E}/k$  gelten

$$\phi(0) = \sum_{i=1}^k (\hat{E} - E_i) < 0, \quad \phi'(\mu) = \sum_{i=1}^k (\hat{E} - E_i)^2 e^{\mu(\hat{E} - E_i)} > 0$$

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \phi(\mu) = \lim_{\mu \rightarrow \infty} \underbrace{\sum_{E_i \geq \hat{E}} (\hat{E} - E_i) e^{\mu(\hat{E} - E_i)}}_{=0} + \lim_{\mu \rightarrow \infty} \underbrace{\sum_{E_i < \hat{E}} (\hat{E} - E_i) e^{\mu(\hat{E} - E_i)}}_{=\infty} = \infty.$$

- ▶ Daher existiert genau ein  $\mu^* \in (0, \infty)$ , mit dem die Stationaritätsbedingungen erfüllt sind.
- ▶ Laut dem Boltzmann Modell gilt  $1/\mu^* = \kappa T$ , wobei  $\kappa$  die Boltzmann Konstante und  $T$  die Temperatur sind.
- ▶ Mit  $\nabla_{\mathbf{m}}^2 L = \text{diag}(-1/\mathbf{m})$  ist  $L$  konkav in  $\mathbf{m}$  über  $(0, n)^k$ .
- ▶ Daher wird die Wahrscheinlichkeit  $P(\mathbf{Y}^{(n)} = \mathbf{m})$  bezüglich  $\mathbf{m}$  unter Erhaltungseinschränkungen mit der Boltzmann Verteilung maximiert,

$$\mathbf{m}^* = n e^{-\mu^* \mathbf{E}} / Z(\mu^*).$$

# Viele energetische Teilchen in einem Behälter

Vergleich der  
Verteilungen

$\bar{m}$ ,  $m_*$ ,  $m^*$

mit den

Parametern:

$$E = \{(i-1)\Delta E\}_{i=1}^k$$

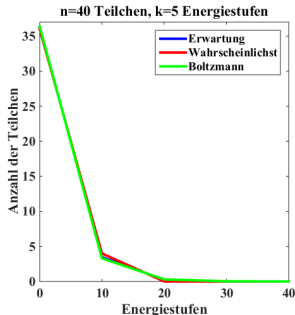
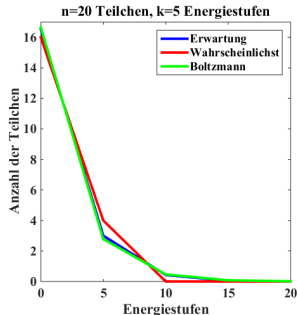
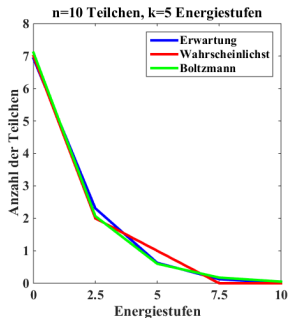
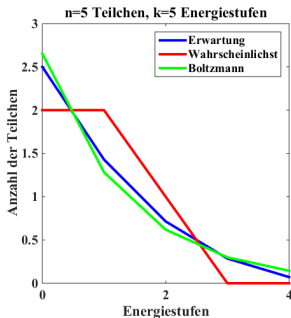
$$\Delta E = \frac{n}{k-1}$$

$$E = n, k = 5,$$

$$n = 5, 10,$$

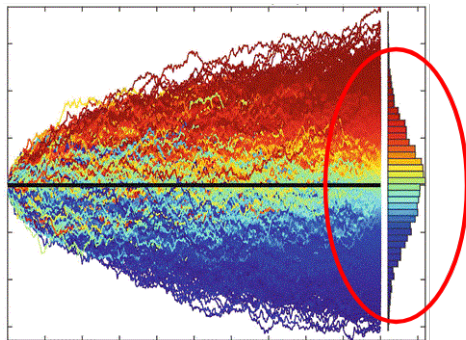
$$20, 40.$$

Konvergenz  
der Differenzen  
zu Null ist  
augenscheinlich.



# Diffusion und Brownsche Bewegung

- Brown hat 1826-27 die unregelmäßige Bewegung von im Wasser schwebenden Blütenstaubteilchen beobachtet. Er und andere haben gemerkt, der Pfad eines gegebenen Teilchens ist so unregelmäßig dass es zu keiner Zeit eine Tangente hat, und die Pfade von zwei Teilchen sind unabhängig von einander.



Bell shaped curve  
i.e. Normal distribution

Siehe das [Video](#).

# Brownsche Bewegung

- ▶ Die zufällige Bewegung von Teilchen in einem dünnen Rohr wird hier betrachtet.
- ▶ Ein beliebiges Teilchen bewegt sich zufällig nach links oder nach rechts mit gleicher Wahrscheinlichkeit.
- ▶ Sei  $\delta$  eine Zufallsvariable mit

$$P(\delta = -1) = \frac{1}{2} = P(\delta = +1)$$

wobei  $\delta = -1$  und  $\delta = +1$  Verschiebungen eines Teilchens nach links bzw. nach rechts darstellen.

- ▶ Seien  $\{\delta_1, \delta_2, \dots\}$  unabhängig und gleich verteilt wie  $\delta$ .
- ▶ Dargestellt sei die Position eines beliebigen Teilchens zur Zeit  $t$  in Zeitschritten von  $\Delta t$  durch die Zufallsvariable

$$X(t; \Delta t).$$

- ▶ Zur Zeit  $t = 0$  gilt  $X(0, \Delta t) = 0$ .
- ▶ Zur Zeit  $t = 1 \cdot \Delta t$  gilt

$$X(1 \cdot \Delta t; \Delta t) = \sqrt{2D\Delta t} \cdot \delta_1$$

wobei  $D > 0$  eine Diffusivität darstellt.

# Brownsche Bewegung

- ▶ Zur Zeit  $t = k\Delta t$  gilt für  $k = 1, 2, \dots$

$$X(k \cdot \Delta t; \Delta t) = X((k-1) \cdot \Delta t; \Delta t) + \sqrt{2D\Delta t} \cdot \delta_k$$

oder

$$X(k \cdot \Delta t; \Delta t) = \sqrt{2D\Delta t} \cdot (\delta_1 + \dots + \delta_k)$$

- ▶ Analog seien  $\{X_1(t; \Delta t), X_2(t; \Delta t), \dots\}$  Zufallsvariablen, die die Position von Teilchen darstellen, die sich gleichartig aber unabhängig von einander bewegen, d.h.  $k = 1, 2, \dots$

$$X_i(k \cdot \Delta t; \Delta t) = X_i((k-1) \cdot \Delta t; \Delta t) + \sqrt{2D\Delta t} \cdot \delta_{i,k}$$

wobei  $\{\delta_{i,k}\}$  unabhängig und gleich verteilt wie  $\delta$  sind.

- ▶ Man simuliert diese Bewegung von Teilchen durch Zufallsproben und erstellt Histogramme für die Teilchendichte, wie in der obigen Abbildung gesehen.
- ▶ Die Eigenschaften der Histogramme sollen voraussagt werden:

# Brownsche Bewegung

- Die Verschiebungs-Zufallsvariable  $\delta$  erfüllt

$$\mu_{\delta} = \mathbb{E}(\delta) = P(\delta = -1)(-1) + P(\delta = +1)(+1) = 0$$

$$\sigma_{\delta}^2 = \mathbb{V}(\delta) = P(\delta = -1)(-1 - 0)^2 + P(\delta = +1)(+1 - 0)^2 = 1$$

- Die Positions-Zufallsvariable erfüllt

$$X(t; \Delta t) = X(t - \Delta t; \Delta t) + \sqrt{2D\Delta t} \cdot \delta_{\lfloor t/\Delta t \rfloor} = \dots = \sqrt{2D\Delta t} \sum_{i=1}^{\lfloor t/\Delta t \rfloor} \delta_i$$

mit

$$\mu_{X(t; \Delta t)} = \mathbb{E}(X(t; \Delta t)) = \sqrt{2D\Delta t} \sum_{i=1}^{\lfloor t/\Delta t \rfloor} \mu_{\delta_i} = 0$$

und

$$\sigma_{X(t; \Delta t)}^2 = \mathbb{E}(X(t; \Delta t)^2) = 2D\Delta t \sum_{i=1}^{\lfloor t/\Delta t \rfloor} \sigma_{\delta_i}^2 = \frac{\lfloor t/\Delta t \rfloor}{t/\Delta t} 2Dt.$$



# Brownsche Bewegung

- ▶ Laut dem Zentralen Grenzwertsatz

$$P(a \leq X(t; \Delta t) \leq b) = P\left(\sqrt{\frac{t/\Delta t}{[t/\Delta t]}} \frac{a}{\sqrt{2Dt}} \leq \frac{X(t; \Delta t) - \mu_{X(t; \Delta t)}}{\sigma_{X(t; \Delta t)}} \leq \sqrt{\frac{t/\Delta t}{[t/\Delta t]}} \frac{b}{\sqrt{2Dt}}\right)$$

$$\xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} P\left(\frac{a}{\sqrt{2Dt}} \leq Z \leq \frac{b}{\sqrt{2Dt}}\right), \quad Z \sim N(0, 1), \quad a < b, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

- ▶ Daher gilt

$$P(a \leq X(t; \Delta t) \leq b) \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{a/\sqrt{2Dt}}^{b/\sqrt{2Dt}} e^{-z^2/2} dz$$
$$\stackrel{x=z\sqrt{2Dt}}{=} \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \int_a^b e^{-x^2/(4Dt)} dx.$$

- ▶ **Hausaufgabe:** Für  $\alpha \in (0, \frac{1}{2}]$  entwickle das Modell mit

$$P(\delta = -1) = \alpha, \quad P(\delta = 0) = 1 - 2\alpha, \quad P(\delta = +1) = \alpha.$$

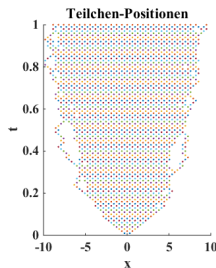
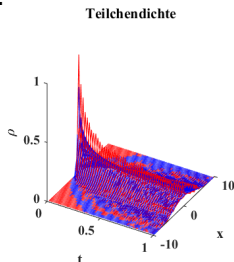
# Brownsche Bewegung

Ergebnisse einer Monte-Carlo Simulation:

- Für  $a = -10$ ,  $b = +10$ .  
29 räumliche Zellen,  
 $D = 5$ ,  $\Delta t = 0.01$   
und  $\alpha = 0.5$ :

Mehr Abstand  
zwischen

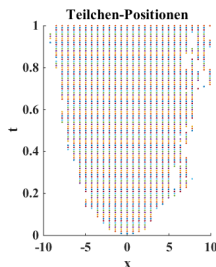
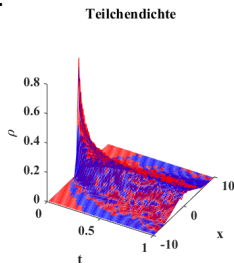
Zufall vs. Normal



- Für  $a = -10$ ,  $b = +10$ .  
29 räumliche Zellen,  
 $D = 5$ ,  $\Delta t = 0.01$   
und  $\alpha = 0.1$ :

Weniger Abstand  
zwischen

Zufall vs. Normal



# Brownsche Bewegung

- ▶ Die Eigenschaften der Teilchendichte sollen vorausgesagt werden:
- ▶ Sei  $X(t)$  eine Zufallsvariable für die Position eines beliebigen Teilchens in einem dünnen Rohr zur Zeit  $t$ .
- ▶ Sei  $\rho(x, t)$  die Wahrscheinlichkeitsdichte für  $X(t)$ ,

$$P(a \leq X(t) \leq b) = \int_a^b \rho(x, t) dx$$

- ▶ Sei  $\delta(\tau)$  eine Zufallsvariable, die die Änderung der Position des Teilchens in einem Zeitintervall der Länge  $\tau$  darstellt.
- ▶ Sei  $f(\xi, \tau)$  die Wahrscheinlichkeitsdichte für  $\delta(\tau)$ ,

$$P(\delta(\tau) \in [a, b]) = \int_a^b f(\xi, \tau) d\xi$$

die keine Bewegungsrichtung bevorzugt, und daher ist  $f(\xi, \tau)$  eine gerade Funktion in  $\xi$ :  $f(\xi, \tau) = f(-\xi, \tau)$ .

# Brownsche Bewegung

- ▶ Wenn zur Zeit  $t$  die Wahrscheinlichkeitsdichte  $\rho(x, t)$  für  $X(t)$  gegeben ist, dann folgt aus

$$\begin{aligned} P(a \leq X(t + \tau) \leq b) &= P(a \leq X(t) + \delta(\tau) \leq b) = \\ \int_{-\infty}^{+\infty} P(a \leq X(t) + \xi \leq b) f(\xi, \tau) d\xi &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \int_{a-\xi}^{b-\xi} \rho(\eta, t) d\eta \right] f(\xi, \tau) d\xi \\ &= \int_a^b \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x - \xi, t) f(\xi, \tau) d\xi \right] dx \end{aligned}$$

dass zur Zeit  $t + \tau$  die Wahrscheinlichkeitsdichte  $\rho(x, t + \tau)$  für  $X(t + \tau)$  gegeben ist durch

$$\rho(x, t + \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x - \xi, t) f(\xi, \tau) d\xi.$$

- ▶ Durch Taylor-Entwicklungen und Eigenschaften von  $f$  folgt

$$\begin{aligned} \rho(x, t) + \tau \rho_t(x, t) + \dots &= \rho(x, t + \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} [\rho(x, t) - \rho_x(x, t)\xi + \rho_{xx}(x, t)\xi^2/2 + \dots] f(\xi, \tau) d\xi \\ &= \underbrace{\rho(x, t) \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi, \tau) d\xi}_{=1} - \underbrace{\rho_x(x, t) \int_{-\infty}^{+\infty} \xi f(\xi, \tau) d\xi}_{=0} + \rho_{xx}(x, t) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} \xi^2 f(\xi, \tau) d\xi + \dots \end{aligned}$$

# Brownsche Bewegung

- Es ergibt sich dann

$$\rho_t(x, t) = D\rho_{xx}(x, t) \quad \text{mit} \quad D = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\xi^2}{2\tau} f(\xi, \tau) d\xi.$$

- Mit den Anfangsbedingungen

$$\rho^\epsilon(x, 0) = \begin{cases} 1/(2\epsilon), & x \in [-\epsilon, +\epsilon] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

ist die Lösung für  $t > 0$  gegeben durch

$$\rho^\epsilon(x, t) = \frac{1}{2\epsilon} \left[ \operatorname{erf} \left( \frac{x + \epsilon}{\sqrt{4Dt}} \right) - \operatorname{erf} \left( \frac{x - \epsilon}{\sqrt{4Dt}} \right) \right].$$

- Daher wird  $f$  gegeben durch

$$\begin{aligned} \frac{e^{-x^2/(4D\tau)}}{\sqrt{4\pi D\tau}} &\stackrel{\epsilon \rightarrow 0}{\longleftarrow} \rho^\epsilon(x, 0 + \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho^\epsilon(x - \xi, 0) f(\xi, \tau) d\xi \\ &= \frac{1}{2\epsilon} \int_{x-\epsilon}^{x+\epsilon} f(\xi, \tau) d\xi \stackrel{\epsilon \rightarrow 0}{\longrightarrow} f(x, \tau). \end{aligned}$$

# Brownsche Bewegung

- Man bestätigt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\xi^2}{2\tau} f(\xi, \tau) d\xi = D$$

- Zusammengefasst ist die Lösung des Anfangswertproblems

$$\rho_t(x, t) = D\rho_{xx}(x, t), \quad \rho(x, 0) = \rho_0(x)$$

gegeben durch

$$\rho(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_0(x - y) \frac{e^{-y^2/(4Dt)}}{\sqrt{4\pi Dt}} dy$$

- Hausaufgabe:** Analog zur Berechnung über  $\Omega \times [0, T]$  einer Temperaturverteilung gegeben durch die Lösung von

$$\rho c T_t = \nabla \cdot (\lambda \nabla T), \quad T(t, \partial\Omega) = T_\infty(t), \quad T(0, \Omega) = T_0$$

entwickle numerische Methoden, um die Dichte  $\rho$  in einem räumlichen Intervall  $x \in [0, 1]$  über ein Zeitintervall  $t \in [0, T]$  zu berechnen.

# Brownsche Bewegung

- Für  $t \in [0, \frac{1}{10}]$ ,  $x \in [0, 1]$ ,  
101 räumliche Zellen,  
1001 Zeitschritte,  
und  $D = 1$ :

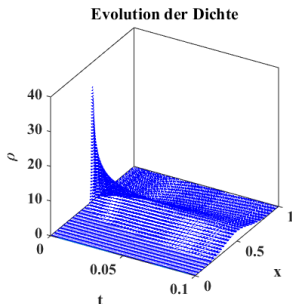
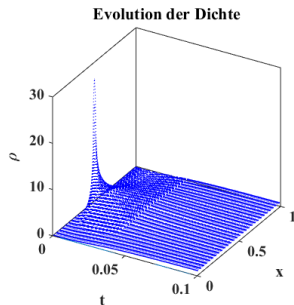
Es bleibt

$$\int_0^1 \rho(x, t) dx = 1$$

Also  $\rho(x, t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 1$ .

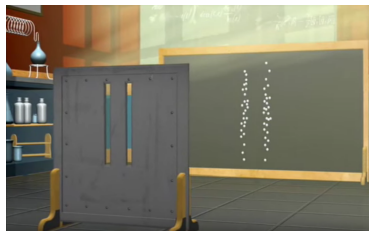
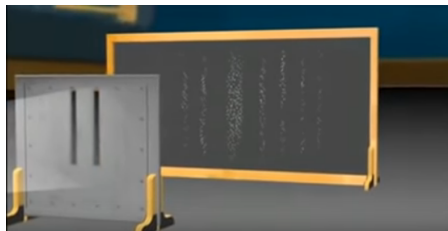
- Für  $t \in [0, \frac{1}{10}]$ ,  $x \in [0, 1]$ ,  
101 räumliche Zellen,  
1001 Zeitschritte,  
und  $D = \frac{1}{10}$ :

Die Evolution  
ist langsamer.  
mit  $D$  kleiner.



# Quanten- und Klassische Materie

- Siehe das [Doppelspalt-Experiment](#).



- Im 20. Jahrhundert ist entdeckt worden, dass Licht und Materie beide einen Wellen- und einen Teilchen-Charakter besitzen.
- Um den Wellencharakter zu verdeutlichen, soll die mathematische Beschreibung von Wellen hervorgehoben werden, wie sie für Elektromagnetismus und Strömungsmechanik bekannt sind.



# Von Quanten- bis zur klassischen Materie

- Sei eine komplexe Welle mit der Wellenfunktion

$$w(x, t) = u(x, t) + i \cdot v(x, t) = \rho(x, t) \exp[i \cdot \theta(x, t)]$$

$$\rho(x, t) = \sqrt{u^2(x, t) + v^2(x, t)}, \quad \tan(\theta(x, t)) = v(x, t)/u(x, t)$$

$$u(x, t) = \rho(x, t) \cos(\theta(x, t)), \quad v(x, t) = \rho(x, t) \sin(\theta(x, t))$$

dargestellt, wobei nur die Intensität

$$|w(x, t)| = \rho(x, t)$$

messbar ist.

- Falls es zwei Wellen  $w_1(x, t)$  und  $w_2(x, t)$  gibt, folgt aus der Superposition für die Gesamtamplitude

$$w(x, t) = w_1(x, t) + w_2(x, t)$$

$$w_1(x, t) = u_1(x, t) + i \cdot v_1(x, t) = \rho_1(x, t) \exp[i \cdot \theta_1(x, t)]$$

$$w_2(x, t) = u_2(x, t) + i \cdot v_2(x, t) = \rho_2(x, t) \exp[i \cdot \theta_2(x, t)]$$

# Von Quanten- bis zur klassischen Materie

## ► Hausaufgabe: Zeige

$$|w(x, t)|^2 = (u_1(x, t) + i \cdot v_1(x, t)) \cdot (u_1(x, t) - i \cdot v_1(x, t)) = \rho_1^2(x, t) + \rho_2^2(x, t) + 2\rho_1(x, t)\rho_2(x, t)\cos[\theta_1(x, t) - \theta_2(x, t)].$$

- Der letzte Term ist der sogenannte Interferenzterm.
- Der klassische Transport von Masse wird bezüglich der Materie-Dichte mit der Konvektionsgleichung modelliert,

$$\rho_t(x, t) + [v(x, t)\rho(x, t)]_x = 0$$

wobei  $v(x, t)$  die lokale Geschwindigkeit ist.

- Man **bestätigt**, die Lösung dieser Gleichung ist gegeben durch die reisende Welle,

$$\rho(x, t) = \rho_0(x - vt)$$

wenn  $\rho(x, 0) = \rho_0(x)$  anfänglich gilt und die Geschwindigkeit  $v(x, t) = v$  eine Konstante ist.

# Von Quanten- bis zur klassischen Materie

- ▶ Mit diesem Modell kann aber keine Interferenz entstehen.
- ▶ Deswegen wird eine Materie-Welle mit der Wellenfunktion

$$\psi(x, t) = \sqrt{\rho(x, t)} \exp[i\theta(x, t)/\hbar],$$

$$\rho(x, t) = |\psi(x, t)|, \quad \theta(x, t) = \arg[\psi(x, t)]$$

allgemeiner modelliert, wobei die Phase  $\theta$  für die beobachteten Interferenzmuster notwendig ist.

- ▶ Die Phase ist hier mit der Planck-Konstante  $\hbar$  skaliert.
- ▶ Für eine Materie-Welle wird die Wellenfunktion so interpretiert, dass

$$|\psi(x, t)|^2 = \rho(x, t)$$

die Wahrscheinlichkeitsdichte für die Position eines Teilchens darstellt.

- ▶ Daher muss erfüllt werden,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x, t)|^2 dx = 1, \quad \forall t \geq 0.$$

## Von Quanten- bis zur klassischen Materie

- ▶ Weiters gibt es die Beziehung  $\theta_x(x, t) = mv(x, t)$  zwischen der Phase  $\theta$  und der Geschwindigkeit  $v$ , wobei  $m$  die Masse eines Teilchens darstellt.
- ▶ Die Konvektionsgleichung für  $\rho$  wird mit einer zweiten Gleichung für die Phase  $\theta$  gekoppelt,

$$\begin{cases} \rho_t(x, t) + \frac{1}{m}[\theta_x(x, t)\rho(x, t)]_x = 0 \\ \theta_t(x, t) + \frac{1}{2m}\theta_x^2(x, t) + V(x, t) - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\rho_{xx}(x, t)}{\rho(x, t)} = 0. \end{cases}$$

- ▶ Dieses System ergibt sich von der einfacheren Schrödinger Gleichung, die folgendermaßen formuliert werden kann.
- ▶ Für die geradlinige Bewegung eines einzigen Teilchens sei die Wellenfunktion gegeben durch

$$\psi(x, t) = Ae^{i(\omega x/v - \omega t)} = Ae^{2\pi i(x/\lambda - \nu t)}$$

wobei  $A$  die Amplitude der Schwingungen,  $\omega = 2\pi\nu$  die Drehfrequenz und  $v = \nu\lambda$  die Geschwindigkeit sind.

# Von Quanten- bis zur klassischen Materie

- ▶ Mit der Frequenz der Schwingungen  $\nu$ , ist die Energie  $E$  gegeben durch die Planck-Einstein Formel,

$$E = 2\pi\hbar\nu.$$

- ▶ Mit der Wellenlänge  $\lambda$  ist der Impuls  $p$  durch die de-Broglie-Einstein Hypothese gegeben

$$p = \frac{2\pi\hbar}{\lambda}.$$

- ▶ Folglich ist die Wellenfunktion gegeben durch

$$\psi(x, t) = A e^{i(xp - Et)/\hbar}.$$

- ▶ Es gelten

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}(x, t) = \frac{ip}{\hbar} A e^{i(xp - Et)/\hbar}, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}(x, t) = -\frac{p^2}{\hbar^2} A e^{i(xp - Et)/\hbar} = -\frac{p^2}{\hbar^2} \psi(x, t)$$

und

$$\frac{\partial \psi}{\partial t}(x, t) = -\frac{iE}{\hbar} A e^{i(xp - Et)/\hbar} = -\frac{iE}{\hbar} \psi(x, t).$$

# Von Quanten- bis zur klassischen Materie

- ▶ Sei  $V$  das lokale Potential, dem das Teilchen ausgesetzt wird.
- ▶ Die Gesamtenergie  $E$  ist gegeben durch die Summe der kinetischen ( $\frac{1}{2}mv^2$ ) und der potentiellen ( $V$ ) Energie,

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + V = \frac{p^2}{2m} + V.$$

- ▶ Aus

$$E\psi(x, t) = \frac{p^2}{2m}\psi(x, t) + V(x)\psi(x, t)$$

folgt

$$\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - V\psi.$$

- ▶ Diese ist die Schrödinger-Gleichung in 1D.
- ▶ In 2D oder 3D mit  $\Delta\psi = \psi_{xx} + \psi_{yy}$  bzw.  $\Delta\psi = \psi_{xx} + \psi_{yy} + \psi_{zz}$  ist die Schrödinger Gleichung analog gegeben durch

$$\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\hbar^2}{2m} \Delta\psi - V\psi$$

## Von Quanten- bis zur klassischen Materie

- **Hausaufgabe:** Analog zur Berechnung der Dichte für Brownschen Bewegung entwickle numerische Methoden für die Lösung der Schrödinger Gleichung auf einem räumlichen Intervall  $x \in [-L, +L]$  und über ein Zeitintervall  $t \in [0, T]$ . Hinweis: Mit einer sehr großen Wellenfrequenz  $\lambda = \hbar/m$  muss das räumliche Gitter sehr fein sein!
- Analog zur Brownschen Bewegung ist eine Lösungsformel für das Anfangswertproblem  $(V = 0)$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}, \quad \psi(x_0) = \psi_0(x)$$

gegeben durch  $(D = i\hbar/(2m))$

$$\psi(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\psi_0(x-y)}{\sqrt{4\pi \left(\frac{i\hbar}{2m}\right) t}} \exp\left(-\frac{y^2}{4 \left(\frac{i\hbar}{2m}\right) t}\right) dy.$$

# Von Quanten- bis zur klassischen Materie

- ▶ **Hausaufgabe:** Verwende diese Lösungsformel, um die Lösungen auf der [Wiki-Seite](#) zu kontrollieren.
- ▶ Laut der Arbeit von Heisenberg können die Position und der Impuls eines Teilchens nicht gleichzeitig bestimmt werden. Die Unschärfe des Ortes  $x$  und des Impulses  $p$  werden jeweils durch deren statistische Streuung  $\sigma_x$  und  $\sigma_p$  definiert, und die Unschärferelation besagt

$$\sigma_x \cdot \sigma_p \geq \hbar/2.$$

- ▶ Dirac hat gemeint, die klassische Mechanik kann als Grenzfall der Quantenmechanik angesehen werden, wenn  $\hbar$  gegen Null strebt. Dies soll heißen, Newtonsche Gesetze sollen sich von der Schrödinger Gleichung ergeben, wenn  $\hbar \rightarrow 0$ .
- ▶ In dieser [Arbeit](#) wird über den Grenzübergang im Detail erklärt.



# Von Quanten- bis zur klassischen Materie

- **Hausaufgabe:** Für eine Pakete-Breite  $\sigma$  und mit  $\lambda = \hbar/m$  stelle die Lösung (d.h.  $|\psi|^2$ ,  $\Re(\psi)$ ,  $\Im(\psi)$ ) dynamisch grafisch dar,

$$\psi(x, t) = \sqrt{\frac{\sigma \sqrt{2/\pi}}{\sigma^2 + 2i\hbar t/m}} \exp\left(\frac{2\pi i}{\lambda} \left(x - \frac{\pi \hbar t}{\lambda m}\right) - \frac{\pi^2 \sigma^2}{\lambda^2} - \frac{(x - 2\pi \hbar t/(\lambda m) - i\pi \sigma^2/\lambda)^2}{\sigma^2 + 2i\hbar t/m}\right).$$

für  $\hbar$  groß ( $\hbar \approx 1$ , quantum) und für  $\hbar$  klein ( $\hbar \approx 0.1$ , klassisch), bzw.  $m$  klein (quantum) und für  $m$  groß (klassisch).

- Mit  $\lambda = 4\pi\hbar/(mv)$  erfüllt diese Lösung

$$\rho(x, t) = |\psi(x, t)|^2 = \frac{\sigma \sqrt{2/\pi}}{\sqrt{\sigma^4 + 4\hbar^2 t^2/m^2}} \exp\left(-\frac{2\sigma^2(x - vt)^2}{\sigma^4 + 4\hbar^2 t^2/m^2}\right)$$

- Mit  $\hbar \rightarrow 0$  oder  $m \rightarrow \infty$  hat die Lösung die Form

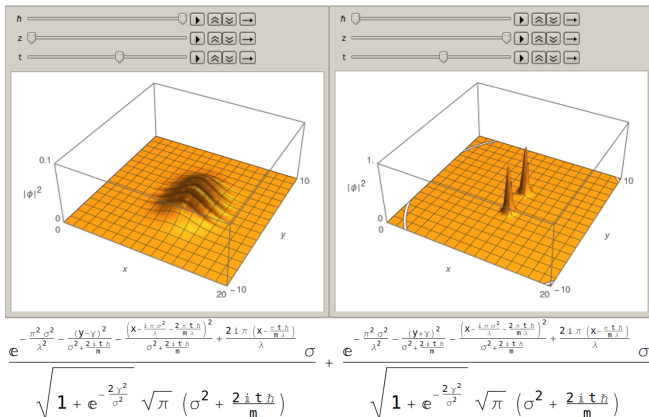
$$\rho(x, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x - vt)^2}{\sigma^2/2}\right)$$

die einer reisenden Welle mit Geschwindigkeit  $v$  entspricht.

- **Hausaufgabe:** Stelle diese dynamisch grafisch dar: [Video](#).

# Von Quanten- bis zur klassischen Materie

- **Hausaufgabe:** Wiederhole diese Überlegungen in 2D und für zwei Teilchenwellen, um Interferenzmuster zu untersuchen: [Video](#).



- Zwei Teilchen werden an  $x = 0$ ,  $y = \pm\gamma$  eingeführt.
- Quantum  $\hbar$  größer links, klassisch  $\hbar$  kleiner rechts.