Mathematische Grundlagen für Quantitative Wissenschaften

a.o.Univ.Prof. Mag.Dr. Stephen Keeling

https://imsc.uni-graz.at/keeling/

Dokumentation und Literatur:

https://imsc.uni-graz.at/keeling/teaching.html

Inhaltsverzeichnis I

Inhaltsverzeichnis II

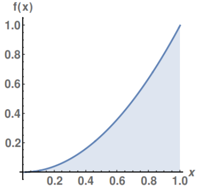
Inhaltsverzeichnis III

Inhaltsverzeichnis IV

Inhaltsverzeichnis V

Was sind Integral- und Differentialrechnungen?

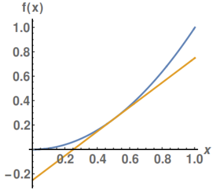
- Kurz beschrieben: Eine Integralrechnung entspricht dem Flächeninhalt unter der Kurve einer Funktion $f(x)$ zwischen $x = a$ und $x = b$:



$$f(x) = x^2, \quad a = 0, \quad b = 1,$$

$$\int_0^1 f(x)dx = 1/3$$

- Kurz beschrieben: Eine Differentialrechnung $f'(x_0)$ entspricht der Steigung einer Funktion $f(x)$ an der Stelle $x = x_0$.

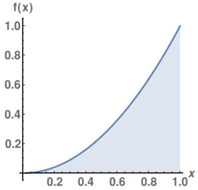


$$f(x) = x^2, \quad x_0 = 1/2,$$

$$f'(x_0) = 1$$

Warum sind diese nützlich?

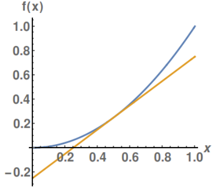
- Ein flüssiges Material wird 1cm tief in den schattierten Bereich eingegossen. Wie viel der Flüssigkeit wird notwendig? (auch Wahrscheinlichkeitsrechnungen 158)



$$f(x) = x^2, \quad a = 0, \quad b = 1,$$

$$\int_0^1 f(x)dx = 1/3$$

- Eine Rennstrecke hat ein parabolisches Profil. An welcher Stelle ist die Neigung genau 45° aber vorher $< 45^\circ$ und nachher $> 45^\circ$? (auch Min/Max Probleme 122)



$$f(x) = x^2, \quad x_0 = 1/2,$$

$$f'(x_0) = 1$$

Warum diese Rechnungsarten zusammen studieren?

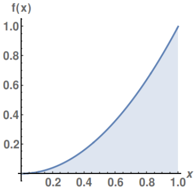
- Erstaunlicherweise gibt es eine Beziehung zwischen Integral- und Differentialrechnungen, und zwar

$$F(t) \overset{\text{heraus}}{=} F(0) + \overbrace{\int_0^t}^{\text{Flächeninhalt}} \underbrace{F'(x)}_{\text{Steigung}} dx \quad \overset{\text{hinein}}{\longleftarrow} \quad F(x)$$

  d.h. sie sind Umkehroperationen von einander:

  Eine Integralrechnung $\int$ einer Differentialrechnung $()'$ der Funktion F liefert F zurück!

- Für den Flächeninhalt auf Seite $\boxed{7}$ zeigen wir später:

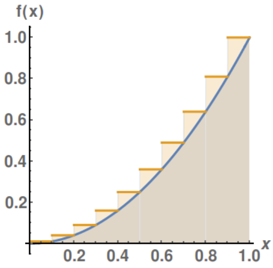


$$f(x) = x^2 = F'(x), \quad F(x) = x^3/3$$

$$\int_0^1 f(x)dx = F(1) - F(0) = 1/3$$

Was ist das neue Werkzeug?

- Für Integral- und Differentialrechnungen wird man mit Unendlichkeiten (Grenzwerten) vertraut!
- d.h. was passiert wenn Parameter unendlich groß oder unendlich klein werden?
- Für die Integralrechnung: Der *Grenzwert* ist



$$x_1 = \frac{1}{n}, \quad x_2 = \frac{2}{n}, \quad \cdots \quad x_i = \frac{i}{n}$$

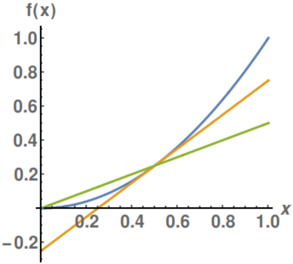
$$\Delta x = x_i - x_{i-1} = \frac{i}{n} - \frac{i-1}{n} = \frac{1}{n}$$

$$\int_0^1 x^2 dx \approx x_1^2 \Delta x + x_2^2 \Delta x + \cdots + x_n^2 \Delta x$$

$$= \left(\frac{1}{n}\right)^2 \frac{1}{n} + \left(\frac{2}{n}\right)^2 \frac{1}{n} + \cdots + \left(\frac{n}{n}\right)^2 \frac{1}{n} \xrightarrow{n \to \infty} \frac{1}{3}$$

Was ist das neue Werkzeug?

- Wie kann man diesen Grenzwert berechnen? Nicht durch Auswerten an der Stelle $n = \infty$!
- Für die Differentialrechnung: Der *Grenzwert* ist



$$f(x) = x^2, \quad x_0 = 1/2, \quad |h| \text{ klein}$$

$$\text{Steigung} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{(x_0+h) - x_0}$$

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{(x_0+h) - x_0} = \frac{(x_0+h)^2 - x_0^2}{h} \xrightarrow{h \to 0} 2x_0$$

- Wie kann man diesen Grenzwert berechnen? Nicht durch Auswerten an der Stelle $h = 0$!

Ziele die vor uns liegen

- Wir müssen zuerst mit *Funktionen* und ihren *Graphen* vertraut werden.
- Wir müssen zuerst mit *Grenzwerten* vertraut werden.
- Dann werden wir Integral- und Differentialrechnungen genau definieren und Rechenmethoden kennenlernen.
- Eine Extremstelle x_0 einer Funktion $f(x)$ erfüllt (meistens) $f'(x_0) = 0$, eine Gleichung, die wir nach x_0 auflösen können müssen. Beispiel: $f(x) = x^2$, $f'(x) = 2x$
- Eine Funktion $f(x)$ ist steigend für $f'(x) > 0$ und fallend für $f'(x) < 0$. Für solche Ungleichungen müssen wir die entsprechenden x-Werte finden können.
- Wir müssen Differentialrechnungen beherrschen, um entsprechende *Umkehroperationen* für Integralrechnungen zu machen. Beispiel: $f(x) = x^2 = F'(x)$, $F(x) = x^3/3$
- Schliesslich werden wir uns mit Verallgemeinerungen in mehreren Variablen beschäftigen.

Hausaufgaben, vgl. `Kapitel 2` im Lösungsheft

- Finden Sie Wolfram Mathematica,

  `http://www.wolfram.com/mathematica/`
- oder Wolfram Alpha,

  `http://www.wolframalpha.com/`
- wobei die letzte auch für das Handy verfügbar ist.

  Siehe Google Play oder die App Store.
- Lernen Sie die Software kennen, z.B.
  - `Plot[{x^2,(x-1/2)+1/4},{x,0,1}]`
  - `Plot[Evaluate[{x^2,D[x^2,x]}],{x,0,1}]`
  - `Integrate[x^2,{x,0,1}]`
  - `ContourPlot[x^2+y^2==1,{x,-1,1},{y,-1,1}]`
  - `Simplify[x^2+2x+1]`

  oder auch *Abkürzungen* davon – experimentieren!
- Da solche Software existiert, warum soll man diesen Stoff lernen? Überlegen Sie die automatische Übersetzung einer Sprache! Man muss sich mit der Sprache auskennen, bevor das Werkzeug nützlich wird!

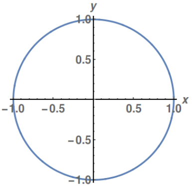
Relationen

Def: Eine *Relation* ist eine Beziehung zwischen den Elementen (x, y) eines geordneten Wertepaares. Der *Definitionsbereich* D besteht aus den x-Werten und der *Bildbereich* B besteht aus den y-Werten. Die Relation lässt sich typischerweise durch eine Gleichung mit x und y und einen Graphen darstellen.

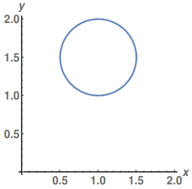
- Beispiel: Die Gleichung $\quad r > 0,\ x_0, y_0 \in \mathbb{R}$

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

stellt die Relation zwischen x und y in einem Kreis mit Zentrum (x_0, y_0) und Radius r dar:



$x_0 = 0 = y_0, \quad r = 1$
$D = [-1, 1] = B$



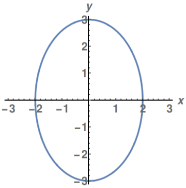
$x_0 = 1, \quad y_0 = 3/2, \quad r = 1/2$
$D = [1/2, 3/2], \quad B = [1, 2]$

Kreise und Ellipsen

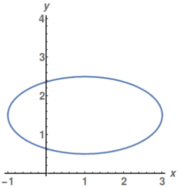
- Beispiel: Die Gleichung $\qquad r > 0,\ x_0, y_0 \in \mathbb{R}$

$$(x - x_0)^2/a^2 + (y - y_0)^2/b^2 = 1$$

stellt die Relation zwischen x und y in einer Ellipse mit Zentrum (x_0, y_0) und Längen a und b der x- bzw. y-Achsen.



$x_0 = 0 = y_0$
$a = 2, \quad b = 3$
$D = [-2, 2], \quad B = [-3, 3]$



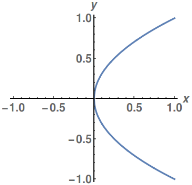
$x_0 = 1, \quad y_0 = 3/2$
$a = 2, \quad b = 1$
$D = [-1, 3], \quad B = [1/2, 5/2]$

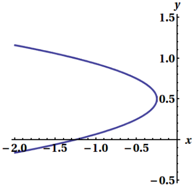
Parabeln

- Beispiel: Die Gleichung $\qquad a \neq 0,\ x_0, y_0 \in \mathbb{R}$

$$x = a(y - y_0)^2 + x_0$$

stellt die Relation zwischen x und y in einer waagerechten Parabel mit Scheitel (x_0, y_0) und senkrechtem Ausdehnungfaktor a dar: $\qquad \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$





$x_0 = 0 = y_0, \quad a = 1$
$D = [0, \infty), \quad B = \mathbb{R}$

$x_0 = -1/4, \quad y_0 = 1/2, \quad a = -4$
$D = (-\infty, -1/4], \quad B = \mathbb{R}$

- Was sind x_0, y_0 und a für $x = y^2 + 4y + 5$? der Graph?
Quadratische Ergänzung: $y^2 + 4y + 5 = (y + 2)^2 + 1$

Quadratische Ergänzung

- Beispiel:

$$x = [y^2 + 4y] + 5 = \Bigg[\underbrace{\left(y + \frac{4}{2}\right)^2}_{y^2+4y+4} - 4 \Bigg] + 5 = (y+2)^2 + 1$$

- Beispiel:

$$x = \underbrace{2y^2 - 12y}_{2[y^2-6y]} + 17 = 2\Bigg[\underbrace{\left(y - \frac{6}{2}\right)^2}_{y^2-6y+9} - 9 \Bigg] + 17 = 2(y-3)^2 - 1$$

- Im Allgemeinen, $a \neq 0,\ b, c \in \mathbb{R}$

$$ay^2 + by + c = a(y-\alpha)^2 + \beta$$

Man bestimmt α, β durch

$$a(y-\alpha)^2 + \beta = ay^2 - 2a\alpha y + a\alpha^2 + \beta \quad \Rightarrow \quad -2a\alpha = b, \quad a\alpha^2 + \beta = c$$

oder $\alpha = -b/(2a)$ und $\beta = c - a\alpha^2$.

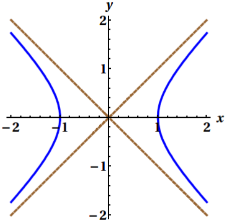
- Diese Lösung zeigt, quadratische Ergänzung kann immer durchgeführt werden.

Hyperbeln

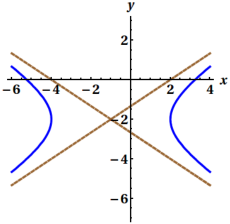
- Beispiel: Die Gleichung $\qquad a, b > 0,\ x_0, y_0 \in \mathbb{R}$

$$(x - x_0)^2/a^2 - (y - y_0)^2/b^2 = 1$$

stellt die Relation zwischen x und y in einer waagerechten Hyperbel mit Scheiteln $(x_0 - a, y_0)$ und $(x_0 + a, y_0)$ und Asymptoten $|(x - x_0)/a| = |(y - y_0)/b|$ dar: $\qquad (|X| = ?)$



$x_0 = 0 = y_0$
$a = 1, \quad b = 1$
$D = \mathbb{R} \backslash (-1, 1), \quad B = \mathbb{R}$



$x_0 = -1, \quad y_0 = -2$
$a = 3, \quad b = 2$
$D = \mathbb{R} \backslash (-4, 2), \quad B = \mathbb{R}$

Hausaufgaben, vgl. Kapitel 2 im Lösungsheft

- Für das letzte Beispiel kann man die Asymptoten $|(x - x_0)/a| = |(y - y_0)/b|$ durch die Geraden
  $$y = y_0 - (b/a)(x - x_0) \text{ und } y = y_0 + (b/a)(x - x_0)$$
  grafisch darstellen.
- Die stückweise Definition von $|X|$ ist

$$|X| = \sqrt{X^2} = \begin{cases} -X, & X \le 0 \\ X, & X \ge 0 \end{cases}$$

(0 in beiden Fällen?)
($\sqrt{X^2} \neq \pm X$!)

Für die folgenden Gleichungen

- $4 = 10 - 2x + x^2 - 12y + 4y^2$
- $0 = y^2 + y + 1 - x$
- $36 = -32 + 8x + 4x^2 - 36y - 9y^2$

sind folgende durch quadratische Ergänzung durchzuführen:

- die Art der Relation (den *Kegelschnitt*) erkennen,
- die Relation grafisch darstellen, und
- die Mengen D und B aus dem Graphen ablesen.

Hinweis: Jedes Beispiel erscheint oben in einer anderen Form.

Funktionen

Def: Eine *Funktion* ist eine Relation, in der es nur ein $y \in B$ für jedes $x \in D$ gibt.

- Beispiel: Die Gleichung $s, x_0, y_0 \in \mathbb{R}$

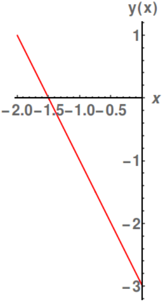
$$y(x) = s(x - x_0) + y_0$$

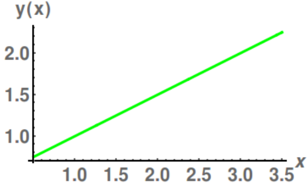
  stellt eine Funktion für x und $y(x)$ in einer Gerade mit Steigung s und y-Achsenabschnitt $a = y_0 - sx_0$.
- Der Punkt (x_0, y_0) liegt auf der Gerade.
- Es gelten $D = \mathbb{R}$ und $B = \mathbb{R}$ falls $s \neq 0$, sonst $B = \{y_0\}$.
- Wenn (x_1, y_1) ein anderer Punkt auf der Gerade ist, dann erfüllt die Steigung $s = (y_1 - y_0)/(x_1 - x_0)$.
- Für das Beispiel einer Hyperbel auf Seite 18 sind die Asymptoten durch $|(x + 1)/3| = |(y + 2)/2|$ gegeben, d.h. die 2 oben grafisch dargestellten Geraden,

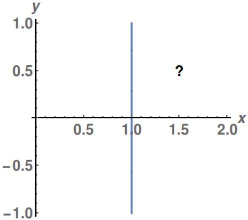
$$y_1(x) = \frac{2}{3}(x + 1) - 2 \quad \text{und} \quad y_2(x) = -\frac{2}{3}(x + 1) - 2.$$

Geraden

- Beispiel: Der Punkt $(x_0, y_0) = (-1, -1)$ liegt auf einer Gerade L_1 mit Steigung $s_1 = -2$.
  - Mit der Form $y(x) = s(x - x_0) + y_0$ ist L_1 gegeben durch
$$L_1 : \quad y(x) = -2(x + 1) - 1$$
- Beispiel: Die Punkte $P_0 = (1, 1)$ und $P_1 = (3, 2)$ liegen auf einer Gerade L_2. $((x_0, y_0) = (1, 1)?)$
  - Die Steigung ist $s_2 = (2 - 1)/(3 - 1) = 1/2$.
  - Mit der Form $y(x) = s(x - x_0) + y_0$ ist L_2 gegeben durch
$$L_2 : \quad y(x) = \frac{1}{2}(x - 1) + 1$$







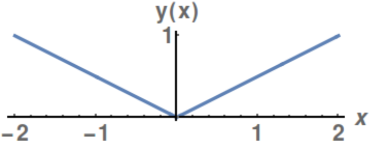
- Da $s_1 s_2 = -1$, liegen L_1 und L_2 senkrecht auf einander.

Betragsfunktion

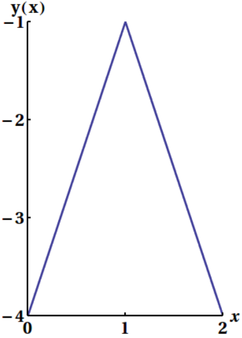
- Die Betragsfunktion mit Steigung s und Scheitel (x_0, y_0):

$$y(x) = s|x - x_0| + y_0 = \begin{cases} -s(x - x_0) + y_0, & x \leq x_0 \\ s(x - x_0) + y_0, & x \geq x_0 \end{cases}$$

- Ein *Scheitel* einer Kurve, die (noch möglicher Drehung) lokal u- oder v-förmige ist, ist eine Stelle einer kritischen Krümmung.



$x_0 = 0 = y_0, \quad s = 1/2$
$D = \mathbb{R}, \quad B = [0, \infty)$



$x_0 = 1, \quad y_0 = -1, \quad s = -3$
$D = \mathbb{R}, \quad B = (-\infty, -1]$

Betragsfunktion

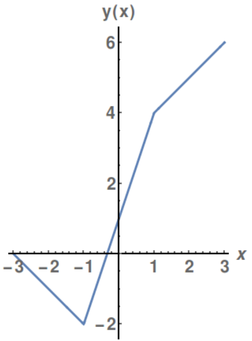
- Eine Summe von Betragsfunktionen, mit 2 Scheiteln,

$$y(x) = 2|x+1| - |x-1| = \begin{cases} -x-3, & x \in (-\infty, -1] \\ 3x+1, & x \in [-1, +1] \\ x+3, & x \in [+1, +\infty) \end{cases}$$

- Spitze für $2|x+1|$ in $x = -1$, Spitze für $|x-1|$ in $x = +1$.
- Die wichtigen Intervalle sind $(-\infty, -1]$, $[-1, +1]$ und $[+1, \infty)$:

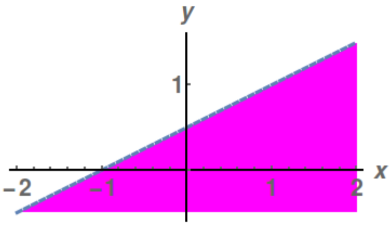
$$2|x+1| = \begin{cases} -2(x+1), & x \in (-\infty, -1] \\ +2(x+1), & x \in [-1, +1] \\ +2(x+1), & x \in [+1, +\infty) \end{cases}$$

$$-|x-1| = \begin{cases} +(x-1), & x \in (-\infty, -1] \\ +(x-1), & x \in [-1, +1] \\ -(x-1), & x \in [+1, +\infty) \end{cases}$$

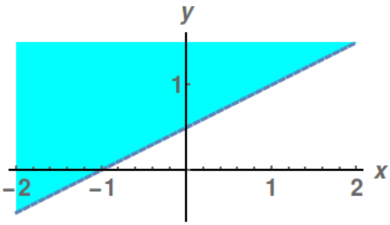


Ungleichungen und Funktionen

- Beispiel: Für die Funktion $y(x)$ stellen die Mengen
  $$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y < y(x)\} \quad \text{und} \quad \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > y(x)\}$$
  die zwei-dimensionalen Gebiete in
  $$\mathbb{R}^2 = \{(x,y) : x, y \in \mathbb{R}\} = (-\infty, +\infty) \times (-\infty, +\infty)$$
  unterhalb bzw. oberhalb der Kurve $y = y(x)$ dar.
- Für fixiertes x und $y < y(x)$, liegt $P = (x,y)$ unter $Q = (x, y(x))$.
- Für fixiertes x und $y > y(x)$, liegt $P = (x,y)$ über $Q = (x, y(x))$.



$y < y(x) = (x-1)/2 + 1$



$y > y(x) = (x-1)/2 + 1$

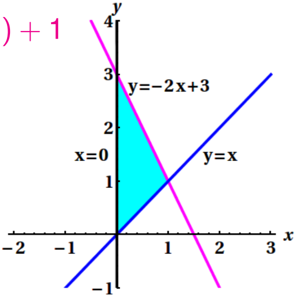
Ungleichungen und Funktionen

- Beispiel: Das Dreieck D inklusive seines Randes und mit Eckpunkten $(0,0)$, $(0,3)$ und $(1,1)$ stellt man durch Ungleichungen und eine Grafik dar.
- Die 3 Seiten des Dreiecks liegen auf 3 Geraden.
- Man erinnert sich an die Gleichung einer Gerade durch Punkte $P_0 = (x_0, y_0)$ und $P_1 = (x_1, y_1)$,

$$y(x) = s(x - x_0) + y_0, \quad s = (y_1 - y_0)/(x_1 - x_0) \in \mathbb{R}, \quad \text{sonst} \quad x = x_0 (= x_1)$$

- Die drei Geraden am Rand des Dreiecks sind

$$\begin{aligned}
P_0 = (0,0), \quad P_1 = (1,1) \quad &\Rightarrow \quad y = x \\
P_0 = (1,1), \quad P_1 = (0,3) \quad &\Rightarrow \quad y = -2(x-1)+1 \\
P_0 = (0,0), \quad P_1 = (0,3) \quad &\Rightarrow \quad x = 0
\end{aligned}$$



- Das Dreieck lässt sich so darstellen:

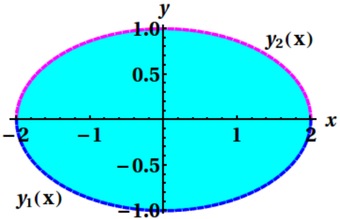
$$\begin{aligned}
D &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\} \quad \cap \\
&\quad\ \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x\} \quad \cap \\
&\quad\ \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq -2x+3\} \\
&= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, x \leq y \leq -2x+3\}
\end{aligned}$$

Ungleichungen und Funktionen

- Beispiel: Die *Relation* $x^2/4 + y^2 = 1$ stellt eine Ellipse dar, aber das Innere der Ellipse lässt sich so darstellen:

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2/4 + y^2 < 1\}$$

- Die *untere* und *obere* Teile der Ellipse lassen sich durch die Funktionen $y_1(x)$ bzw. $y_2(x)$ darstellen: $(x^2/4 + y_{1,2}(x)^2 = 1)$



$$\begin{aligned} y^2 &= 1 - x^2/4 \\ |y| = \sqrt{y^2} &= \sqrt{1 - x^2/4} && (\sqrt{y^2} \neq \pm y\ !) \\ y_1(x) &= -\sqrt{1 - x^2/4} && \text{(unterer Teil)} \\ y_2(x) &= +\sqrt{1 - x^2/4} && \text{(oberer Teil)} \end{aligned}$$

- Mit diesen Funktionen hat das Innere die Darstellung:

$$\begin{aligned} E &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in (-2, 2),\ y_1(x) < y\} \quad \cap \\ &\ \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in (-2, 2),\ y < y_2(x)\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in (-2, 2),\ y_1(x) < y < y_2(x)\} \end{aligned}$$

die für die Grafik genützt werden kann.

Quadratische Polynome

- Das quadratische Polynom $\qquad a \neq 0, b, c, x_0, y_0 \in \mathbb{R}$
$$y(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2 + y_0$$
entspricht einer senkrechten Parabel mit waagerechtem Ausdehnungfaktor a und Scheitel (x_0, y_0).
- Durch quadratische Ergänzung
$$a(x - x_0)^2 + y_0 = ax^2 - 2ax_0x + ax_0^2 + y_0$$
ist der Scheitel gegeben durch
$$x_0 = -b/(2a), \quad y_0 = c - ax_0^2.$$
- Wenn $a > 0$ gilt, entspricht der Scheitel einem Minimumpunkt für $y(x)$. Sonst für $a < 0$ entspricht der Scheitel einem Maximumpunkt für $y(x)$.
- Die Nullstellen für $y(x)$ sind
$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
und es gilt $y(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Quadratische Polynome

- Falls die so-genannte *Diskriminante* $D = b^2 - 4ac$ (der Radikand der Wurzel) $D < 0$ erfüllt, sind die Nullstellen komplex, d.h. Elemente der Menge
$$\mathbb{C} = \{z = x + \imath y : x, y \in \mathbb{R}\}$$
wobei $\imath^2 = -1$, und $x = \Re\{z\}$ und $y = \Im\{z\}$ sind die *reele* bzw. *imaginäre* Teile von z.
- Komplexe Zahlen haben viele wichtigen Anwendungen, die außerhalb des Rahmens dieser Lehrveranstaltung liegen, aber hier sind sie z.B. so nützlich: 64.
- Falls $x_{1,2} \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ gilt, sind im Graphen der Funktion $y(x)$ in $\mathbb{R}^2$ keine Kreuzungen mit der x-Achse zu sehen.
- Für $y(x) = ax^2 + bx + c$ findet man die Mengen
$Y_+ = \{x \in \mathbb{R} : y(x) > 0\}$ oder $Y_- = \{x \in \mathbb{R} : y(x) < 0\}$
zuerst durch Bestimmung der Nullstellen $x_{1,2}$.

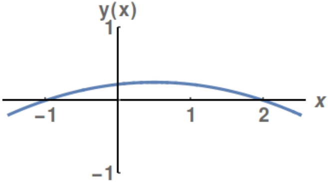
  Falls $x_{1,2} \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ gilt, folgt
$$y(x) = a(x - x_0)^2 + y_0 \quad \begin{cases} \geq y_0 > 0 \text{ für } a > 0 \\ \leq y_0 < 0 \text{ für } a < 0 \end{cases}$$

Quadratische Polynome

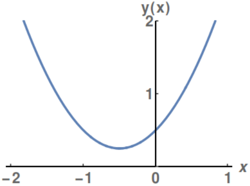
Falls $x_{1,2} \in \mathbb{R}$ gilt, bestimmt man Y_+, Y_- durch die Darstellung $y(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ und eine Tabelle folgender Art.

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 2)$	$(2, \infty)$
$-\frac{1}{9}$	$\ominus$	$\ominus$	$\ominus$
$(x + 1)$	$\ominus$	$\oplus$	$\oplus$
$(x - 2)$	$\ominus$	$\ominus$	$\oplus$
$y(x)$	$\ominus$	$\oplus$	$\ominus$

z.B. unten links



$$y(x) = \frac{1}{9}(2 + x - x^2)$$
$$x_{1,2} = -1, 2, \ (x_0, y_0) = (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4})$$
$$D = \mathbb{R}, B = (-\infty, \tfrac{1}{4}]$$
$$Y_+ = (-1, 2), Y_- = \mathbb{R}\backslash[-1, 2]$$

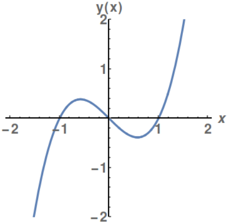


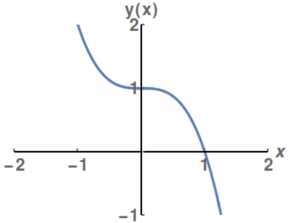
$$y(x) = x^2 + x + \frac{1}{2}$$
$$x_{1,2} = \frac{1}{2}(-1 \pm \imath), \ (x_0, y_0) = (-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4})$$
$$D = \mathbb{R}, B = [\tfrac{1}{4}, \infty)$$
$$Y_+ = \mathbb{R}, Y_- = \emptyset$$

Kubische Polynome

Fundamentalsatz der Algebra: Jedes Polynom $n$ten Grades $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ hat n Nullstellen $\{x_1, \ldots, x_n\}$.
Erlaubt sind $\{a_0, \ldots, a_n\}, \{x_1, \ldots, x_n\} \subset \mathbb{C}$ und $x_i = x_j$ für $i \neq j$.

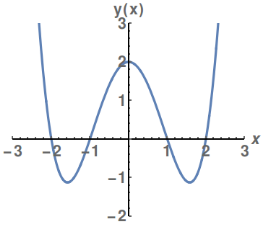
- Das kubische Polynom $\qquad a \neq 0, b, c, d \in \mathbb{R}$
$$y(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d = (ax^2 + \mu x + \nu)(x - x_3)$$
$$\text{mit } \nu = -d/x_3 \text{ und } \mu = b + ax_3 = -(d + cx_3)/x_3^2$$
hat mindestens eine reele Nullstelle $x_3 \in \mathbb{R}$.
- Die anderen 2 sind Nullstellen des quadratischen Polynoms $ax^2 + \mu x + \nu = a(x - x_1)(x - x_2)$, möglicherweise mit $x_{1,2} \in \mathbb{C}$.
- Beispiele: $y(x) = x^3 - x$ bzw. $y(x) = 1 - x^3$, $D = \mathbb{R} = B$.



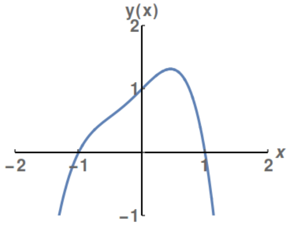


Biquadratische Polynome

- Das biquadratische Polynom $\quad a_4 \neq 0,\ a_3, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$
$$y(x) = a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$
hat 4 Nullstellen $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ mit allen, einigen oder keinen in $\mathbb{R}$, die restlichen in $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$.
- Während für kubische Polynome maximal *eine* Hochstelle und maximal *eine* Tiefstelle möglich sind, sind bis auf 3 Extremstellen möglich für biquadratische Polynome.
- Beispiele: $y(x) = (4 - 5x^2 + x^4)/2 = (x^2 - 1)(x^2 - 4)/2$ bzw. $y(x) = 1 + x - x^3 - x^4 = (1 - x^2)(x^2 + x + 1)$.



$D = \mathbb{R}, B = [-\frac{9}{8}, \infty)$



$D = \mathbb{R}, B = (-\infty, \mu], \ \mu \approx 1.3$

Polynomdivision

- Um z.B. $y(x) = 1 + x - x^3 - x^4$ zu faktorisieren, kann mann Polynomdivision durchführen.
- Für Polynome 2., 3. und 4. Grades gibt es algebraische Formeln für die Nullstellen, aber ab dem 5. Grad nicht mehr!
- Jedoch merkt man, $y(1) = 0$ und daher ist $(x-1)$ ein Faktor, d.h. es gibt ein Polynom $p(x)$ mit $y(x) = (x-1)p(x)$.
- Durch Polynomdivision ergibt sich,

$$
\begin{array}{cccccccccc}
 & -x^4 & -x^3 & & +x & +1 & \div & x-1 & = & -x^3-2x^2-2x-1 \\
\ominus & -x^4 & +x^3 & & & & & & & \\
\hline
 & 0 & -2x^3 & & +x & +1 & & & & \\
\ominus & & -2x^3 & +2x^2 & & & & & & \\
\hline
 & & 0 & -2x^2 & +x & +1 & & & & \\
\ominus & & & -2x^2 & +2x & & & & & \\
\hline
 & & & 0 & -x & +1 & & & & \\
\ominus & & & & -x & +1 & & & & \\
\hline
 & & & & 0 & 0 & & & &
\end{array}
$$

- Ähnlich für $p(x) = -x^3 - 2x^2 - 2x - 1$ merkt man, $p(-1) = 0$, und durch Polynomdivision ergeben sich $p(x) = (x+1)(-1-x-x^2)$ und $y(x) = (1-x^2)(x^2+x+1)$.

Hausaufgaben, vgl. `Kapitel 2&3` im Lösungsheft

- Man findet Funktionen für die Asymptoten der Hyperbel $4(x+1)^2 - 9(y-2)^2 = 36$ und stellt diese grafisch dar.
- Man findet Formeln für die Geraden durch $(-1, 0)$ und $(-3, 7)$ bzw. durch $(13, -2)$ und $(13, 7)$.
- Man findet die Scheitel der Funktionen $y_1(x) = 1 - 2|x+1|$ und $y_2(x) = 2|x-1|$ und stellt die Funktionen grafisch dar. Dann stellt man $y(x) = y_1(x) + y_2(x)$ grafisch dar.
- Das Dreieck mit Eckpunkten $(1, 1)$, $(3, 1)$ und $(3, 2)$ stellt man grafisch und mit Formeln als Menge dar.
- Man stellt die Menge $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 < 1\}$ in $\mathbb{R}^2$ grafisch dar.
- Man bestimmt die Mengen $\{x \in \mathbb{R} : x^2 - 3x + 2 < 0\}$ und $\{x \in \mathbb{R} : (x+2)(x^2-1) > 0\}$.
- Man findet die Nullstellen der Polynome $y_1(x) = 2x^3 - 2x$, $y_2(x) = 3 - 3x^3$, $y_3(x) = 4 - 5x^2 + x^4$ und $y_4(x) = 6(1 + x - x^3 - x^4)$ und stellt diese grafisch dar.

Rationale Funktionen

- Eine *rationale Funktion* ist ein Quotient von Polynomen,

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}, \quad p \in \mathcal{P}_n, \quad q \in \mathcal{P}_m$$

  wobei $\mathcal{P}_n$ die Polynome höchstens *n*ten Grades darstellt.
- Wenn $n \neq m$, gelten für $|x| \to \infty$,

$$|r(x)| \to \begin{cases} \infty, & n > m \\ 0, & m > n \end{cases}$$

  weil eines der Polynome schneller wächst als das andere.
- Wenn $n = m$ und

$$\begin{aligned} p(x) &= p_n x^n + p_{n-1} x^{n-1} + \cdots + p_0 \\ q(x) &= q_n x^n + q_{n-1} x^{n-1} + \cdots + q_0 \end{aligned}$$

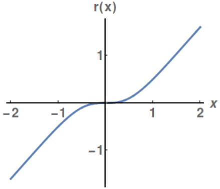
  dann gilt für $|x| \to \infty$,

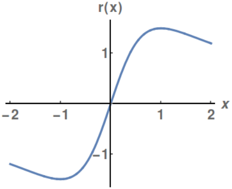
$$r(x) = \frac{p_n x^n + \cdots + p_0}{q_n x^n + \cdots + q_0} \left(\frac{x^{-n}}{x^{-n}} \right) = \frac{p_n + p_{n-1} x^{-1} + \cdots + p_0 x^{-n}}{q_n + q_{n-1} x^{-1} + \cdots + q_0 x^{-n}} \xrightarrow{|x| \to \infty} \frac{p_n}{q_n}$$

  weil $x^{-k} = 1/x^k \to 0$ für $k > 0$ und $|x| \to \infty$.

Rationale Funktionen

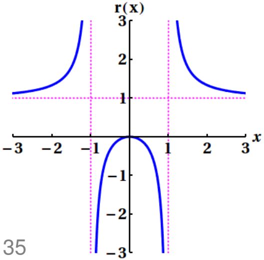
- Wenn $q(x_0) = 0 \neq p(x_0)$, gilt $|r(x)| \to \infty$ für $x \to x_0$ (*Polstelle*).
- Beispiele: $r(x) = x^3/(1+x^2)$ bzw. $r(x) = 3x/(1+x^2)$:





$D = \mathbb{R} = B$ $\qquad$ $D = \mathbb{R}, B = [-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$

- Beispiel: $r(x) = x^2/(x^2-1)$: $\qquad = x^2/[(x-1)(x+1)]$



	$(-\infty,-1)$		$(-1,0)$		$(0,+1)$		$(+1,+\infty)$
x^2	$\oplus$		$\oplus$		$\oplus$		$\oplus$
$(x-1)$	$\ominus$		$\ominus$		$\ominus$		$\oplus$
$(x+1)$	$\ominus$		$\oplus$		$\oplus$		$\oplus$
$r(x)$	$\oplus$	$+\infty\|-\infty$	$\ominus$	0	$\ominus$	$-\infty\|+\infty$	$\oplus$

$$D = \mathbb{R}\backslash\{\pm 1\}, \quad B = \mathbb{R}\backslash(0,1]$$

Stetige und nicht stetige Funktionen

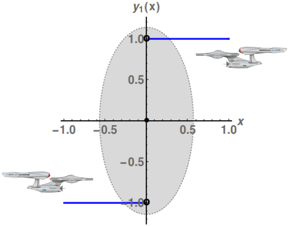
- Vom letzten Beispiel: $y_3(x) = x^2/(x^2-1)$, $x \neq \pm 1$, $y_3(\pm 1) = 0$, erfüllt $|y_3(x)| \to \infty$ für $x \to \pm 1$, und man sagt:

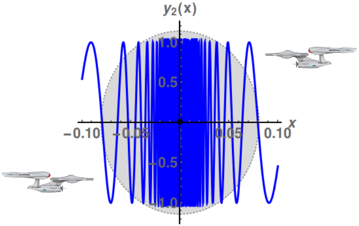
  $y_3(x)$ ist nicht stetig an den Stellen $x = \pm 1$.

Informelle Def: Eine Funktion $y(x)$ ist *stetig* an der Stelle x_0, wenn der Graph an dieser Stelle ununterbrochen ist.
Möglichkeiten für Unstetigkeiten sind:

1. Sprünge, z.B. y_1
2. unendlich schnelle Schwingungen z.B. y_2
3. und Unendlichkeiten, z.B. y_3

- Beispiele: $y_1(x) = \mathrm{sign}(x)$ bzw. $y_2(x) = \sin(1/x)$, $y_2(0) = 0$,





$D = \mathbb{R}, B = \{-1, 0, 1\}$ $\qquad$ $D = \mathbb{R}, B = [-1, 1]$

Bisektionsverfahren

- Wenn eine Funktion stetig ist, muss sie eine Nullstelle in einem Intervall (a, b) haben, wenn $y(a) < 0$ und $y(b) > 0$ oder $y(a) > 0$ und $y(b) < 0$, d.h. $y(a) \cdot y(b) < 0$.
- Unter diesen Bedingungen kann das *Bisektionsverfahren* verwendet werden, um eine Nullstelle zu finden.
- Man sucht eine Nullstelle des kubischen Polynoms

$$y(x) = 1 + x + x^2 + x^3$$

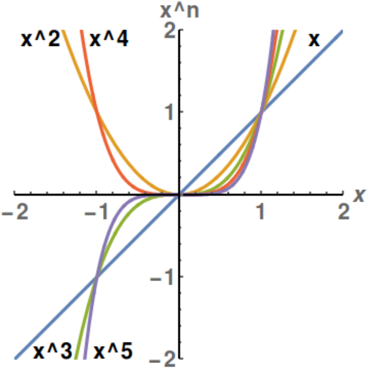
Es gelten $y(x) \overset{x \to -\infty}{\longrightarrow} -\infty$ und $y(x) \overset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
Anhand dieser Hinweise findet man mit $a = -10$ und $b = 10$, es gelten $y(a) = -909 < 0$ und $y(b) = 1111 > 0$.
- Bisektionsverfahren: Man wiederholt die Iteration bis $|a - b|$ oder $|y(c)|$ ausreichend klein sind:

$$c = \frac{a + b}{2}, \quad \begin{cases} a \leftarrow c, & y(a) \cdot y(c) > 0 \\ b \leftarrow c, & y(b) \cdot y(c) > 0 \end{cases}$$

- Für das kubische Polynom findet man $y(-1) = 0$ und daher $y(x) = (1 + x)(1 + x^2)$, also sind die Nullstellen $\{-1, \pm\imath\}$.

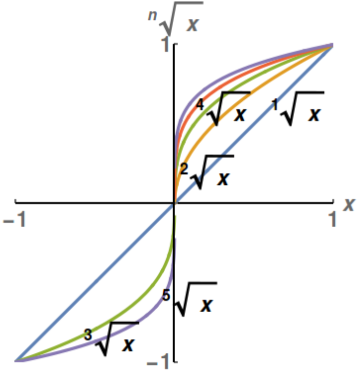
Potenzfunktionen

- Potenzfuntionen der Form $y(x) = x^n$ und $y(x) = \sqrt[n]{x}$ für $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$: $(\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}, \mathbb{Z} = -\mathbb{N} \cup \mathbb{N}_0)$



$D = \mathbb{R}, B = [0, \infty), n \in 2\mathbb{N}$

$D = \mathbb{R}, B = \mathbb{R}, n \in 2\mathbb{N} - 1$



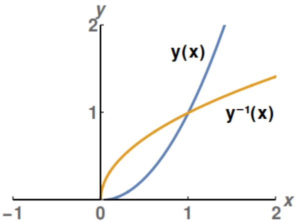
$D = B = [0, \infty), n \in 2\mathbb{N}$

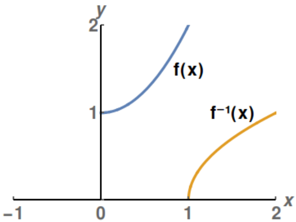
$D = B = \mathbb{R}, n \in 2\mathbb{N} - 1$

- Man versteht $x^{m/n} = \sqrt[n]{x^m}$, $m, n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{ggT}(m, n) = 1$. Sonst x^p, $p \in \mathbb{R}$, $(x \geq 0)$ durch $\tilde{x}^{\tilde{p}} \to x^p$, $\tilde{x}, \tilde{p} \in \mathbb{Q} = \{m/n : m, n \in \mathbb{Z}\}$.
- Graphen $(x \geq 0)$ für $p \in [1, \infty)$ wie links, für $p \in (0, 1]$ wie rechts.

Umkehrfunktionen

- Die Graphen für $y(x) = \sqrt[n]{x}$ sind (eingeschränkte) Spiegelungen durch die Mediane $y = x$ von den Graphen für $y(x) = x^n$. Dies ist aber kein Zufall.
- Z.B. für $y(x) = x^2$ mit eingeschränktem $D_y = [0, \infty) = B_y$ ist die Spiegelung durch die Mediane gegeben durch die Funktion $y^{-1}(x) = \sqrt{x}$ mit $D_{y^{-1}} = B_y$ und $B_{y^{-1}} = D_y$.





- Für $f(x) = 1 + x^2$ mit eingeschränktem $D_f = [0, \infty)$ und folglich $B_f = [1, \infty)$ ist die Spiegelung gegeben durch die Funktion $f^{-1}(x) = \sqrt{x - 1}$ mit $D_{f^{-1}} = B_f$ und $B_{f^{-1}} = D_f$.

Umkehrfunktionen

- Die Einschränkung für D_f ist notwendig, damit die Spiegelung eine Funktion ist:
  - Die Spiegelung ist eine Funktion, wenn jede senkrechte Gerade den Graphen von f^{-1} höchstens einmal trifft.
  - Dies gescheht genau dann, wenn jede waagerechte Gerade den Graphen von f höchstens einmal trifft.
  - So wird die Einschränkung für D_f bestimmt.
- Man merkt, f^{-1} macht die Wirkung von f *rückgängig*,

$$f(f^{-1}(x)) = f(\sqrt{x-1}) = (\sqrt{x-1})^2 + 1 = x, \quad \forall x \in D_{f^{-1}} = [1, \infty)$$

und umgekehrt

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(x^2+1) = \sqrt{(x^2+1)-1} = |x| = x, \quad \forall x \in D_f = [0, \infty).$$

- Die Funktion f^{-1} ist die *Umkehrfunktion* von f.
- Wegen der Spiegelung gelten immer: $D_f = B_{f^{-1}}$ und $D_{f^{-1}} = B_f$.
- Man bestimmt die Formel für f^{-1} durch

$$x = f(f^{-1}(x)) = (f^{-1}(x))^2 + 1, \quad \forall x \in D_{f^{-1}} = B_f = [1, \infty)$$

$$x \in [1, \infty) \Rightarrow (f^{-1}(x))^2 = x - 1 \geq 0 \stackrel{B_{f^{-1}} = D_f}{\Rightarrow} f^{-1}(x) = \sqrt{x-1}$$

Komposition von Funktionen

- Die Gleichung $f(f^{-1}(x)) = x$, $\forall x \in D_{f^{-1}}$, ist eine *Komposition* oder *Hintereinanderausführung* der 2 Funktionen f und f^{-1}.
- Allgemeiner ist
$$f(g(x)) = (f \circ g)(x), \quad \forall x \in D_g \text{ mit } g(x) \in D_f$$
eine Komposition der 2 Funktionen f und g.
- Beispiel: Für
$$f(x) = 1/\sqrt{1 - x^2}, \quad D_f = (-1, +1)$$
$$g(x) = \sqrt{x}, \quad D_g = [0, \infty)$$
ist die Komposition gegeben durch
$$f(g(x)) = \frac{1}{\sqrt{1 - g(x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x}}, \quad \forall x \in [0, \infty) \text{ mit } \sqrt{x} \in (-1, +1),$$
d.h. $\forall x \in [0, 1)$. (nicht $\forall x \in (-\infty, +1)$!)

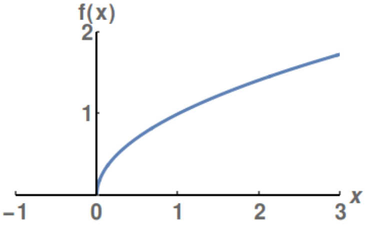
Hausaufgabe: Man wertet f in den g-Werten im Graphen von g aus, erstellt den Graphen von $f \circ g$ und liest $D_{f \circ g} = [0, 1)$ und $B_{f \circ g} = [1, \infty)$ ab.

Hausaufgaben, vgl. `Kapitel 4` im Lösungsheft

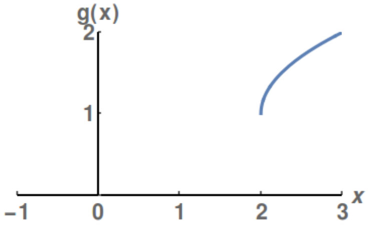
- Man findet die waagerechten und senkrechten Asymptoten sowohl die Nulstellen der rationalen Funktion $r(x) = (x^2 - 3x + 2)/(2x^2 - 14x + 24)$.
- Man implementiert das Bisektionsverfahren, um $\sqrt{2}$ zu berechnen. Hinweis: $\sqrt{2}$ ist eine Nullstelle für $y(x) = x^2 - 2$.
- Was ist ein Beispiel einer Funktion, für welche das Bisektionsverfahren keine Nullstelle liefert?
- Man schreibt die Funktion $\phi(x) = x^{\frac{2}{3}}$ als eine Komposition $\phi = f \circ g$ mit $f(x) = x^2$ und $D_f = \mathbb{R} = D_g$ sowie $D_{f \circ g} = \mathbb{R}$.
- Man stellt die Funktionen $\phi(x) = \sqrt[3]{x^2}$ und $\psi(x) = \sqrt[3]{x^2}/(1 + x^2)$ grafisch dar. Man liest die Mengen D_ϕ, B_ϕ und D_ψ, B_ψ von den Graphen ab.
- Durch Einschränkungen der Menge D_ϕ und folglich B_ϕ bestimmt man eine Umkehrfunktion $\phi^{-1}(x)$, die $\phi^{-1}(\phi(x)) = x, \forall x \in D_\phi$ erfüllt.

Translationen und Streckungen von Funktionen

- Durch eine Verschiebung (Translation) des Graphen von $y = f(x)$ zum neuen Ursprung (x_0, y_0) bekommt man den Graphen von $y - y_0 = f(x - x_0)$ oder $y = g(x) = y_0 + f(x - x_0)$.
- Beispiel $f(x) = \sqrt{x}$ und $g(x) = 1 + \sqrt{x-2}$,



$D_f = [0, \infty), B_f = [0, \infty)$

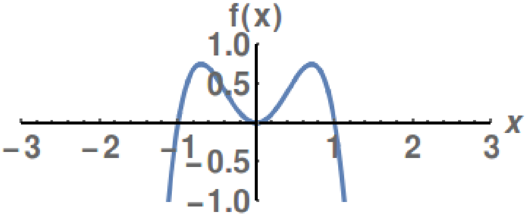


$D_g = [2, \infty), B_g = [1, \infty)$

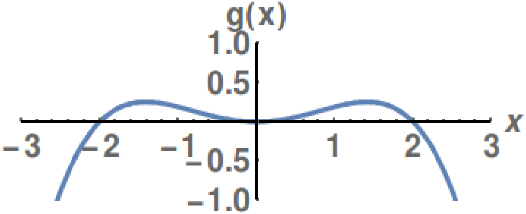
- Man bekommt den Graphen von $\nu y = f(\mu x)$ oder $y = g(x) = f(\mu x)/\nu$ durch eine Ausdehnung ($\mu \in (0, 1)$ oder $\nu \in (0, 1)$) oder eine Stauchung ($\mu \in (1, \infty)$ oder $\nu \in (1, \infty)$) (Streckung) des Graphen von $y = f(x)$.

Translationen und Streckungen von Funktionen

- Beispiel: $f(x) = 3x^2(1 - x^2)$ und $g(x) = 3(x/2)^2(1 - (x/2)^2)/3$ $= \frac{1}{16}x^2(4 - x^2)$ (Ausdehnung in x, Stauchung in y),



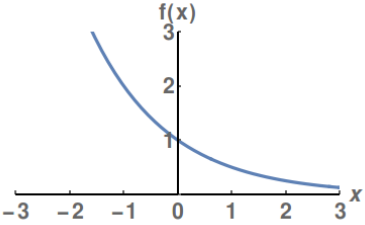
$$D_f = \mathbb{R}, B_f = (-\infty, \tfrac{3}{4}]$$



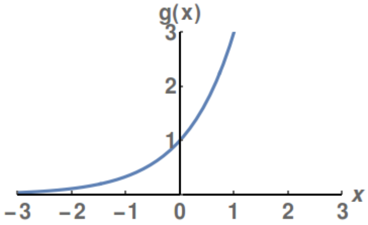
$$D_g = \mathbb{R}, B_g = (-\infty, \tfrac{1}{4}]$$

Exponentialfunktionen

- Für eine *Basis* $a \in \mathbb{R}_+ = (0, \infty)$ versteht man die *Exponentialfunktion* $y(x) = a^x = \exp_a(x)$, $x \in \mathbb{R}$, (wie für Potenzfunktionen) durch $\tilde{a}^{\tilde{x}} \to a^x$, $\tilde{a}, \tilde{x} \in \mathbb{Q}$.
- Für $a \in (0, 1)$ ist a^x fallend, für $a \in (1, \infty)$ ist a^x steigend.
- Beispiele: $f(x) = (1/2)^x = 2^{-x}$ bzw. $g(x) = 3^x$.



$D_f = \mathbb{R}, B_f = \mathbb{R}_+$



$D_g = \mathbb{R}, B_g = \mathbb{R}_+$

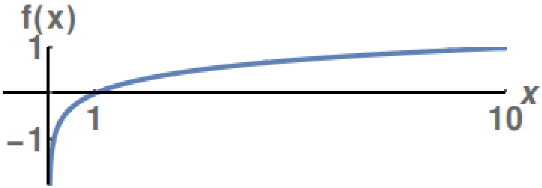
- Eine besondere Basis ist gegeben durch die *Eulersche Zahl* $a = e \notin \mathbb{Q}$, $e \approx 2.71828$, die definiert ist durch

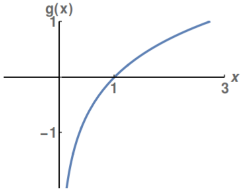
$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow{n \to \infty} e \qquad = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$$

$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1$
$2! = 2 \cdot 1$
usw

Logarithmusfunktionen

- Jede waagerechte Gerade trifft den Graphen der Exponentialfunktion $y(x) = a^x$, $a \in \mathbb{R}_+$, höchstens einmal.
- Daher ist die Spiegelung durch die Mediane eine Funktion, und zwar die Umkehrfunktion $y^{-1}(x) = \log_a(x)$.
- Beispiele: $f(x) = \log_{10}(x)$ bzw. $g(x) = \log_e(x) = \ln(x)$,





$D_f = \mathbb{R}_+, B_f = \mathbb{R}$ $\qquad$ $D_g = \mathbb{R}_+, B_g = \mathbb{R}$

- Da die Exponentialfunktion $y(x) = a^x$ und die logarithmische Funktion $y^{-1}(x) = \log_a(x)$ Umkehrfunktionen sind, gelten

$$y(y^{-1}(x)) = a^{\log_a x} = x, \quad \forall x \in D_{\log_a} = \mathbb{R}_+$$
$$y^{-1}(y(x)) = \log_a a^x = x, \quad \forall x \in D_{\exp_a} = \mathbb{R}$$

Logarithmusfunktionen

- Weitere Eigenschaften der Logarithmen sind

$$\begin{aligned}\log_a(xy) &= \log_a(x) + \log_a(y)\\ \log_a(x/y) &= \log_a(x) - \log_a(y)\\ \log_a(x^p) &= p\log_a(x)\end{aligned}$$

- Man kann die Basis so ändern

$$\log_a(x) = \log_a(b^{\log_b(x)}) = \log_b(x)\log_a(b)$$

- Beispiel: Der Zerfall einer radioaktiven Substanz mit Halbwertzeit $\hat{t} = 1/3$ wird mit der Funktion $y(t) = 7e^{-\lambda t}$ dargestellt. Das unbekannte λ erfüllt

$$7 = y(0) = 2y(\hat{t}) = 2y(1/3) = 14e^{-\lambda/3}.$$

Man löst nach λ auf,

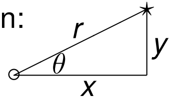
$$\begin{array}{lcr} \ln(\cdot) & | & \ln(7) = \ln(14e^{-\lambda/3}) = \ln(14) + \ln(e^{-\lambda/3})\\ -\ln(14) & | & \ln(7/14) = \ln(7) - \ln(14) = \ln(e^{-\lambda/3}) = -\lambda/3\\ -3\times & & \ln(8) = \ln(2^{+3}) = -3\ln(2^{-1}) = \lambda. \end{array}$$

Dann gilt $y(t) = 7e^{-\ln(8)t} = 7e^{\ln(8^{-t})} = 7\cdot 8^{-t}$.

Winkelfunktionen

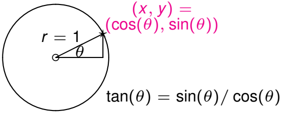
Ankathete (x)
Gegenkathete (y)
Hypotenuse (r)

- Oft lernt man die Winkelfunktionen durch folgende Beziehungen für ein rechtwinkliges Dreieck kennen:



$$\cos(\theta) = x/r, \quad \sin(\theta) = y/r, \quad \tan(\theta) = y/x$$

- Allgemeiner kann man diese mit dem Einheitskreis definieren. Mit $r = 1$ oben seien $\circ$ im Zentrum und $\star$ am Kreis:



- Weiters gelten (vgl. Seite 87)

$$\cot(\theta) = 1/\tan(\theta), \quad \sec(\theta) = 1/\cos(\theta), \quad \csc(\theta) = 1/\sin(\theta).$$

- Als Maß eines Winkels wird Bogenmaß nicht Gradmaß für die Winkelfunktionen verwendet, wobei Bogenmaß der Länge eines Bogens auf dem Einheitskreis entspricht.
- Wegen der Beziehung $u = 2\pi r$ zwischen Umfang u und Radius r eines Kreises gilt

$$\text{Bogenmaß} = \frac{2\pi}{360}\text{Gradmaß}$$

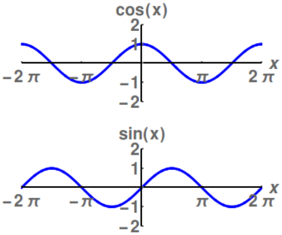
z.B. $90^\circ = \pi/2$ rad (Radianten), $45^\circ = \pi/4$ rad, usw.

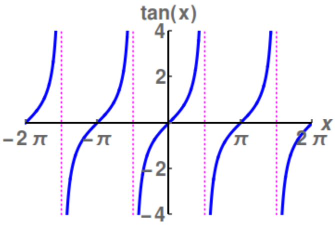
Winkelfunktionen

- Wohlbekannte Beispiele der Werte für die Winkelfunktionen sind: $(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$, warum?)

$$
\begin{array}{rclrcl}
(\cos(0), \sin(0)) & = & (1, 0) & \tan(0) & = & 0 \\
(\cos(\frac{\pi}{6}), \sin(\frac{\pi}{6})) & = & (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}) & \tan(\frac{\pi}{6}) & = & \frac{1}{\sqrt{3}} \\
(\cos(\frac{\pi}{4}), \sin(\frac{\pi}{4})) & = & (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) & \tan(\frac{\pi}{4}) & = & 1 \\
(\cos(\frac{\pi}{3}), \sin(\frac{\pi}{3})) & = & (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) & \tan(\frac{\pi}{3}) & = & \sqrt{3} \\
(\cos(\frac{\pi}{2}), \sin(\frac{\pi}{2})) & = & (0, 1) & \tan(\frac{\pi}{2}) & = & ?
\end{array}
$$

- Durch Spiegelungen kann man die Winkelfunktion z.B. für $\theta = -\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{7\pi}{6}$, usw., aus den obigen Fällen bestimmen.
- Die Graphen dieser *periodischen* Winkelfunktionen sind:





Hausaufgaben, vgl. Kapitel 4 im Lösungsheft

- Anhand des Graphen für $\phi(x) = x^{\frac{2}{3}}$ stellt man $\psi(x) = 2 + (x-1)^{\frac{2}{3}}$ und $\gamma(x) = 2(3x)^{\frac{2}{3}}$ grafisch dar.
- Man stellt die Exponentialfunktion $y_\lambda(x) = \exp(-\lambda x)$ für verschiedene $\lambda \in \mathbb{R}$ grafisch dar. $D, B = ?$
- Man stellt die logarithmische Funktion $y_\mu(x) = \ln(\mu x)$ für verschiedene $\mu \in \mathbb{R}_+$ grafisch dar. $D, B = ?$
- Man stellt die Funktionen $f_\nu(x) = e^{1-\nu x}$ und $g_\nu(x) = \ln(1+\nu x)$ für verschiedene $\nu \in \mathbb{R}$ grafisch dar. $D, B = ?$
- Man findet die Werte von λ, die $3(1-e^\lambda) = 2(1-e^{2\lambda})$ erfüllen. Hinweis: Man löst nach $x = e^\lambda$ auf und setzt $\lambda = \ln(x)$.
- Man erklärt warum es gilt $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$.
- Man berechnet die Winkelfunktionen für $\theta = -\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{7\pi}{6}$.
- Man stellt $\cot(\theta)$, $\sec(\theta)$ und $\csc(\theta)$ grafisch dar.
- Durch eine (notwendige) Einschränkung der Menge D und folglich B für jede Winkelfunktion bestimmt man grafisch eine entsprechende Umkehrfunktion.

Konzept eines Grenzwerts

- In der Einführung [10] sieht man folgende *Grenzwerte*,

$$\int_0^1 x^2 dx \approx \underbrace{\left(\frac{1}{n}\right)^2 \frac{1}{n}}_{x_1^2 \Delta x} + \underbrace{\left(\frac{2}{n}\right)^2 \frac{1}{n}}_{x_2^2 \Delta x} + \cdots + \underbrace{\left(\frac{n}{n}\right)^2 \frac{1}{n}}_{x_n^2 \Delta x} = S(n) \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{3}$$

und [11] mit $f(x) = x^2$,

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{(x_0+h) - x_0} = \frac{(x_0+h)^2 - x_0^2}{h} = Q(h) \xrightarrow{h\to 0} 2x_0$$

- Im ersten Fall ist Auswertung bei $n = \infty$ nicht möglich, aber man sieht das Ergebnis, wenn n unendlich groß wird:

n	10^1	10^2	10^3	10^4
Summe $S(n)$	0.385	0.33835	0.333833	0.333383

- Im zweiten Fall ist Auswertung bei $h = 0$ nicht möglich, aber man sieht das Ergebnis, wenn h unendlich klein wird:

$x_0 = 1/2$

h	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}
Quotient $Q(h)$	1.1	1.01	1.001	1.0001

Grenzwert und Stetigkeit Definiert

Informelle Def: Ein *Grenzwert* L einer Funktion $y(x)$ an einer Stelle $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ ist der Wert, der von $y(x)$ angenähert wird, während x_0 von x *beliebig* angenähert wird.

$$\text{Man schreibt den Limes :} \quad \lim_{x \to x_0} y(x) = L.$$

Wenn $y(x_0)$ existiert und mit dem Grenzwert übereinstimmt, d.h. $L = y(x_0)$, dann ist die Funktion $y(x)$ *stetig* an der Stelle x_0. Jedoch ist Stetigkeit nicht notwendig für die Existenz eines Grenzwerts L.

Die Funktion hat einen *einseitigen Grenzwert*,

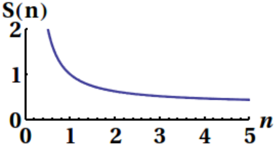
$$\lim_{x \to x_0^-} y(x) = L^-, \qquad \lim_{x \to x_0^+} y(x) = L^+$$

wenn L^- von $y(x)$ angenähert wird, während x_0 von $x < x_0$ angenähert wird, oder wenn L^+ von $y(x)$ angenähert wird, während x_0 von $x > x_0$ angenähert wird.

Konzept eines Grenzwerts

- Für das Beispiel mit Flächeninhalt für $f(x) = x^2$ über $[0, 1]$,

Summe: $$S(n) = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$$

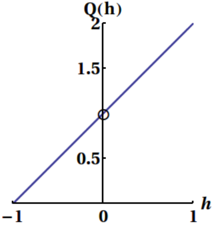


$$\lim_{n\to\infty} S(n) = \frac{1}{3}$$

obwohl $S(\infty)$ nicht existiert.

- Für das Beispiel mit Steigung in $x_0 = 1/2$ für $f(x) = x^2$,

Quotient: $$Q(h) = \frac{(1/2+h)^2 - (1/2)^2}{h}$$



$$\lim_{h\to 0} Q(h) = 1$$

obwohl $Q(0)$ nicht existiert.

- Wenn die Lücke mit $(0, 1)$ gefüllt wird, wird $Q(h)$ *stetig ergänzt*.

Methoden zur Bestimmung eines Grenzwerts

- Für das Beispiel mit Flächeninhalt für $f(x) = x^2$ über $[0, 1]$,

$$S(n) = \frac{2n^2 + 3n + 1}{6n^2} \left(\frac{n^{-2}}{n^{-2}} \right) = \frac{2 + 3n^{-1} + n^{-2}}{6} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{3}$$

weil $n^{-1} = 1/n \to 0$ und $n^{-2} = 1/n^2 \to 0$ für $n \to \infty$.

Satz: Für $p > 0$ gelten $\lim_{x\to+\infty} x^{-p} = 0$ und $\lim_{x\to-\infty} |x|^{-p} = 0$.

- Für das Beispiel mit Steigung in $x_0 = 1/2$ für $f(x) = x^2$,

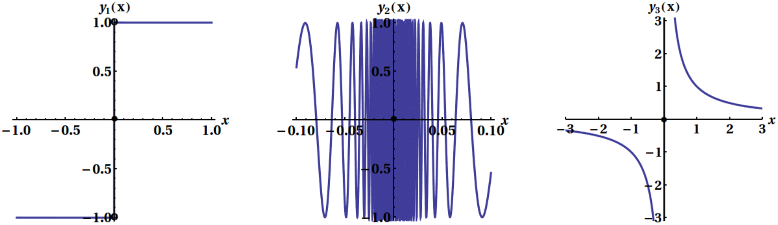
$$Q(h) = \frac{(1/2 + h)^2 - (1/2)^2}{h} = \frac{h + h^2}{h} = 1 + h \stackrel{h\to 0}{\longrightarrow} 1$$

weil das Polynom $p(h) = 1 + h$ überall stetig ist, d.h. $p(h) \to p(h_0)$, $h \to h_0$, $\forall h_0 \in \mathbb{R}$.

Satz: Für Polynome $p(x)$ und $q(x)$ (erlaubt ist auch $q(x) = 1$) ist die rationale Funktion $r(x) = p(x)/q(x)$ stetig in $x_0 \in \mathbb{R}$, wenn $q(x_0) \neq 0$, d.h. $\lim_{x\to x_0} r(x) = r(x_0)$.

Konzept der Stetigkeit

- Die folgenden Funktionen sind nicht stetig in $x_0 = 0$, aber sonst sind sie stetig. Gibt es aber Grenzwerte in $x_0 = 0$?



- Im ersten Fall mit $y_1(x) = \text{sign}(x)$ existieren die einseitigen Grenzwerte (warum?)

$$\lim_{x \to 0^+} y_1(x) = +1, \qquad \lim_{x \to 0^-} y_1(x) = -1$$

aber $y_1(0) = 0$ stimmt mit diesen nicht überein.

Konzept der Stetigkeit

- Im zweiten Fall mit $y_2(x) = \sin(1/x)$, $x \neq 0$, $y_2(0) = 0$, existieren die einseitigen Grenzwerte in 0 nicht.
- Hausaufgabe für diese schwingende Funktion:
  - Finden Sie unendlich viele positive und negative x-Stellen beliebig nah bei $x_0 = 0$, in denen $y_2(x) = +1$ gilt.
  - Finden Sie unendlich viele positive und negative x-Stellen beliebig nah bei $x_0 = 0$, in denen $y_2(x) = -1$ gilt.
  - Schließen Sie, es gibt keinen Grenzwert in $x_0 = 0$, tatsächlich keine einseitigen Grenzwerte, da $+1$ und -1 (sowie alle Werte in $[-1, +1]$) von $y_2(x)$ angenähert werden *können*, während $x_0 = 0$ von $x > 0$ oder $x < 0$ in bestimmter Weise angenähert wird.
- Hinweis: Die Hügel und die Täler der Sinus-Funktion sind:

$$\sin(2k\pi + \pi/2) = +1, \quad \sin(2k\pi - \pi/2) = -1, \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Uneigentliche Grenzwerte

- Für den dritten Fall mit $y_3(x) = 1/x$, $x \neq 0$, $y_3(0) = 0$, gelten
$$\lim_{x \to 0^-} y_3(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to 0^+} y_3(x) = +\infty.$$

Informelle Def: Eine Funktion $y(x)$ hat einen *uneigentlichen Grenzwert* in x_0 wenn $y(x)$ oder $-y(x)$ unendlich groß wird, während x_0 von x angenähert wird. Für die jeweiligen Fälle schreibt man

$$\lim_{x \to x_0} y(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to x_0} y(x) = -\infty.$$

Die Funktion hat einen uneigentlichen einseitigen Grenzwert in x_0, wenn $y(x)$ oder $-y(x)$ unendlich groß wird, während x_0 von $x < x_0$ oder $x > x_0$ angenähert wird. Für die jeweiligen Fälle schreibt man

$$\lim_{x \to x_0^-} y(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to x_0^-} y(x) = -\infty,$$
$$\lim_{x \to x_0^+} y(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to x_0^+} y(x) = -\infty.$$

Uneigentliche Grenzwerte

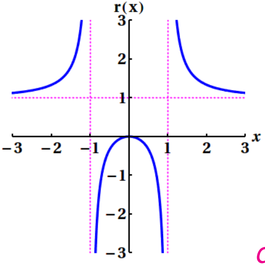
- Für eine rationale Funktion $r(x) = p(x)/q(x)$ mit einer Polstelle in x_0, d.h. $p \in \mathcal{P}_n$, $q \in \mathcal{P}_m$, $q(x_0) = 0 \neq p(x_0)$,

$$\lim_{x \to x_0^-} r(x) = \begin{cases} +\infty, & p(x_0^-) \cdot q(x_0^-) > 0 \\ -\infty, & p(x_0^-) \cdot q(x_0^-) < 0 \end{cases}$$

und

$$\lim_{x \to x_0^+} r(x) = \begin{cases} +\infty, & p(x_0^+) \cdot q(x_0^+) > 0 \\ -\infty, & p(x_0^+) \cdot q(x_0^+) < 0 \end{cases}$$

- Beispiel: $r(x) = x^2/(x^2 - 1)$ auf Seite 35.



$$\begin{array}{lllll} r(x) & \to & +\infty, & x & \to & 1^+ \\ r(x) & \to & -\infty, & x & \to & 1^- \\ r(x) & \to & -\infty, & x & \to & -1^+ \\ r(x) & \to & +\infty, & x & \to & -1^- \\ r(x) & \to & 1, & x & \to & \pm\infty \end{array}$$

$$p(x) = x^2 > 0, \quad x \neq 0$$

$$q(x) = (x-1)(x+1) \begin{cases} > 0, & x \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1] \\ < 0, & x \in (-1, 1) \end{cases}$$

Methoden zur Bestimmung eines Grenzwerts

Satz: Für die rationale Funktion

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p_n x^n + \cdots + p_0}{q_m x^m + \cdots + q_0} \overset{|x|\to\infty}{=} \rho x^{n-m} + \text{vernachlässigbar}$$

mit $\rho = p_n/q_m$ gelten

$$\lim_{x\to\pm\infty} r(x) \overset{n=m}{=} \rho \qquad \lim_{x\to\pm\infty} r(x) \overset{n<m}{=} 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} r(x) \overset{n>m}{=} \begin{cases} +\infty, & \rho > 0 \\ -\infty, & \rho < 0 \end{cases}$$

und

$$\lim_{x\to-\infty} r(x) \overset{n>m}{=} \begin{cases} +\infty, & \rho > 0, \quad n-m \in 2\mathbb{N} & \text{oder} \\ & \rho < 0, \quad n-m \in 2\mathbb{N}-1 \\ -\infty, & \rho > 0, \quad n-m \in 2\mathbb{N}-1 & \text{oder} \\ & \rho < 0, \quad n-m \in 2\mathbb{N} \end{cases}$$

Satz: Für $p > 0$ und $n \in 2\mathbb{N}-1$ gelten

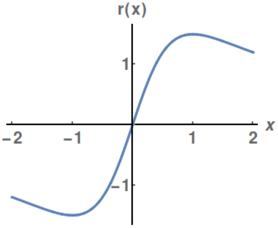
$$\lim_{x\to\pm\infty} |x|^p = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} x^n = -\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} x^{1/n} = -\infty.$$

Methoden zur Bestimmung eines Grenzwerts

- Beispiele: die rationalen Funktionen auf Seite 35.
  $r(x) = 3x/(1+x^2)$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x}{1+x^2}\left(\frac{x^{-2}}{x^{-2}}\right)$$

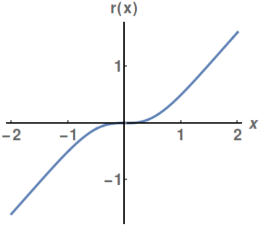
$$= \lim_{x\to+\infty} \underbrace{x^{-1}}_{\to 0} \underbrace{\frac{3}{1+x^{-2}}}_{\to 3} = 0$$



und $r(x) = x^3/(1+x^2)$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{1+x^2}\left(\frac{x^{-2}}{x^{-2}}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \underbrace{x}_{\to+\infty} \underbrace{\frac{1}{x^{-2}+1}}_{\to 1} = +\infty$$



$r(x) = x^3/(1-x^2),\ x \to \pm\infty$?

Stetigkeit der Bekannten Funktionen

Die folgenden Funktionen sind stetig auf dem eigenen D:

- Polynome $p(x) = p_n x^n + \cdots + p_0$, $D = \mathbb{R}$.
- Rationale Funktionen $r(x) = p(x)/q(x)$, $D = \{x \in \mathbb{R} : q(x) \neq 0\}$.
- Betragsfunktion $y(x) = |x|$, $D = \mathbb{R}$.
- Potenzfunktionen $\phi(x) = \sqrt[n]{x}$, $D \overset{n \in 2\mathbb{N}-1}{=} \mathbb{R}$, $D \overset{n \in 2\mathbb{N}}{=} [0, \infty)$.
- Potenzfunktionen $\psi(x) = x^p{}_{\ (p \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})}$, $D \overset{p>0}{=} [0, \infty)$, $D \overset{p<0}{=} \mathbb{R}_+$.
- Exponentialfunktionen $y(x) = \exp_a(x)$, $D = \mathbb{R}$.
- Logarithmusfunktionen $y(x) = \log_a(x)$, $D = \mathbb{R}_+$.
- Winkelfunktionen $\phi(x) = \cos(x)$, $\psi(x) = \sin(x)$, $D = \mathbb{R}$, $\gamma(x) = \tan(x)$, $D = \mathbb{R}\setminus\{\pi/2 + \pi\mathbb{Z}\}$.
- Summen, Produkte der obigen $f + g$, $f \cdot g$, $D = D_f \cap D_g$.
- Quotienten der obigen f/g, $D = \{x \in D_f \cap D_g : g(x) \neq 0\}$.
- Translationen der obigen $f(x - x_0) + y_0$, $D = D_f + x_0$.
- Streckungen der obigen $\alpha f(\beta x)$, $D = D_f/\beta$.
- Kompositionen der obigen $f(g(x))$, $D = \{x \in D_g : g(x) \in D_f\}$.

Methoden zur Bestimmung eines Grenzwerts

Basierend auf den obigen Stetigkeits-Eigenschaften bestimmt man Grenzwerte für die folgenden Beispiele einfach durch Auswertung im Definitionsbereich D:

$$\lim_{x\to x_0} y(x) = y(x_0), \quad \forall x_0 \in D$$

- $y(x) = 1 + 2|x-3|$, $D = \mathbb{R}$.
- $y(x) = \sqrt{(3x-2-x^2)/(x^2+x-2)}$, $D = (-2,+2]\backslash\{+1\}$.
- $y(x) = \sqrt[3]{x/(1-x)}$, $D = \mathbb{R}\backslash\{1\}$.
- $y(x) = |x|^{2/3}/(1+x^2) = \sqrt[3]{x^2}/(1+x^2)$, $D = \mathbb{R}$.
- $y(x) = (x-7)^\pi \stackrel{x\neq 7}{=} \exp(\pi \ln(x-7))$, $D = [7,+\infty)$.
- $y(x) = |x| \ln|x|$, $D = \mathbb{R}\backslash\{0\}$.
- $y(x) = 1/(1+e^{-x})$, $D = \mathbb{R}$.
- $y(x) = \cos(\pi(x-3)) + \sin(\pi(x-2))$, $D = \mathbb{R}$.
- $y(x) = \tan(\pi x/2)$, $D = \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$

Hausaufgabe: Zur Überzeugung stellt man diese grafisch dar.

Methoden zur Bestimmung eines Grenzwerts

- Wegen der alternativen Darstellung (vgl. Seite $\boxed{45}$),

$$e^x = \frac{1}{0!} + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

  ist es nachvollziehbar, dass die Exponentialfunktion schneller als jedes Polynom wächst,

$$\lim_{x \to +\infty} x^n / e^x = 0, \quad n \in \mathbb{N}$$

- Weiters für $p > 0$ und $a > 1$ (sonstige Fälle?)

$$\lim_{x \to +\infty} x^p / a^x = 0, \quad \lim_{x \to -\infty} |x|^p a^x = 0$$

- Dann mit $p = 1$ und $x = \log_a(t^q)$, $q > 0$, lassen sich diese Regeln für die Exponentialfunktion mit der logarithmischen Funktion so umschreiben:

$$\lim_{t \to \infty} \log_a(t)/t^q = 0, \quad \lim_{t \to 0^+} \log_a(t) t^q = 0.$$

- Mit fortgeschritten Methoden: $\boxed{134}$.

Methoden zur Bestimmung eines Grenzwerts

- Mit den Eulerschen Formeln,

$$e^{\imath x} = \cos(x) + \imath \sin(x), \quad \cos(x) = \frac{e^{\imath x} + e^{-\imath x}}{2}, \quad \sin(x) = \frac{e^{\imath x} - e^{-\imath x}}{2\imath}$$

gibt es die alternativen Darstellungen, (wie genau?)

$$\begin{aligned} \cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \\ \sin(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \end{aligned}$$

- So sind die folgenden Grenzwerte nachvollziehbar,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1, \quad \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

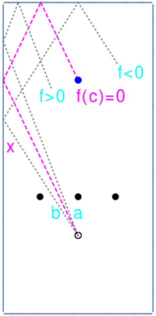
- Man interpretiert diese Formeln anhand der Graphen der Winkelfunktionen.

Zwischenwertsatz

Satz: Wenn eine Funktion $f(x)$ in einem Intervall $[a, b]$ stetig ist, und der Wert λ zwischen $f(a)$ und $f(b)$ liegt, dann existiert eine Stelle $c \in [a, b]$ in der $f(c) = \lambda$ gilt.

Folgerung: Wenn $f(x)$ in $[a, b]$ stetig ist und $f(a) \cdot f(b) < 0$ gilt, dann existiert eine Stelle $c \in (a, b)$ in der $f(c) = 0$ gilt. $(\lambda = 0)$

- Man spielt Billard und muss über Banden schießen, um eine versteckte Kugel anzuspielen.
  - Sei x der Winkel zwischen der Laufbahn des Spielballs und der (ersten) Bande, die der geschossene Spielball trifft.
  - Auf der Laufbahn des Spielballs sei $|f(x)|$ der minimale Abstand zum Zielball, und es gelten $f(x) > 0$ beim Rechtsfahren und $f(x) < 0$ beim Linksfahren.
  - Mit offenem Auge sieht man, ein Winkel $x = a$ führt zum Rechtsfahren und ein Winkel $x = b$ führt zum Linksfahren.
  - Weil $f(x)$ vom Winkel x stetig abhängt, gibt es einen Winkel $c \in (a, b)$ mit $f(c) = 0$.
  - Man versucht die Abschätzung von a und b visuell zu verbessern (durch ein natürliches Bisektionsverfahren), bis der gewinnende Winkel c geleistet wird.



Bisektionsverfahren

- Man erinnert sich an das Bisektionsverfahren: Die Iteration wird wiederholt, bis $|a - b|$ oder $|f(c)|$ ausreichend klein sind:

$$f(a) \cdot f(b) < 0 \qquad c = \frac{a+b}{2}, \quad \begin{cases} a \leftarrow c, & f(a) \cdot f(c) > 0 \\ b \leftarrow c, & f(b) \cdot f(c) > 0 \end{cases}$$

- Beispiel: Man findet eine Nullstelle für $f(x) = 1 + x^3 + x^5$.

  (Es gibt keine algebraische Formel für die Nullstellen eines quintischen Polynoms!)

  Man merkt, $f(-1) = -1$ und $f(0) = 1$, also $a = -1$, $b = 0$.

c	$f(c)$	a	b
−0.5000	0.8438	−1.0000	0.0000
−0.7500	0.3408	−1.0000	−0.5000
−0.8750	−0.1828	−1.0000	−0.7500
−0.8125	0.1095	−0.8750	−0.7500
−0.8438	−0.0283	−0.8750	−0.8125
−0.8281	0.0426	−0.8438	−0.8125
−0.8359	0.0077	−0.8438	−0.8281
−0.8398	−0.0102	−0.8438	−0.8359
−0.8379	−0.0012	−0.8398	−0.8359

$\Rightarrow f(-0.84) \approx 0$

Zwischenwertsatz und das Bisektionsverfahren

- Beispiel: Der Chef stellt ein Computerprogramm zur Verfügung, das $P(x)$ den Profit der Firma in Abhängigkeit vom Produktionsniveau x durch Simulation berechnet.
  - Die Aufgabe ist, das (gefährliche) Produktionsniveau $x = c$ zu finden, in dem $P(c) = 0$ gilt.
  - Durch Versuch und Irrtum findet man Stellen $x = a$ und $x = b$, in denen $P(a) < 0$ und $P(b) > 0$ gelten.
  - Man lässt das Bisektionsverfahren durch 10^6 Iterationen laufen, aber es ergibt sich immer noch keine Stelle c, in der $P(c) \approx 0$ gilt.
  - Was könnte das Problem sein? Wie könnte die grafische Darstellung der Profit-Funktion aussehen?
  - Welche Annahmen des Zwischenwertsatzes werden verletzt?

- Beispiel (vgl. Seite $\boxed{130}$): Einheitspreis $p(x) = \frac{3}{x+1}$, Umsatz $U(x) = xp(x)$, Kosten $K(x) = \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}(3 - \operatorname{sign}(x-1))$, Profit $P(x) = U(x) - K(x)$, $P(0.2) \approx -0.74$, $P(17) \approx 1.2$.

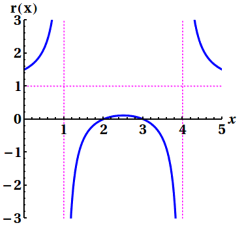
Zwischenwertsatz

Folgerung: Sei $f(x)$ stetig in (a,b) mit keinen Nullstellen. Dann

- $c \in (a,b),\ f(c) > 0 \ \Rightarrow\ f(x) > 0,\ \forall x \in (a,b)$ (sonst...)
- $c \in (a,b),\ f(c) < 0 \ \Rightarrow\ f(x) < 0,\ \forall x \in (a,b)$ (sonst...)

▸ Beispiel: Man untersucht die rationale Funktion als ob die Grafik nicht bekannt wäre:

$$r(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 5x + 4}$$



Nullstellen: $x_{1,2} = (5 \pm \sqrt{25 - 24})/2 = \{2, 3\}$

Polstellen: $x_{1,2} = (5 \pm \sqrt{25 - 16})/2 = \{1, 4\}$

$r(x)$ ist stetig in $D = \mathbb{R} \setminus \{1, 4\}$ und erfüllt $r(2) = r(3) = 0$.

$$\begin{array}{lclclcl}
r(0) & = & +3/2 & > 0 & \Rightarrow & r(x) > 0 \text{ in } (-\infty, 1) \\
r(3/2) & = & -3/5 & < 0 & \Rightarrow & r(x) < 0 \text{ in } (1, 2) \\
r(5/2) & = & +1/9 & > 0 & \Rightarrow & r(x) > 0 \text{ in } (2, 3) \\
r(7/2) & = & -3/5 & < 0 & \Rightarrow & r(x) < 0 \text{ in } (3, 4) \\
r(5) & = & +3/2 & > 0 & \Rightarrow & r(x) > 0 \text{ in } (4, \infty)
\end{array}$$

Folgen und Reihen

Informelle Def: Eine Folge $\{y_i\}_{i=1}^{\infty}$ ist nichts anders als eine Funktion mit dem Definitionsbereich $D = \mathbb{N}$. Eine Reihe $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ ist eine Folge von Summen der Elemente einer Folge, $s_n = \sum_{i=1}^{n} y_i$.

- Beispiel: Die Folge $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$ stellt man mit $\{y_i\}_{i=1}^{\infty}$, $y_i = f(i)$, $i \in \mathbb{N}$, dar, wobei $f(x) = 1/x$ und

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{i\to\infty} y_i = 0.$$

- Beispiel: Für das Beispiel mit Flächeninhalt für $f(x) = x^2$ über $[0, 1]$ mittels der Teilung $\{x_i = i/n\}_{i=0}^{n}$ mit $\Delta x = 1/n$,

$$s_n = x_1^2 \Delta x + \dots + x_n^2 \Delta x \quad = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \Delta x \approx \int_0^1 x^2 dx$$

lässt sich die Folge der Summen $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ mit $s_n = S(n)$, $n \in \mathbb{N}$, darstellen, wobei $S(x) = (2x^2 + 3x + 1)/(6x^2)$, und

$$\lim_{x\to\infty} S(x) = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{3}.$$

Summenformeln

- Die Folge $\{n^3 s_n\}_{n=1}^\infty = \{\sum_{i=1}^n i^2\}_{n=1}^\infty$ ist eine *Reihe* und

$$s_n = \sum_{i=1}^n x_i^2 \Delta x = \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n}\right)^2 \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{1}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{3}.$$

- Bekannte Formeln für solche Reihen sind, z.B.

$$\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n i = \frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{n^4}\sum_{i=1}^n i^3 = \frac{1}{n^4}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{4}$$

- Die *geometrische Reihe* erfüllt $(r = \pm 1 \Rightarrow ?)$

$$\sum_{i=0}^{n-1} r^i = \frac{1-r^n}{1-r} \xrightarrow{n\to\infty} \begin{cases} 1/(1-r), & |r| < 1 \\ +\infty, & r > 1 \end{cases}$$

- Man merkt, die *geometrische Folge* $\{r^n\}_{n=0}^\infty$, $r \in (0,1)$, lässt sich durch die Exponentialfunktion $r^n = g(n)$, $g(x) = r^x$, darstellen, und $(r > 1 \Rightarrow ?)$

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} r^n = 0.$$

Methoden zur Bestimmung eines Grenzwerts

- Genau wie bei den allgemeineren Beispielen,

$$\frac{n(n+1)}{2n^2}\left(\frac{n^{-2}}{n^{-2}}\right) = \frac{1(1+1/n)}{2} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2}$$

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}\left(\frac{n^{-3}}{n^{-3}}\right) = \frac{1(1+1/n)(2+1/n)}{6} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

- Durch die Eigenschaften einer geometrischen Folge,

$$\frac{1+2^n}{1+3^n}\left(\frac{3^{-n}}{3^{-n}}\right) = \frac{(1/3)^n + (2/3)^n}{(1/3)^n + 1} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{0+0}{0+1} = 0$$

Satz (Sandwich): Mit $a(x) \leq b(x) \leq c(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}_+$, folgt

$$\lim_{x\to\infty} b(x) = L \quad \text{aus} \quad \lim_{x\to\infty} a(x) = L = \lim_{x\to\infty} c(x)$$

- Beispiel: Mit $b_n = \sin(n)/n$ zeigt man $b_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$, mit dem Sandwich $a_n \leq b_n \leq c_n$, wobei $a_n = -1/n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ und $c_n = +1/n \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

Hausaufgaben, vgl. `Kapitel 5&6` im Lösungsheft

- Durch Auswertungen immer näher bei der Stelle $x = 0$ schätzt man den Grenzwert ab: $\lim_{x\to 0} \exp(-1/x^2)$.
- Durch die Komposition $y = f \circ g$, $y(x) = \exp(-1/x^2)$, $f(x) = \exp(-x)$, $g(x) = 1/x^2$, bestimmt man den Grenzwert: $\lim_{x\to 0} \exp(-1/x^2)$.
- Durch Auswertungen immer näher bei der Stelle $x = 0$ schätzt man die einseitigen und möglicherweise uneigentlichen Grenzwerte ab: $\lim_{x\to 0^\pm} \exp(1/x)$.
- Durch die Komposition $y = f \circ g$, $y(x) = \exp(1/x)$, $f(x) = \exp(x)$, $g(x) = 1/x$, bestimmt man die einseitigen und möglicherweise uneigentlichen Grenzwerte: $\lim_{x\to 0^\pm} \exp(1/x)$.
- Der Flächeninhalt des Dreiecks mit Eckpunkten $(0,0)$, $(1,0)$ und $(1,1)$ ist 1/2. Der ist auch das Integral von $f(x) = x$ über $[0,1]$. Man nähert diesen Flächeninhalt durch eine Summe der Flächeninhalte der Vierecke an: $[x_{i-1}, x_i] \times [0, f(x_i)]$, $x_i = i/n$, $i = 1, \ldots, n$, $n \to \infty$.

Hausaufgaben

- Für die Funktion $f(x) = x^3$ bestimmt man die Steigung einer Sekante durch die Punkte $(x_0, f(x_0))$ und $(x_0 + h, f(x_0 + h))$. Man berechnet die Steigung der Tangente in $(1/3, f(1/3))$ durch den Grenzwert $h \to 0$.
- Man gibt Beispiele von Funktionen an, die wegen (a) Sprünge (nicht $\operatorname{sign}(x)$), (b) Schwingungen (nicht $\sin(1/x)$) oder (c) Unendlichkeiten (nicht $1/x$) nicht stetig sind, und man erklärt präsiz, wo und warum die ausgewählten Funktionen nicht stetig sind.
- Bei den Beispielen der letzten Hausaufgabe, erklärt man präsiz, wo und warum diese Funktionen doch stetig sind.
- Man gibt ein Beispiel einer Funktion an, die positive und negative Werte besitzt, aber das Bisektionsverfahren liefert keine Nullstellen.
- Man stellt sich ein alltägliches Beispiel vor, in dem ein Laie das Bisektionsverfahren implizit benutzt.
- Mit dem Bisektionsverfahren findet man annäherungsweise eine Nullstelle der Funktion $f(x) = x^2 + \ln(e^{-1} + |x|)$.

Hausaufgaben

- Man findet eine Nullstelle für $\phi(x) = \cos(\pi x) + \sin(\pi x)$. Hinweise: Man verwendet Bisektion oder man merkt mit
$$\cos(a \pm b) = \cos(a)\cos(b) \mp \sin(a)\sin(b)$$
$$\sin(a \pm b) = \sin(a)\cos(b) \pm \sin(b)\cos(a)$$
es gilt $\phi(x) = \sqrt{2}\cos(\pi(x - 1/4))$. Außerdem gilt $\phi(x) = 0$ genau dann wenn $\tan(\pi x) = -1$.
- Für die Beispiele auf Seite 62 stellt man jede Funktion grafisch dar und merkt wo diese nicht stetig sind.
- Man findet die Intervalle in denen $r(x) = (x^2 - 3x + 2)/(x^2 - 7x + 12)$ positiv bzw. negativ ist. Man bestimmt die waagerechten und senkrechten Asymptoten. Man bestimmt die uneigentlichen einseitigen Grenzwerte. Man bestimmt die Grenzwerte für unendlich großes $|x|$. Man stellt $r(x)$ grafisch dar.
- Man gibt Beispiele von rationalen Funktionen an, die erfüllen (a) $r(x) \to 0$, $|x| \to \infty$, (b) $r(x) \to +\infty$, $|x| \to \infty$ bzw. (c) $r(x) \to +\infty$, $x \to -\infty$ und $r(x) \to -\infty$, $x \to +\infty$.

Hausaufgaben

- Man berechnet die Grenzwerte:

$$\begin{array}{llll}
(x^4-1)/(x^2-1), & x \to 1 & \sqrt[3]{x}\sin(x), & x \to 0 \\
(1+2^x)/(e^x+3^{-x}), & x \to +\infty & \sin(x)/|x|, & x \to +\infty \\
(1+x)4^{-x}, & x \to +\infty & \log_2(x)/\sqrt{x}, & x \to +\infty \\
5^x/(1+x+x^2), & x \to -\infty & \sqrt{x}\ln(x), & x \to 0 \\
\sin(x^2)/x^2, & x \to 1 & \tan(\pi x/2), & x \to 1^{\pm}
\end{array}$$

- Bei einer Feier wollen 15 Teilnehmer mit Sektgläsern anstoßen, und man sagt voraus, wie viele Gläserklänge es geben wird. Hinweis: Die 1. Person stoßt mit 14 anderen Teilnehmern an, die 2. Person stoßt mit noch 13 anderen Teilnehmern an, usw.
- Ein Schnecke möchte von der Mitte eines Gartens insgesamt 20 Meter bis zur Mitte des nächsten Gartens kriechen. Wegen steigender Müdigkeit schafft sie jede Stunde nur die Hälfte des verbliebenen Weges. Wie weit kommt sie nach 8 Stunden? Wie lang dauert es, bis sie 99% des Weges zum Ziel kommt?

Konzept der Ableitung

- In der Einführung [11] sieht man die Steigung der Funktion $f(x) = x^2$ in $x = x_0$ durch Grenzwerte, d.h. die h-Methode,

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{(x_0+h) - x_0} = \frac{(x_0+h)^2 - x_0^2}{h} = Q(h)$$

$$Q(h) = \frac{2x_0 h + h^2}{h} \overset{h \neq 0}{=} 2x_0 + h \xrightarrow{h \to 0} 2x_0$$

  und im Allgemeinen hat man folgende Definition.

Def: Die *Ableitung* einer Funktion $f(x)$ mit Definitionsbereich D ist eine Funktion $f'(x)$, die durch den Grenzwert gegeben ist,

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Wenn x sich am Rand von D befindet, ist der Grenzwert einseitig: $h \to 0^{\pm}$. Existiert der Grenzwert an der Stelle $x \in D$, ist die Funktion $f(x)$ an dieser Stelle *differenzierbar*. Die *Tangente* an der Stelle $(x_0, f(x_0))$ ist die Gerade

$$(y - f(x_0)) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Ableitung eines Polynoms

Andere Formulierungen und Notationen für die Ableitung sind z.B.

$$D_x f(x) = \frac{df}{dx}(x) = \lim_{\tilde{x}\to x} \frac{f(x) - f(\tilde{x})}{x - \tilde{x}} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

- Beispiel: Für den Fall $g(x) = x^3$,

$$g'(x_0) \approx \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{(x_0+h) - x_0} = \frac{(x_0+h)^3 - x_0^3}{h} = Q(h)$$

Durch die Eigenschaft $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$,

$$Q(h) \overset{h\neq 0}{=} (x_0+h)^2 + (x_0+h)x_0 + x_0^2 \xrightarrow{h\to 0} 3x_0^2$$

- Im Allgemeinen gibt es die Formel für die Ableitung einer Potenzfunktion mit Potenz $n \in \mathbb{N}$,

$$y(x) = x^n, \quad y'(x) = nx^{n-1}.$$

Summenregel und Vielfachregel

- Die Ableitung einer Summe von Funktionen

$$
\begin{aligned}
(f(x)+g(x))' &= \lim_{h\to 0} \frac{[f(x+h)+g(x+h)]-[f(x)+g(x)]}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \\
&= f'(x)+g'(x)
\end{aligned}
$$

  ist gegeben durch die Summe der Ableitungen.
- Die Ableitung eines Vielfaches einer Funktion

$$
(\lambda f(x))' = \lim_{h\to 0} \frac{\lambda f(x+h)-\lambda f(x)}{h} = \lambda \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lambda f'(x)
$$

  ist gegeben durch das Vielfache der Ableitung.
- Mit diesen Regeln bekommt man die Formel für die Ableitung eines Polynoms $p(x) = p_n x^n + \cdots + p_1 x + p_0$,

$$
p'(x) = np_n x^{n-1} + (n-1)p_{n-1}x^{n-2} + \cdots + p_1
$$

  und insbesondere gilt für eine Konstante $D_x p_0 = 0$. (wie?)

Differenzierbarkeit und Potenzfunktionen

- Wann ist eine Funktion *nicht* differenzierbar? Beispiel:

$$f(x) = |x|, \quad f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{|x+h| - |x|}{h} = \begin{cases} +1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \\ ?, & x = 0 \end{cases} = \begin{cases} \operatorname{sign}(x), \\ x \neq 0 \end{cases}$$

  Die einseitigen Grenzwerte $\lim_{h\to 0^\pm} |h|/h$ sind ± 1, aber es gibt keinen eindeutigen Grenzwert hier. Daher ist $f(x) = |x|$ differenzierbar nur in $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, weg vom Knick.

- Die Ableitung einer Potenzfunktion ist

$$y(x) = x^p, \quad y'(x) = px^{p-1}, \quad p \in \mathbb{R}$$

  Schon gezeigt 77 für $p \in \mathbb{N}$. Gilt auch für $p \in \mathbb{R}$ wo x^{p-1} wohl definiert ist, insbesondere weg vom Vertikal in x^p, wie man bei den Graphen der Potenzfunktionen sieht.

- Beispiel: $y(x) = \sqrt[3]{x^2}$ ist differenzierbar nur in $\mathbb{R}\backslash\{0\}$,

$$y'(x) = \begin{cases} 2/(3\sqrt[3]{x}), & x \neq 0 \\ \lim_{h\to 0}(\sqrt[3]{h^2} - 0)/h = ?, & x = 0 \end{cases} \qquad y'(x) = \begin{cases} 2/(3\sqrt[3]{x}), \\ x \neq 0 \end{cases}$$

Produktregel und Quotientenregel

- Die Ableitung eines Produkts ist gegeben durch

$$D_x f(x)g(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right] g(x+h) + f(x) \left[\frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right]$$

$$= f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

- Die Ableitung eines Quotienten ist gegeben durch

$$D_x \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)/g(x+h) - f(x)/g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right] \frac{1}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)g(x+h)} \left[\frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right]$$

$$= \frac{f'(x)}{g(x)} - \frac{f(x)}{g(x)^2} g'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

Kettenregel

- Die Ableitung einer Komposition ist gegeben durch die Kettenregel:

$$D_x f(g(x)) = \lim_{h\to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left[\frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)}\right]\left[\frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right] = f'(g(x))g'(x)$$

  Hier ist $f'(g(x))$ die *äußere* und $g'(x)$ die *innere* Ableitung.
- Beispiele: Produktregel, Quotientenregel bzw. Kettenregel,

$$D_x \sqrt[3]{x}(1+x^2) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}(1+x^2) + \sqrt[3]{x}(2x) = \frac{1+7x^2}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$D_x \frac{x^2-1}{x^2+1} = \frac{2x(1+x^2) - (x^2-1)2x}{(x^2+1)^2} = \frac{4x}{(x^2+1)^2}$$

$$D_x(\sqrt{x}+1)^{10} = 10(\sqrt{x}+1)^9 \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{5(\sqrt{x}+1)^9}{\sqrt{x}}$$

Ableitungen von Exp und Log Funktionen

- Wie aus der alternativen Darstellung 63 erkennbar ist,

  $$e^x = \frac{1}{0!} + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

  gilt erstaunlicherweise: $D_x e^x = e^x$. (Details?)

- Die Ableitung der logarithmischen Funktion lässt sich mit der Kettenregel berechnen: Man setzt

  $$y(x) = f(g(x)), \quad f(x) = e^x \quad \text{und} \quad g(x) = \ln(x),$$

  und mit $y(x) = f(g(x)) = e^{\ln(x)} = x$ folgt

  $$y'(x) = f'(g(x))g'(x) = e^{\ln(x)} D_x \ln(x) = D_x x = 1$$

  Nochmals mit $e^{\ln(x)} = x$ ergibt sich,

  $$x D_x \ln(x) = 1 \quad \text{oder} \quad D_x \ln(x) = 1/x$$

Ableitungen von Exp und Log Funktionen

- Durch die Kettenregel: $D_x u(x)^p = pu(x)^{p-1}u'(x)$

$$D_x e^{u(x)} = u'(x)e^{u(x)} \quad D_x \ln(u(x)) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

- Beispiele:

$$D_x e^{7x} = 7e^{7x}, \quad D_x e^{-3x^2} = -6xe^{-3x^2}, \quad D_x[\ln(x)]^2 = \frac{2}{x}\ln(x)$$

$$D_x \ln(1+3x) = \frac{3}{1+3x}, \quad D_x \ln(x^2) = \frac{2}{x}, \quad D_x \ln(1-x^2) = \frac{-2x}{1-x^2}$$

- Methoden mit $\boxed{46}$ und $\boxed{47}$:

$$D_x 2^x = D_x e^{\ln(2^x)} = D_x e^{x\ln(2)} = \ln(2)e^{x\ln(2)} = \ln(2)2^x$$

$$D_x \log_3(x) = D_x \log_3(e^{\ln(x)}) = D_x \ln(x)\log_3(e) = \frac{\log_3(e)}{x} = \frac{1}{x\ln(3)}$$

Ableitungen von Winkelfunktionen

- Aus den alternativen Darstellungen 64,

$$\sin(x) = \frac{e^{\imath x} - e^{-\imath x}}{2\imath}, \quad \cos(x) = \frac{e^{\imath x} + e^{-\imath x}}{2}$$

  folgen (Details?)

$$D_x \sin(x) = \cos(x), \quad D_x \cos(x) = -\sin(x)$$

  wie man auch von den jeweiligen Graphen sieht.
- Durch die Quotientenregel,

$$D_x \tan(x) = D_x \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{(\cos(x))\cos(x) - \sin(x)(-\sin(x))}{\cos^2(x)}$$

$$= \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)} = \sec^2(x)$$

Ableitungen von Winkelfunktionen

- Ableitungen der anderen Winkelfunktionen ergeben sich durch die Kettenregel,

$$D_x \csc(x) = D_x[\sin(x)]^{-1} = -[\sin(x)]^{-2}(\cos(x))$$

$$= -\frac{1}{\sin(x)}\frac{\cos(x)}{\sin(x)} = -\csc(x)\cot(x)$$

$$D_x \sec(x) = D_x[\cos(x)]^{-1} = -[\cos(x)]^{-2}(-\sin(x))$$

$$= \frac{1}{\cos(x)}\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \sec(x)\tan(x)$$

$$D_x \cot(x) = D_x\frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{(-\sin(x))\sin(x) - \cos(x)(\cos(x))}{\sin^2(x)}$$

$$= -\frac{\sin^2(x) + \cos^2(x)}{\sin^2(x)} = -\frac{1}{\sin^2(x)} = -\csc^2(x)$$

Ableitungen von Winkelfunktionen

- Durch die Kettenregel: $D_x \tan(u(x)) = u'(x) \sec^2(u(x))$,

$$D_x \sin(u(x)) = u'(x)\cos(u(x)), \quad D_x \cos(u(x)) = -u'(x)\sin(u(x))$$

- Beispiele: $D_x \tan(1+\ln(x)) = (1/x)\sec^2(1+\ln(x))$

$$D_x \sin(7x) = 7\cos(7x), \quad D_x \cos(1/x) = (1/x^2)\sin(1/x)$$

- Zusammen mit anderen Regeln 80,

$$D_x \sin(x-1)\cos(x-1) = \cos^2(x-1) - \sin^2(x-1)$$

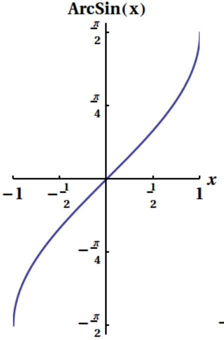
$$D_x x^2 \cos(1/x) = 2x\cos(1/x) + \sin(1/x)$$

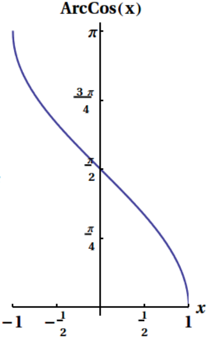
$$D_x e^{-2x}\cos(3x) = -e^{-2x}(2\cos(3x) + 3\sin(3x))$$

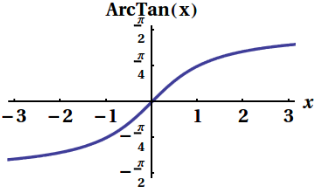
$$D_x \frac{1+\sin(x)}{1+\cos(x)} = \frac{1+\sin(x)+\cos(x)}{(1+\cos(x))^2}$$

Umkehrfunktionen der Winkelfunktionen

- Wie bei früheren Hausaufgaben hingewiesen worden, gibt es folgende Umkehrfunktionen der Winkelfunktionen,







$$\arcsin(x) = \sin^{-1}(x)$$
$$D = [-1, 1]$$
$$B = [-\pi/2, +\pi/2]$$
$$\sin(\sin^{-1}(x)) = x, \forall x \in D$$

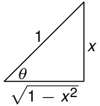
$$\arccos(x) = \cos^{-1}(x)$$
$$D = [-1, 1]$$
$$B = [0, +\pi]$$
$$\cos(\cos^{-1}(x)) = x, \forall x \in D$$

$$\arctan(x) = \tan^{-1}(x)$$
$$D = \mathbb{R}$$
$$B = (-\pi/2, +\pi/2)$$
$$\tan(\tan^{-1}(x)) = x, \forall x \in D$$

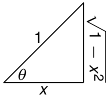
Ableitungen der Umkehrwinkelfunktionen

- Durch die Kettenregel und die Beziehung zwischen Funktion und Umkehrfunktion ergeben sich die Ableitungen der Umkehrwinkelfunktionen,

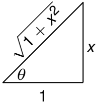
$$\theta(x) = \sin^{-1}(x), \quad \sin(\theta(x)) = x, \quad \cos(\theta(x))\theta'(x) = 1$$
$$\Rightarrow \quad D_x \sin^{-1}(x) = \theta'(x) = 1/\cos(\sin^{-1}(x)) = 1/\sqrt{1-x^2}$$



$$\theta(x) = \cos^{-1}(x), \quad \cos(\theta(x)) = x, \quad -\sin(\theta(x))\theta'(x) = 1$$
$$\Rightarrow \quad D_x \cos^{-1}(x) = \theta'(x) = -1/\sin(\cos^{-1}(x)) = -1/\sqrt{1-x^2}$$



$$\theta(x) = \tan^{-1}(x), \quad \tan(\theta(x)) = x, \quad \sec^2(\theta(x))\theta'(x) = 1$$
$$\Rightarrow \quad D_x \tan^{-1}(x) = \theta'(x) = \cos^2(\tan^{-1}(x)) = 1/(1+x^2)$$



Wenn keine Formel Anwendbar ist

- Früher ist gezeigt worden, $f(x) = |x|$ und $g(x) = x^p$, $p < 1$, sind differenzierbar nur in $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.
- Eine direkte Rechnung ist für diese Erkenntnis notwendig:

$$f'(0) \stackrel{?}{=} \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h| - |0|}{h} = \lim_{h\to 0} \operatorname{sign}(h) = \ ?$$

$$g'(0) \stackrel{?}{=} \lim_{h\to 0} \frac{g(h) - g(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^p - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^{1-p}} = \ ?$$

- Es gibt aber auch Funktionen, die doch differenzierbar an Stellen sind, in denen keine Formel anwendbar ist, z.B. für

$$y(x) = \begin{cases} x^2 \cos(1/x), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

gelten $y'(x) = 2x\cos(1/x) + \sin(1/x)$, $x \neq 0$, und

$$y'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{y(h) - y(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2\cos(1/h) - 0}{h} = \lim_{h\to 0} h\cos(1/h) = 0$$

Achtung: Im Allgemeinen darf man nicht zeilenweise ableiten! Mit x anstatt x^2 existiert $y'(0)$ nicht! (Warum?)

Hausaufgaben, vgl. Kapitel 7 im Lösungsheft

- Durch die Definition der Ableitung zeigt man, $D_x x^n = nx^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$.
- Man stellt die Potenzfunktion $y(x) = |x|^p$ und ihre Ableitung für verschiedende $p \in \mathbb{R}$ grafisch dar. $(x = 0?)$
- Man stellt die Betragsfunktion $y(x) = s|x - x_0| + y_0$ und ihre Ableitung für verschiedene s, x_0, y_0 grafisch dar. $(x = x_0?)$
- Man bastelt eigene Beispiele, um sich mit der Vielfachregel, der Summenregel, der Produktregel, der Quotientenregel und der Kettenregel vertraut zu machen.
- Man berechnet z.B. $D_x \tan^{-1}(1 + \ln(x))$, $D_x \ln(\exp(-2x)\exp(3x))$ und $D_x |x| \tan(1/x)$.
- Man stellt $y(x) = x^p \cos(1/x)$, $x \neq 0$, $y(0) = 0$, und $y'(x)$ für verschiedene $p > 0$ grafisch dar. $(x = 0?)$
- Man gibt Beispiele verschiedener Arten von nicht differenzierbaren Funktionen an. Hinweise: Kandidaten sind geknickte Funktionen aber auch nicht stetige Funktionen!
- Man stellt $f(x) = e^x$, $\ln(x)$, $\sin(x)$, $\cos(x)$ und $\tan(x)$ zusammen mit der Tangente in $(1, f(1))$ grafisch dar.

Qualitative Eigenschaften der Ableitung - Monotonie

Def: Eine Funktion $f(x)$ mit Definitionsbereich D ist streng *steigend* in einer Teilmenge $M \subset D$ wenn

$$\forall x_1, x_2 \in M, \quad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_2) > f(x_1),$$

und sie ist streng *fallend* in M wenn

$$\forall x_1, x_2 \in M, \quad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_2) < f(x_1).$$

Die Eigenschaft ist nicht streng wenn nur $f(x_2) \geq f(x_1)$ bzw. nur $f(x_2) \leq f(x_1)$ gelten. Wenn eine Funktion (streng) steigend oder (streng) fallend ist, ist sie (streng) *monoton*.

- Da die Ableitung einer Funktion ihrer Steigung entspricht:

Satz: Eine Funktion $f(x)$ mit Definitionsbereich D, die in einem Intervall $I \subset D$ differenzierbar ist, ist in I

streng steigend wenn $f'(x) > 0, \forall x \in I$, gilt

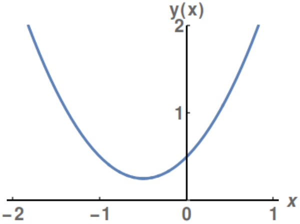
und

streng fallend wenn $f'(x) < 0, \forall x \in I$, gilt.

Die Eigenschaft ist nicht notwendigerweise streng wenn $f'(x) \geq 0$ bzw. $f'(x) \leq 0$ gelten, z.B. wenn $f'(x) = 0$ in einem Teilintervall gilt.

Steigende und Fallende Funktionen

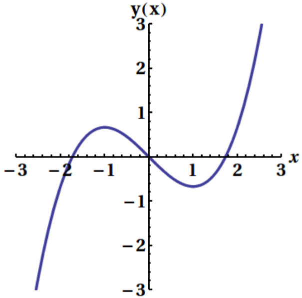
- Beispiel: Für $y(x) = x^2 + x + \frac{1}{2}$, $D = \mathbb{R}$,



$$y'(x) = 2x + 1 = 2(x + 1/2)$$

	$(-\infty, -1/2)$	$(-1/2, +\infty)$
$(x + 1/2)$	$\ominus$	$\oplus$
$y'(x)$	$\ominus$	$\oplus$
y ist	fallend	steigend

- Beispiel: Für $y(x) = x^3/3 - x$, $D = \mathbb{R}$,

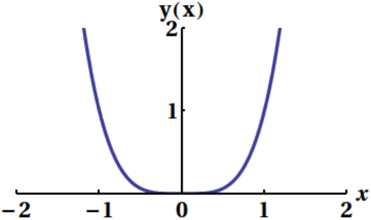


$$y'(x) = x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, +1)$	$(+1, \infty)$
$(x + 1)$ $(x - 1)$	$\ominus$ $\ominus$	$\oplus$ $\ominus$	$\oplus$ $\oplus$
$y'(x)$	$\oplus$	$\ominus$	$\oplus$
y ist	steigend	fallend	steigend

Steigende und Fallende Funktionen

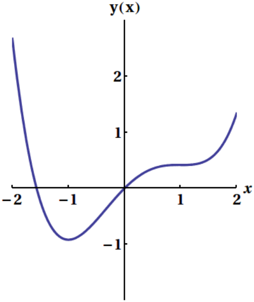
- Beispiel: Für $y(x) = x^4$, $D = \mathbb{R}$,



$$y'(x) = 4x^3$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
x^3	$\ominus$	$\oplus$
$y'(x)$	$\ominus$	$\oplus$
y ist	fallend	steigend

- Beispiel: Für $y(x) = x - x^2/2 - x^3/3 + x^4/4$, $D = \mathbb{R}$,

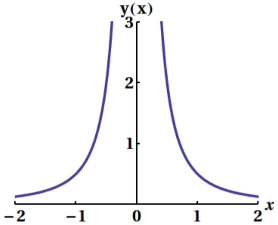


$$y'(x) = 1 - x - x^2 + x^3 = (x+1)(x-1)^2$$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, +1)$	$(+1, \infty)$
$(x+1)$	$\ominus$	$\oplus$	$\oplus$
$(x-1)^2$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$
$y'(x)$	$\ominus$	$\oplus$	$\oplus$
y ist	fallend	steigend	steigend

Steigende und Fallende Funktionen

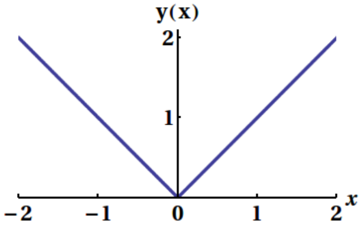
- Beispiel: Für $y(x) = 1/(2x^2)$, $D = \mathbb{R}\backslash\{0\}$,



$$y'(x) = -1/x^3, \quad x \neq 0$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
$-x^3$	$\oplus$	$\ominus$
$y'(x)$	$\oplus$	$\ominus$
y ist	steigend	fallend

- Beispiel: Für $y(x) = |x|$, $D = \mathbb{R}$,

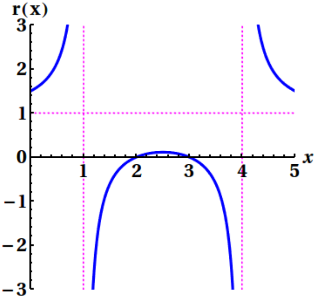


$$y'(x) = \text{sign}(x), \quad x \neq 0$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$\text{sign}(x) =$	-1	$+1$
$y'(x)$	$\ominus$	$\oplus$
y ist	fallend	steigend

Steigende und Fallende Funktionen

- Beispiel: Für $r(x) = (x^2 - 5x + 6)/(x^2 - 5x + 4)$, $D = \mathbb{R}\backslash\{1, 4\}$,



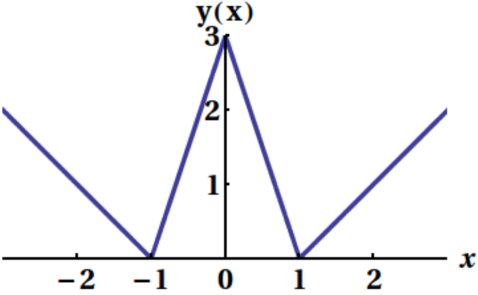
$$r'(x) = \frac{10 - 4x}{(x^2 - 5x + 4)^2} = 4\frac{5/2 - x}{(x-1)^2(x-4)^2}$$

$$x \neq 1, 4$$

	$(-\infty, +1)$	$(+1, +5/2)$	$(+5/2, +4)$	$(+4, +\infty)$
$(x-1)^2$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$
$(x-4)^2$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$
$(5/2 - x)$	$\oplus$	$\oplus$	$\ominus$	$\ominus$
$r'(x)$	$\oplus$	$\oplus$	$\ominus$	$\ominus$
r ist	steigend	steigend	fallend	fallend

Steigende und Fallende Funktionen

- Beispiel: Für $y(x) = 2|x+1| - 3|x| + 2|x-1| - 1$, $D = \mathbb{R}$,



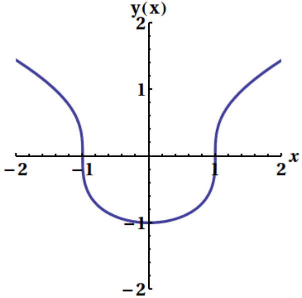
$$
\begin{aligned}
y'(x) &= 2\text{sign}(x+1) \\
&- 3\text{sign}(x) \\
&+ 2\text{sign}(x-1)
\end{aligned}
$$

$$x \neq -1, 0, +1$$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, +1)$	$(+1, +\infty)$
$+2\text{sign}(x+1) =$	-2	$+2$	$+2$	$+2$
$-3\text{sign}(x) =$	$+3$	$+3$	-3	-3
$+2\text{sign}(x-1) =$	-2	-2	-2	$+2$
$y'(x) =$	-1	$+3$	-3	$+1$
y ist	fallend	steigend	fallend	steigend

Steigende und Fallende Funktionen

- Beispiel: Für $y(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1}$, $D = \mathbb{R}$,



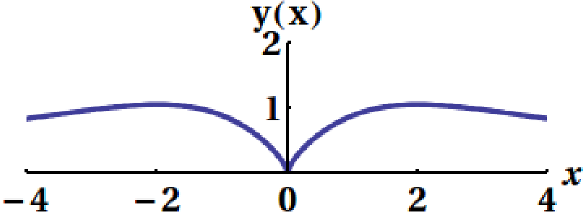
$$y'(x) = \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}} = \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}\sqrt[3]{(x-1)^2}}$$

$$x \neq -1, +1$$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, +1)$	$(+1, +\infty)$
$\sqrt[3]{(x+1)^2}$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$
$\sqrt[3]{(x-1)^2}$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$
x	$\ominus$	$\ominus$	$\oplus$	$\oplus$
$y'(x)$	$\ominus$	$\ominus$	$\oplus$	$\oplus$
y ist	fallend	fallend	steigend	steigend

Steigende und Fallende Funktionen

- Beispiel: Für $y(x) = 8\sqrt[3]{x^2}/(8 + x^2)$, $D = \mathbb{R}$,

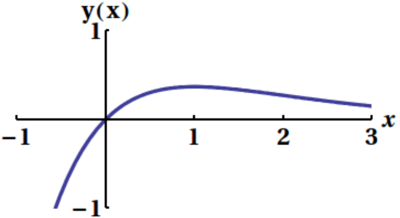


$$y'(x) = \frac{32(4 - x^2)}{3\sqrt[3]{x}(8 + x^2)^2} = \frac{32}{3(8 + x^2)^2} \frac{(2 + x)(2 - x)}{\sqrt[3]{x}}, \quad x \neq 0$$

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 0)$	$(0, +2)$	$(+2, \infty)$
$(2 + x)$	$\ominus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$
$(2 - x)$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\ominus$
$\sqrt[3]{x}$	$\ominus$	$\ominus$	$\oplus$	$\oplus$
$y'(x)$	$\oplus$	$\ominus$	$\oplus$	$\ominus$
y ist	steigend	fallend	steigend	fallend

Steigende und Fallende Funktionen

- Beispiel: Für $y(x) = xe^{-x}$, $D = \mathbb{R}$,

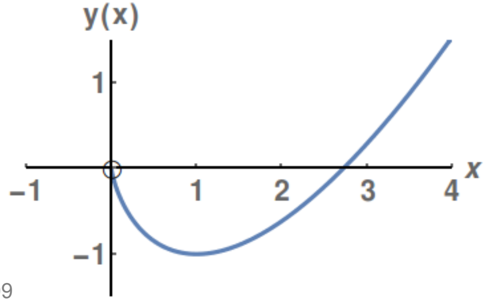


$$y'(x) = e^{-x}(1 - x)$$

$$\begin{cases} > 0, & x < 1 \\ < 0, & x > 1 \end{cases}$$

$$y \text{ ist } \begin{cases} \text{steigend in} & (-\infty, 1) \\ \text{fallend in} & (1, +\infty) \end{cases}$$

- Beispiel: Für $y(x) = x\ln(x) - x$, $D = \mathbb{R}_+$,



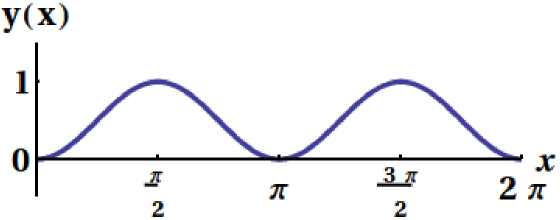
$$y'(x) = \ln(x), \quad x > 0$$

$$\begin{cases} < 0, & x \in (0, 1) \\ > 0, & x > 1 \end{cases}$$

$$y \text{ ist } \begin{cases} \text{fallend in} & (0, 1) \\ \text{steigend in} & (1, +\infty) \end{cases}$$

Steigende und Fallende Funktionen

- Beispiel: Für $y(x) = \sin^2(x)$, $D = [0, 2\pi]$,



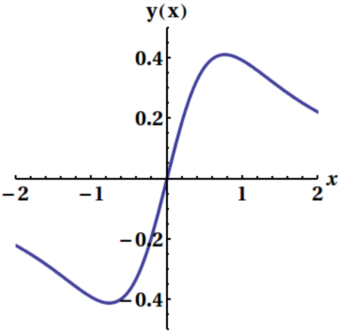
$$y'(x) = 2\sin(x)\cos(x) = \sin(2x) \begin{cases} = 0, & x = \frac{k}{2}\pi, & & k = 0,1,2,3,4 \\ = +1, & x = \frac{1}{4}\pi & \Rightarrow \ > 0, & x \in (0, \frac{1}{2}\pi) \\ = +1, & x = \frac{5}{4}\pi & \Rightarrow \ > 0, & x \in (\pi, \frac{3}{2}\pi) \\ = -1, & x = \frac{3}{4}\pi & \Rightarrow \ < 0, & x \in (\frac{1}{2}\pi, \pi) \\ = -1, & x = \frac{7}{4}\pi & \Rightarrow \ < 0, & x \in (\frac{3}{2}\pi, 2\pi) \end{cases}$$

$$y \text{ ist } \begin{cases} \text{steigend in} & (0, \frac{1}{2}\pi) & \text{und in} & (\pi, \frac{3}{2}\pi) \\ \text{fallend in} & (\frac{1}{2}\pi, \pi) & \text{und in} & (\frac{3}{2}\pi, 2\pi) \end{cases}$$

Steigende und Fallende Funktionen

- Beispiel: Für $y(x) = \tan^{-1}(x)/(1+x^2)$, $D = \mathbb{R}$,

$$\text{Bisektion: } a = 0, b = 1, c \leftarrow (a+b)/2, \ldots x_0$$



$$y'(x_0) = 0, \quad x_0 \approx 0.7654$$

$$y'(x) = \frac{1 - 2x\tan^{-1}(x)}{(1+x^2)^2}$$

$$\left\{ \begin{array}{llll} = \quad 0, & x = \pm x_0 & & \\ = \; +1, & x = 0 & \Rightarrow > 0, & x \in (-x_0, x_0) \\ \approx -0.1, & x = -1 & \Rightarrow < 0, & x \in (-\infty, -x_0) \\ \approx -0.1, & x = +1 & \Rightarrow < 0, & x \in (x_0, +\infty) \end{array} \right.$$

$$y \text{ ist} \left\{ \begin{array}{rl} \text{fallend in} & (-\infty, -x_0) \\ \text{steigend in} & (-x_0, x_0) \\ \text{fallend in} & (x_0, +\infty) \end{array} \right.$$

Lokale Extrema

- Man erkennt die Eigenschaften der *Extremstellen* der obigen Beispiele und die Beziehung zur Ableitung.

Def: Eine Funktion $f(x)$ mit Definitionsbereich D besitzt ein (streng) *lokales Minimum* an der Stelle $x_0 \in D$ wenn

$$f(x_0) < f(x), \quad \text{für jedes } x \in D \text{ mit } |x - x_0| \text{ ausreichend klein,}$$

und ein (streng) *lokales Maximum* an der Stelle $x_0 \in D$ wenn

$$f(x_0) > f(x), \quad \text{für jedes } x \in D \text{ mit } |x - x_0| \text{ ausreichend klein.}$$

Diese sind nicht streng, wenn eine Ungleichung nicht streng ist.

- Die Funktion $y(x) = x^3/3 - x$,

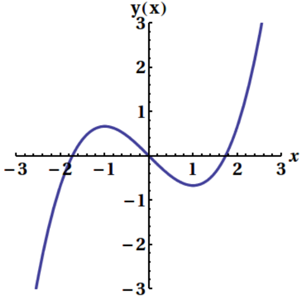
  mit $D = [-3, +3]$

  besitzt lokale Minima in

  $x = -3, +1$

  und lokale Maxima in

  $x = -1, +3.$



Kriterium der ersten Ableitung

Satz: Eine Funktion $f(x)$ mit Definitionsbereich D sei stetig in D und differenzierbar mindestens in $D\backslash\{x_0\}$.

Sie besitzt ein streng lokales Minimum an der Stelle x_0 wenn für $h > 0$ ausreichend klein und $x_0 \pm h \in D$,

$$f'(x_0 - h) < 0 \text{ und } f'(x_0 + h) > 0.$$

Sie besitzt ein streng lokales Maximum an der Stelle x_0 wenn für $h > 0$ ausreichend klein und $x_0 \pm h \in D$,

$$f'(x_0 - h) > 0 \text{ und } f'(x_0 + h) < 0.$$

Falls $x_0 \pm h \notin D$ (d.h. x_0 ist am Rand von D) fallen die entsprechenden Ungleichung weg. Es befindet sich keine Extremstelle in x_0 wenn $f'(x_0 - h)f'(x_0 + h) > 0$ gilt.

- Obwohl $f(x)$ an der Stelle x_0 differenzierbar sein mag, ist dies für den obigen Satz nicht notwendig!
- Man untersucht all der obigen Beispiele der steigenden und fallenden Funktionen in Bezug auf lokale Extrema und zwar mit zahlreichen eingeschränkten Definitionsbereichen.

Hausaufgaben, vgl. `Kapitel 8` im Lösungsheft

- Für ein späteres Beispiel zeigt man hier, die Zuckerkonzentration $r(t) = 5t/(4+3t)$ ist für $t \geq 0$ streng steigend. Daher für $t > \tau = 76/3$ gilt
$$0.95 \cdot r^* = r(\tau) < r(t) < r^* = 5/3.$$
- Man bestimmt die lokalen Extrema der Funktion $y(x) = x^3/3 - x$ für $D = [-1/2, +1/2]$.
- Man bestimmt die lokalen Extrema der Funktion $r(x) = (x^2 - 5x + 6)/(x^2 - 5x + 4)$ für $D = [1, 5] \backslash \{1, 4\}$.
- Man bestimmt die lokalen Extrema der Funktion $y(x) = 8\sqrt[3]{x^2}/(8 + x^2)$ für $D = [1, 3]$.
- Man zeigt $2\sin(x)\cos(x) = \sin(2x)$ und $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$ mit den Eigenschaften
$$\sin(\theta \pm \phi) = \sin(\theta)\cos(\phi) \pm \sin(\phi)\cos(\theta)$$
$$\cos(\theta \pm \phi) = \cos(\theta)\cos(\phi) \mp \sin(\phi)\sin(\theta)$$
- Man führt das Bisektionsverfahren durch, um die Nullstellen von $y'(x)$ zu finden, wenn $y(x) = \tan^{-1}(x)/(1 + x^2)$.

Qualitative Eigenschaften der Ableitung - Krümmung

Def: Eine Funktion $f(x)$ mit Definitionsbereich D ist (streng) *konvex* (nach oben gekrümmt) in einem Intervall $I \subset D$ wenn

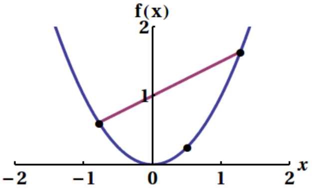
$$\forall x_1, x_2 \in I, \quad x_1 < x < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x) < y :$$
$$(x, y) \in \text{Gerade durch } (x_1, f(x_1)) \text{ und } (x_2, f(x_2))$$

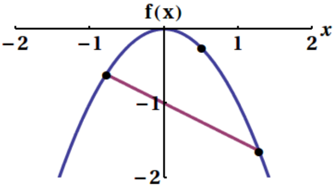
Sie ist (streng) *konkav* (nach unten gekrümmt) in einem Intervall $I \subset D$ wenn

$$\forall x_1, x_2 \in I, \quad x_1 < x < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x) > y :$$
$$(x, y) \in \text{Gerade durch } (x_1, f(x_1)) \text{ und } (x_2, f(x_2))$$

Das Krümmungsverhalten ist nicht streng in I, wenn die Ungleichungen $f(x) \lesseqgtr y$ nur teilweise streng in I sind.

- Diese sind in $(-\infty, +\infty)$ streng konvex bzw. konkav:





Ableitungen höherer Ordnung

Def: Die *zweite Ableitung* einer Funktion $f(x)$ ist eine Funktion $f''(x)$, die durch den folgenden Grenzwert gegeben ist,

$$f''(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}$$

Existiert der Grenzwert an der Stelle x, ist die Funktion $f(x)$ *zweimal differenzierbar* an dieser Stelle. Andere Formulierungen und Notationen für die zweite Ableitung sind z.B.

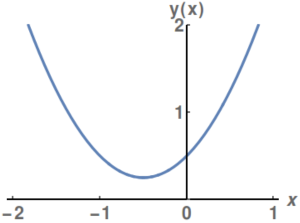
$$D_x^2 f(x) = \frac{d^2 f}{dx^2}(x) = \lim_{\tilde{x} \to x} \frac{f'(x) - f'(\tilde{x})}{x - \tilde{x}} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$$

Ableitungen höherer Ordnung, $f''' = f^{(3)}$, $f^{(4)}$, $D_x^5 f(x)$, $d^6 f / dx^6$, usw. werden ähnlich definiert.

Satz: Eine Funktion $f(x)$ mit Definitionsbereich D, die zweimal differenzierbar in einem Intervall $I \subset D$ ist, ist (streng) konvex oder konkav wenn $f''(x) > 0$ bzw. $f''(x) < 0$, $\forall x \in I$, gilt.

Konvexe und Konkave Funktionen

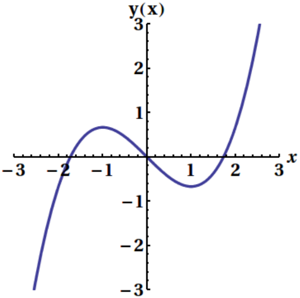
- Beispiel: Für $y(x) = x^2 + x + \frac{1}{2}$, $D = \mathbb{R}$,



$$y''(x) = 2 > 0$$

y ist konvex in $\mathbb{R}$

- Beispiel: Für $y(x) = x^3/3 - x$, $D = \mathbb{R}$,

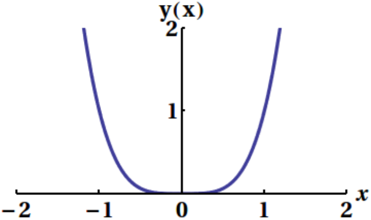


$$y''(x) = 2x \begin{cases} < 0, & x \in (-\infty, 0) \\ > 0, & x \in (0, +\infty) \end{cases}$$

$$y \text{ ist } \begin{cases} \text{konkav in} & (-\infty, 0) \\ \text{konvex in} & (0, +\infty) \end{cases}$$

Konvexe und Konkave Funktionen

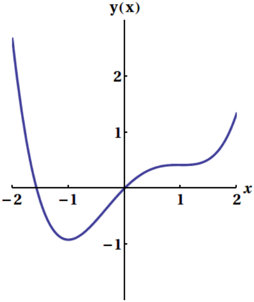
- Beispiel: Für $y(x) = x^4$, $D = \mathbb{R}$, (tatsächlich konvex im $\mathbb{R}$)



$$y''(x) = 12x^2$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
x^2	$\oplus$	$\oplus$
$y''(x)$	$\oplus$	$\oplus$
y ist	konvex	konvex

- Beispiel: Für $y(x) = x - x^2/2 - x^3/3 + x^4/4$, $D = \mathbb{R}$,

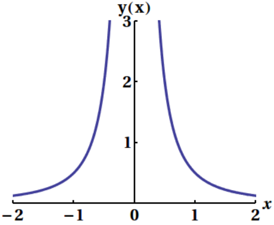


$$y''(x) = -1 - 2x + 3x^2 = (x-1)(3x+1)$$

	$(-\infty, -\frac{1}{3})$	$(-\frac{1}{3}, +1)$	$(+1, \infty)$
$(3x+1)$	$\ominus$	$\oplus$	$\oplus$
$(x-1)$	$\ominus$	$\ominus$	$\oplus$
$y''(x)$	$\oplus$	$\ominus$	$\oplus$
y ist	konvex	konkav	konvex

Konvexe und Konkave Funktionen

- Beispiel: Für $y(x) = 1/(2x^2)$, $D = \mathbb{R}\backslash\{0\}$,



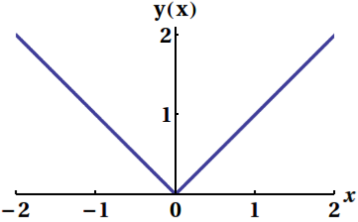
$$y''(x) = 3/x^4, \quad x \neq 0$$

$$\begin{cases} > 0, & x \in (-\infty, 0) \\ > 0, & x \in (0, +\infty) \end{cases}$$

$$y \text{ ist} \begin{cases} \text{konvex in} & (-\infty, 0) \\ \text{konvex in} & (0, +\infty) \end{cases}$$

- Beispiel: Für $y(x) = |x|$, $D = \mathbb{R}$,

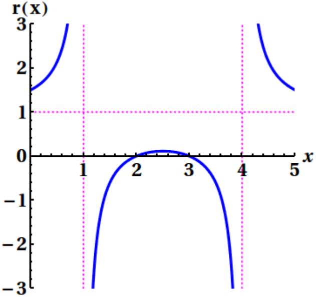
$$y''(x) = 0, \quad x \neq 0$$



Die Gerade durch $(x_1, y(x_1))$ und $(x_2, y(x_2))$ liegt oberhalb vom Graphen von $y(x)$, wenn $x_1 x_2 < 0$ gilt, aber nicht für beliebige $\{x_1, x_2\}$. Die Funktion ist konvex aber nicht streng konvex in D.

Konvexe und Konkave Funktionen

- Beispiel: Für $r(x) = (x^2 - 5x + 6)/(x^2 - 5x + 4)$, $D = \mathbb{R}\backslash\{1, 4\}$,



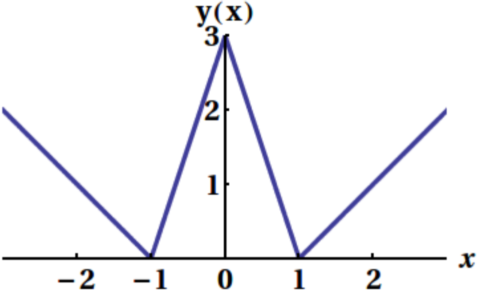
$$r''(x) = \frac{12(7 - 5x + x^2)}{(x^2 - 5x + 4)^3} = 12\frac{(x - 5/2)^2 + 3/4}{(x-1)^3(x-4)^3}$$

$$x \neq 1, 4$$

	$(-\infty, +1)$	$(+1, +4)$	$(+4, +\infty)$
$(x-1)^3$	$\ominus$	$\oplus$	$\oplus$
$(x-4)^3$	$\ominus$	$\ominus$	$\oplus$
$(x-5/2)^2 + 3/4$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$
$r''(x)$	$\oplus$	$\ominus$	$\oplus$
r ist	konvex	konkav	konvex

Konvexe und Konkave Funktionen

- Beispiel: Für $y(x) = 2|x+1| - 3|x| + 2|x-1| - 1$, $D = \mathbb{R}$,



$y''(x) = 0$
$x \neq -1, 0, +1$

Die Gerade durch $(x_1, y(x_1))$ und $(x_2, y(x_2))$ liegt oberhalb vom Graphen von $y(x)$, wenn $x_1 < -1$ und $x_2 \in (-1, 0]$ gelten, aber nicht für beliebige $x_1, x_2 \in (-\infty, 0]$.

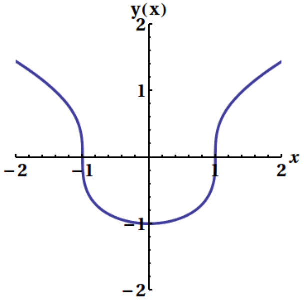
Die Funktion ist (nicht streng) konvex in $(-\infty, 0)$.

Ähnlich ist die Funktion (nicht streng) konvex in $(0, +\infty)$.

Die Gerade durch $(x_1, y(x_1))$ und $(x_2, y(x_2))$ liegt unterhalb vom Graphen von $y(x)$, wenn $x_1 \in [-1, 0)$ und $x_2 \in (0, +1]$ gelten, aber nicht für beliebige $x_1, x_2 \in [-1, +1]$. Die Funktion ist (nicht streng) konkav in $(-1, +1)$.

Konvexe und Konkave Funktionen

- Beispiel: Für $y(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1}$, $D = \mathbb{R}$,

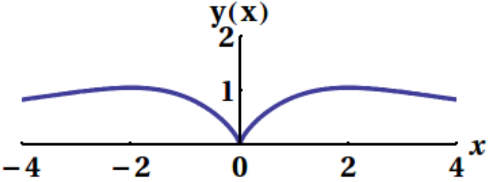


$$y''(x) = \frac{2(x^2+3)}{9\sqrt[3]{(1-x^2)^5}} = \frac{2(x^2+3)}{9\sqrt[3]{(1+x)^5}\sqrt[3]{(1-x)^5}}$$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, +1)$	$(+1, +\infty)$
$\sqrt[3]{(1+x)^5}$	$\ominus$	$\oplus$	$\oplus$
$\sqrt[3]{(1-x)^5}$	$\oplus$	$\oplus$	$\ominus$
(x^2+3)	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$
$y''(x)$	$\ominus$	$\oplus$	$\ominus$
y ist	konkav	konvex	konkav

Konvexe und Konkave Funktionen

- Beispiel: Für $y(x) = 8\sqrt[3]{x^2}/(8+x^2)$, $D = \mathbb{R}$,



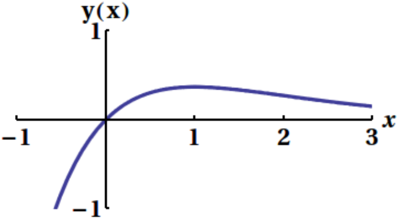
$$y''(x) = \frac{32(7x^4 - 92x^2 - 32)}{9\sqrt[3]{x^4}(8+x^2)^3} = \underbrace{\left[\frac{7\cdot 32(x^2+\tilde{x}^2)}{9\sqrt[3]{x^4}(8+x^2)^2}\right]}_{=A} \cdot (x+\hat{x})(x-\hat{x}), \quad x \neq 0$$

$$\left\{\frac{92 \pm \sqrt{92^2 - 4\cdot 7\cdot(-32)}}{2\cdot 7}\right\} = \{-\tilde{x}^2, \hat{x}^2\}, \quad \tilde{x}^2 \approx 0.339, \quad \hat{x} \approx 3.67$$

	$(-\infty, -\hat{x})$	$(-\hat{x}, 0)$	$(0, \hat{x})$	$(\hat{x}, \infty)$
$(x+\hat{x})$ $(x-\hat{x})$ A	$\ominus$ $\ominus$ $\oplus$	$\oplus$ $\ominus$ $\oplus$	$\oplus$ $\ominus$ $\oplus$	$\oplus$ $\oplus$ $\oplus$
$y''(x)$	$\oplus$	$\ominus$	$\ominus$	$\oplus$
y ist	konvex	konkav	konkav	konvex

Konvexe und Konkave Funktionen

- Beispiel: Für $y(x) = xe^{-x}$, $D = \mathbb{R}$,

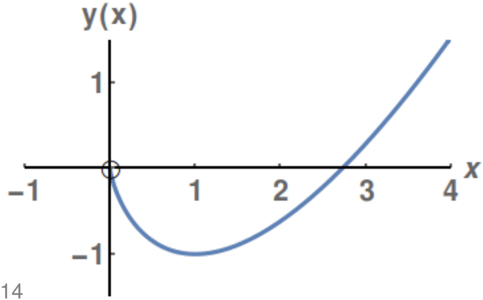


$$y''(x) = e^{-x}(x-2)$$

$$\begin{cases} < 0, & x < 2 \\ > 0, & x > 2 \end{cases}$$

$$y \text{ ist } \begin{cases} \text{konkav}, & x < 2 \\ \text{konvex}, & x > 2 \end{cases}$$

- Beispiel: Für $y(x) = x\ln(x) - x$, $D = \mathbb{R}_+$,



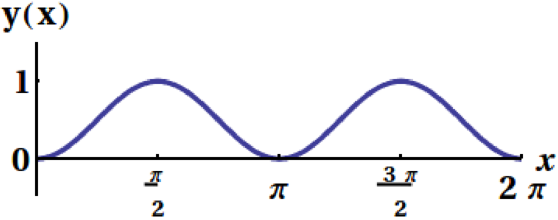
$$y''(x) = 1/x, \quad x > 0$$

$$> 0, \quad x > 0$$

y ist konvex in $(0, +\infty)$

Konvexe und Konkave Funktionen

- Beispiel: Für $y(x) = \sin^2(x)$, $D = [0, 2\pi]$,



$$y''(x) = 2\cos^2(x) - 2\sin^2(x) = 2\cos(2x) \begin{cases} = 0, & x = \frac{2k+1}{4}\pi, & & k = 0, 1, 2, 3 \\ = \sqrt{2}, & x = \frac{1}{8}\pi & \Rightarrow > 0, & x \in (\frac{0}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi) \\ = -2, & x = \frac{1}{2}\pi & \Rightarrow < 0, & x \in (\frac{1}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi) \\ = +2, & x = \pi & \Rightarrow > 0, & x \in (\frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi) \\ = -2, & x = \frac{3}{2}\pi & \Rightarrow < 0, & x \in (\frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi) \\ = \sqrt{2}, & x = \frac{15}{8}\pi & \Rightarrow > 0, & x \in (\frac{7}{4}\pi, \frac{8}{4}\pi) \end{cases}$$

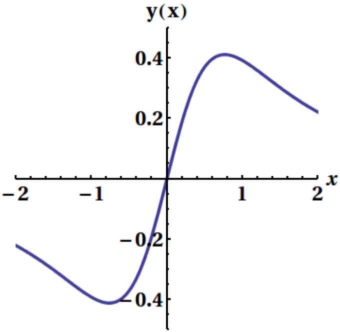
$$y \text{ ist } \begin{cases} \text{konvex in} & (0, \frac{1}{4}\pi) \text{ in } (\frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi) \text{ und in } (\frac{7}{4}\pi, \frac{8}{4}\pi) \\ \text{konkav in} & (\frac{1}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi) \text{ und in } (\frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi) \end{cases}$$

Konvexe und Konkave Funktionen

- Beispiel: Für $y(x) = \tan^{-1}(x)/(1+x^2)$, $D = \mathbb{R}$,

Bisektion: $a = 1, b = 2, c \leftarrow (a+b)/2, \ldots x_1$

$y''(x_1) = 0, \quad x_1 \approx 1.330$



$$y''(x) = \frac{(6x^2 - 2)\tan^{-1}(x) - 6x}{(1+x^2)^3}$$

$$\begin{cases} = \quad 0, & x = 0, \pm x_1 \\ \approx -0.1, & x = -2 \quad \Rightarrow \; < 0, \quad x \in (-\infty, -x_1) \\ \approx +0.6, & x = -1 \quad \Rightarrow \; > 0, \quad x \in (-x_1, 0) \\ \approx -0.6, & x = +1 \quad \Rightarrow \; < 0, \quad x \in (0, x_1) \\ \approx +0.1, & x = +2 \quad \Rightarrow \; > 0, \quad x \in (x_1, +\infty) \end{cases}$$

$$y \text{ ist } \begin{cases} \text{konkav in} & (-\infty, -x_1) & \text{und in} & (0, x_1) \\ \text{konvex in} & (-x_1, 0) & \text{und in} & (x_1, +\infty) \end{cases}$$

Kriterium der zweiten Ableitung

Satz: Wenn eine Funktion $f(x)$ an einer Stelle x_0 differenzierbar ist, muss sie an der Stelle x_0 stetig sein.

- Man wendet diesen Satz auch für Ableitungen höherer Ordnung an, z.B. $f''(x)$ existiert $\Rightarrow f'(x)$ stetig.

Satz: Eine Funktion $f(x)$ mit Definitionsbereich D sei zweimal differenzierbar in D. Sie besitzt ein streng lokales Minimum an der Stelle $x_0 \in D$ wenn

$$f'(x_0) = 0 \quad \text{und} \quad f''(x_0) > 0$$

und ein streng lokales Maximum an der Stelle $x_0 \in D$ wenn

$$f'(x_0) = 0 \quad \text{und} \quad f''(x_0) < 0.$$

Warnung: Der letzte Satz liefert die Extremstelle x_0 nicht, wenn

- $f'(x_0) \neq 0$ gilt und x_0 sich am Rand von D befindet,
- $f''(x_0) = 0$ gilt oder
- $f(x)$ nicht ausreichend differenzierbar ist,
  d.h. wenn sie einen Knick, eine senkrechte Tangente oder eine Unstetigkeit hat (vgl. vorletzter Satz).

Wendepunkte

- Man untersucht all der obigen Beispiele von konvexen und konkaven Funktionen in Bezug auf lokale Extrema und zwar mit zahlreichen eingeschränkten Definitionsbereichen.
- **Achtung**: Wegen der obigen Warnung werden nicht alle Extremstellen dieser Beispiele mit dem Kriterium der zweiten Ableitung gefunden!

Def: Eine Funktion $f(x)$ mit Definitionsbereich D hat einen *Wendepunkt* $\hat{x} \in D$ wenn sich das Krümmungsverhalten von $f(x)$ in $\hat{x}$ ändert,

d.h. es gibt zwei Intervalle $(x_1, \hat{x}), (\hat{x}, x_2) \subset D$, und $f(x)$ ist

konvex in $(x_1, \hat{x})$ und
konkav in $(\hat{x}, x_2)$

oder $f(x)$ ist

konkav in $(x_1, \hat{x})$ und
konvex in $(\hat{x}, x_2)$.

Wendepunkte

- **Warnung**: Ein Wendepunkt $\hat{x}$ ist nicht definiert durch eine der einfachen Bedingungen:
$$f''(\hat{x}) = 0 \text{ oder } f''(\hat{x}) \text{ existiert nicht.}$$
Es muss bestätigt werden, dass sich das Krümmungsverhalten in $\hat{x}$ ändert.
- Man untersuche alle obigen Beispiele von konvexen und konkaven Funktionen in Bezug auf Wendepunkte.
- **Achtung**: In einigen dieser Beispiele gibt es Punkte, die eine der obigen einfachen Bedingungen erfüllen, obwohl sie keine Wendepunkte sind. Andererseits erfüllt jeder Wendepunkt eine dieser Bedingungen.
- Wenn $f(x)$ in $\hat{x}$ dreimal differenzierbar ist und es gelten $f''(\hat{x}) = 0 \neq f'''(\hat{x})$, dann gibt es einen Wendepunkt in $\hat{x}$.
- Wichtige Anwendung: Man bestätige, der Punkt $(t_0, K/2)$ ist ein Wendepunkt für logistisches Wachstum einer Population: (S-förmige Kurve)
$$P(t) = \frac{K}{1 + \exp(-(t - t_0)/\tau)}$$

Hausaufgaben, vgl. Kapitel 8 im Lösungsheft

- Man gibt ein Beispiel einer lokalen Extremstelle an, die mit dem Kriterium der ersten Ableitung gefunden wird aber nicht mit dem Kriterium der zweiten Ableitung.
- Man gibt ein Beispiel einer lokalen Extremstelle an, wobei die Funktion an der Stelle nicht stetig ist.
- Man skizziert eine Funktion (ohne Formel), die eine Nullstelle der ersten Ableitung besitzt, obwohl diese keinem lokalen Max oder Min entspricht.
- Man skizziert eine Funktion (ohne Formel), die bei einem lokalen Max oder Min keine zweite Ableitung hat.
- Man skizziert eine Funktion (ohne Formel), die eine Nullstelle der zweiten Ableitung besitzt, obwohl diese keinem Wendepunkt entspricht.
- Man skizziert eine Funktion (ohne Formel), die bei einem Wendepunkt keine zweite Ableitung hat.
- Man zeigt, der Punkt $(t_0, K/2)$ ist ein Wendepunkt für $P(t) = K/[1 + \exp(-(t - t_0)/\tau)]$.

Globale Extrema

Def: Eine Funktion $f(x)$ mit Definitionsbereich D besitzt ein *globales Infimum* (Inf) $f_{\min}$ wenn $f_{\min} \in \mathbb{R}$ der größte Wert ist, der erfüllt

$$f_{\min} \leq f(x), \quad \text{für jedes } x \in D.$$

Ist $f_{\min}$ eine Auswertung $f(x_{\min})$ in einem $x_{\min}$, dann ist $f_{\min}$ ein globales Minimum. Sie besitzt ein *globales Supremum* (Sup) $f_{\max}$ wenn $f_{\max} \in \mathbb{R}$ der kleinste Wert ist, der erfüllt

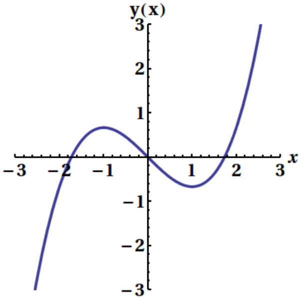
$$f_{\max} \geq f(x), \quad \text{für jedes } x \in D.$$

Ist $f_{\max}$ eine Auswertung $f(x_{\max})$ in einem $x_{\max}$, dann ist $f_{\max}$ ein globales Maximum.

- Die Funktion $y(x) = x^3/3 - x$,

mit $D = [-3, +3]$,
hat ein globales Minimum $y(-3)$
und ein globales Maximum $y(+3)$,

und mit $D = [-\sqrt{3}, +\sqrt{3}]$,
hat ein globales Minimum $y(+1)$
und ein globales Maximum $y(-1)$.



Globale Extrema

- Rezept zur Bestimmung der globalen Extrema einer Funktion $f(x)$ mit Definitionsbereich D und einseitigen Grenzwerten in D:

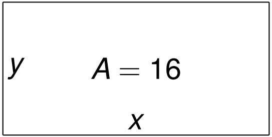
  1. Man berechnet $f'(x)$ und bestimmt die *kritischen Stellen*:
     a) Stellen $z \in D$ wobei $f'(z) = 0$,
     b) Stellen $c \in D$ wobei $f'(c)$ nicht existiert und
     c) Stellen r am Rand von D.
  2. Man wertet aus:
     a) $f(z)$ für jedes z,
     b) $f(c)$ ($\lim_{x \to c^{\pm}} f(x)$, f nicht stetig) für jedes c und
     c) $f(r)$ ($\lim_{x \to r^{\pm}} f(x)$, D offen) für jedes r.
  3. Der größte Wert aus der Liste in (2) ist das globale Max (Sup, wenn Grenzwert nicht angenommen). Der kleinste Wert ist das globale Min (Inf, wenn Grenzwert nicht angenommen).

Warnung: Zur Bestimmung der globalen Extrema sind die Kriterien der ersten oder zweiten Ableitung *nicht* zutreffend! Diese Kriterien sind nur für *lokale* Extrema.

Optimierungsproblem - Material Minimum

Beispiel: Das Material für einen Zaun wird minimiert.

- Ein Garten mit Flächeninhalt $A = 16\mathrm{m}^2$ wird eingezäunt.
- Da die Zaunstücke nur geradlinig sind, wird das eingezäunte Gebiet viereckig.



- Mit vorgegebenem Flächeninhalt bestimmt man die Längen der Gartenseiten, die die Gesamtlänge des Zauns und daher die Kosten minimieren.
- Seien x und y die jeweiligen Längen, die durch den Flächeninhalt $xy = A = 16$ eingeschränkt sind.
- Die Gesamtlänge L des Zauns ist $2(x + y)$.
- Durch die Kombination der letzten 2 Gleichungen:
$$2(x + y) = 2(x + 16/x) = L(x)$$
- Weil es nur sinnvoll ist, dass x und y positiv sind, und wie groß sie sein sollen vorher unbekannt ist, wird die Zielfunktion L mit $D = (0, \infty)$ versehen.

Optimierungsproblem - Material Minimum

- Man folgt dem Rezept zur Bestimmung des globalen Minimums der Ziel-Funktion $L(x)$ in $D = (0, \infty)$:

  (D kleiner?)

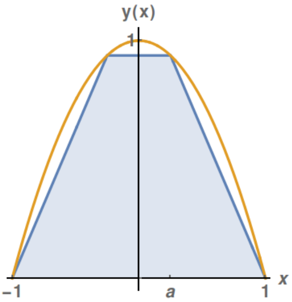
1. Man berechnet
$$L'(x) = 2 - \frac{32}{x^2} = 2\frac{x^2 - 16}{x^2}$$
und bestimmt die kritischen Stellen:
   a) $L'(z) = 0$ in $z = +4 \in D$ (und $-4 \notin D$),
   b) $L'(c)$ existiert nicht in $c = 0$, aber $c \notin D$,
   c) $r_1 = 0, r_2 = +\infty$ am Rand von $D = (0, +\infty)$.
2. Man wertet aus:
   a) $L(z) = 16$,
   b) $c \notin D$,
   c) D offen, $\lim_{x \to 0^+} L(x) = +\infty = \lim_{x \to \infty} L(x)$.
3. Das globale Minimum der Gesamtlänge des Zauns befindet sich bei $x = z = 4$, und $y = 16/x = 4 = x$, d.h. der optimale Garten ist quadratisch.

Optimierungsproblem - Durchfluss Maximum

- Die Aushöhlung für einen Tunnel hat einen parabolischen Querschnitt, der gegeben ist durch die Funktion

$$y(x) = 1 - x^2$$

- Innerhalb dieser Aushöhlung wird der Tunnel mit flachen Mauern gebaut, die einen trapezförmigen Querschnitt bilden.



- Um den Durchfluss zu maximieren, soll der Flächeninhalt des schattierten Bereichs maximiert werden.
- Sei $(a, y(a))$ der Punkt in dem das waagerechte Stück das nach unten geneigte Stück trifft, d.h. $a \geq 0$.
- Der gesamte Flächeninhalt (eines Trapezes) ist gegeben durch

$$F(a) = \frac{2a+2}{2} y(a) = (a+1)(1-a^2)$$

Optimierungsproblem - Durchfluss Maximum

- Man folgt dem Rezept zur Bestimmung des globalen Maximums der Ziel-Funktion $F(a)$ in $D = [0, 1]$:

  $(D = [-1, +1]?)$

1. Man berechnet

$$F'(a) = 1 - 2a - 3a^2$$

   und bestimmt die kritischen Stellen:

   a) $F'(z) = 0$ in $z = 1/3 \in D$ (und $-1 \notin D$),
   b) kein c, da $F'(a)$ überall existiert,
   c) $r_1 = 0, r_2 = 1$ am Rand von $D = [0, 1]$.

2. Man wertet aus:

   a) $F(z) = 32/27$,
   b) kein c,
   c) $F(0) = 1$, $F(1) = 0$.

3. Das globale Maximum der gesamten Flächeninhalt befindet sich bei $a = z = 1/3$ mit $F = 32/27$.

Optimierungsproblem - Mittelwert

- Man zeigt für die Daten $\{x_i\}_{i=1}^{10} = \{1, 0, \ldots, 0\}$, der Mittelwert $1/10$ ist gegeben durch das globale Minimum der Funktion $(D = [0, 1]?)$

$$f(x) = \sum_{i=1}^{10} (x - x_i)^2 \quad (= (x-1)^2 + 9x^2), \quad D = \mathbb{R}$$

1. Man berechnet $f'(x) = 2(x-1) + 18x$ und bestimmt die kritischen Stellen:
   a) $f'(z) = 0$ in $z = 1/10 \in D$,
   b) kein c, da $f'(x)$ überall existiert,
   c) $r_1 = -\infty, r_2 = +\infty$.
2. Mit $f(x) = 10x^2 - 2x + 1$ wertet man aus:
   a) $f(z) = 9/10$,
   b) kein c,
   c) D offen, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty = \lim_{x\to\infty} f(x)$.
3. Das globale Minimum befindet sich beim Mittelwert $x = z = 1/10$.

Optimierungsproblem - Median

- Man zeigt für die Daten $\{x_i\}_{i=1}^{10} = \{1, 0, \dots, 0\}$, der Median 0 (Mitte der sortierten Liste, hier $\frac{1}{2}(x_5 + x_6) = 0$) ist gegeben durch das globale Minimum der Funktion $(D = [0, 1]?)$

$$g(x) = \sum_{i=1}^{10} |x - x_i| \quad (= |x-1| + 9|x|), \quad D = \mathbb{R}$$

1. Man berechnet $g'(x) = \mathrm{sign}(x-1) + 9\mathrm{sign}(x)$, $x \neq 0, 1$, und bestimmt die kritischen Stellen:
   a) kein z, da $g'(z)$ nie Null wird,
   b) $g'(c)$ existiert nicht in $c_1 = 0$, $c_2 = 1$,
   c) $r_1 = -\infty, r_2 = +\infty$.
2. Man wertet aus mit $g(x) = \begin{cases} -(x-1) - 9x, & x \leq 0 \\ -(x-1) + 9x, & 0 \leq x \leq 1 \\ (x-1) + 9x, & x \geq 1 \end{cases}$
   a) kein z,
   b) $g(c_1) = 1$, $g(c_2) = 9$,
   c) D offen, $\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty = \lim_{x\to\infty} g(x)$.
3. Das globale Minimum befindet sich beim Median $x = c_1 = 0$, d.h. unempfindlich zum Ausreißerwert 1.

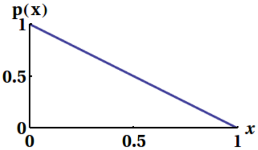
Optimierungsproblem - Profit Maximum

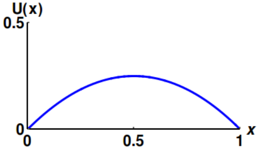
Beispiel: Der Profit einer Firma soll maximiert werden.

- Die Firma produziert x Fässer vom Kürbiskernöl pro Woche.
- Sei $p(x)$ der Preis pro Fass, bei dem alle x produzierten Fässer in der Woche verkauft werden.
- Marktforschung zeigt, die Nachfrage ist so dass
$$p(x) = 1 - x.$$
- Der entsprechende Umsatz pro Woche ist
$$U(x) = xp(x) = x(1 - x).$$
- Die Kosten, um x Fässer pro Woche zu produzieren, sind
$$K(x) = \sqrt{8x/125}.$$
- Der Profit für die Firma ist
$$P(x) = U(x) - K(x) = x(1 - x) - \sqrt{8x/125}.$$
- Zur Bestimmung des globalen Maximums wird die Profit-Funktion mit $D = [0, 1]$ versehen. Sonst sind $p(x)$ und $U(x)$ negativ.

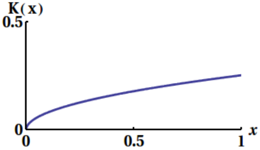
Optimierungsproblem - Profit Maximum

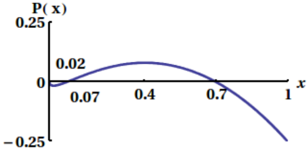
- Die Nachfrage ist $p(x) = 1 - x$, d.h. je höher ist der Fasspreis, desto weniger Kürbiskernöl wird verkauft.





- Der Umsatz $U(x) = x(1 - x)$ wird maximiert in $x = 1/2$, der Profit aber nicht.
- Die Kosten $K(x) = \sqrt{8x/125}$ steigen schneller wenn wenig Kürbiskerne angekauft werden, langsamer für größere Mengen.





- Der Profit $P(x) = x(1 - x) - \sqrt{8x/125}$ ist negativ, wenn zu wenig oder zu viel produziert wird. ($P(0.4) = \max.$)

Optimierungsproblem - Profit Maximum

- Man folgt dem Rezept zur Bestimmung des globalen Maximums der Profit-Funktion $P(x)$ in $D = [0, 1]$:

1. Man berechnet

$$P'(x) = 1 - 2x - \sqrt{\frac{2}{125x}} \overset{t=\sqrt{x}}{=} -\frac{2}{t}\left[t^3 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{10}\sqrt{\frac{2}{5}}\right]$$

kubisch in $t = \sqrt{x} \geq 0$: Nullstellen $\sqrt{x} \in \{\sqrt{\frac{2}{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{10}}\}$

und bestimmt die kritischen Stellen:

a) $P'(z) = 0$ in $z_1 = (\sqrt{\frac{2}{5}})^2$, $z_2 = (\frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{10}})^2 \in D$,

b) $P'(c)$ existiert nicht in $c = 0 \in D$.

c) $r_1 = 0, r_2 = 1$ am Rand von $D = [0, 1]$.

2. Man wertet aus:

a) $P(z_1) = 2/25$, $P(z_2) < 0$,

b) $P(c) = 0$,

c) $P(r_1) = 0$, $P(r_2) < 0$.

3. Das globale Profit-Maximum befindet sich bei $x = z_1$.

Tangenten und das Newtonsche Verfahren

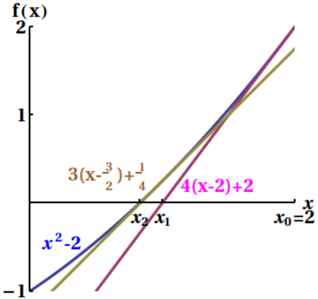
- Da die Ableitung $f'(x)$ einer Funktion $f(x)$ der Steigung entspricht, ist die Tangente an der Stelle $(x_0, f(x_0))$ gegeben durch $(y - f(x_0)) = f'(x_0)(x - x_0)$
- Wenn man eine Nullstelle $\hat{x}$ sucht, setzt man $y \to 0$, löst man nach x auf und mit $x_1 \leftarrow x$ bekommt man

  $$x_1 = x_0 - f(x_0)/f'(x_0)$$

  Die neue Tangente ist

  $$(y - f(x_1)) = f'(x_1)(x - x_1)$$

  Analog bekommt man



$$x_2 = x_1 - f(x_1)/f'(x_1) \quad \text{usw} \quad x_{k+1} = x_k - f(x_k)/f'(x_k), \quad k = 0, 1, 2 \ldots$$

Satz: Seien $g(x) = x - f(x)/f'(x)$ und $x_0, \hat{x} \in (a, b)$ und $\gamma \in (0, 1)$. Konvergenz $x_k \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} \hat{x}$ folgt aus $|g'(x)| \le \gamma$, $g(x) \subset (a, b)$, $\forall x \in (a, b)$.

- Beispiel: $f(x) = x^2 - 2$, $x_0 = 2$, $x_k \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} \hat{x} = \sqrt{2}$.

Regel von de l'Hôpital

- Seien $f(x)$ und $g(x)$ an der Stelle x_0 differenzierbar mit $f(x_0) = 0 = g(x_0)$. Dann kann der Grenzwert für $f(x)/g(x)$ so berechnet werden:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \frac{x-x_0}{g(x)-g(x_0)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

- Analog gilt der Lösungsweg auch für den Fall, dass

$$|f(x)|, |g(x)| \to \infty, \quad x \to x_0.$$

- Vorherige Beispiele, zuerst $\boxed{64}$ für $0/0$,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{2x} \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{2} = \frac{1}{2}$$

Regel von de l'Hôpital

und dann $\boxed{63}$ für $\pm\infty/\infty$,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\exp(x)} \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\exp(x)} = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(x)}{x^{-1}} \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0^+} -x = 0$$

- Durch Umschreiben mit Umkehrfunktionen für 0^0 und $\pm\infty^0$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} x^x &= \lim_{x\to 0^+}\exp(\ln(x^x)) = \lim_{x\to 0^+}\exp(x\ln(x))\\ &= \exp\left(\lim_{x\to 0^+} x\ln(x)\right) \overset{\text{oben}}{=} \exp(0) = 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} x^{1/x} &= \lim_{x\to\infty}\exp\left(\ln(x^{1/x})\right) = \lim_{x\to\infty}\exp\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)\\ &= \exp\left(\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x)}{x}\right) \overset{\text{l'H}}{=} \exp\left(\lim_{x\to\infty}\frac{1/x}{1}\right) = \exp(0) = 1\end{aligned}$$

Implizites Ableiten

- Beispiel: Ein Ballon wird mit der Flussrate $1\mathrm{cm}^3/\mathrm{min}$ befüllt. Sei $r(t)$ der (wachsende) Radius zur Zeit t wobei $r(0) = 0$. Man berechnet die zeitliche Änderungsrate $r'(\tau)$ wenn $r(\tau) = 1$.

  Die Beziehung zwischen dem Volumen $V(t)$ und dem Radius $r(t)$ zur Zeit t ist (für eine Kugel) $V(t) = 4\pi r^3(t)/3$. Man leitet ab, (Einheiten kontrollieren)

  $$1 = V'(t) = 4\pi r^2(t) r'(t) \quad \Rightarrow \quad r'(\tau) = 1/(4\pi r^2(\tau)) = 1/(4\pi)$$

- Beispiel: Ein Teilchen bewegt sich in der Ebene mit Koordinaten $(x(t), y(t))$ zur Zeit t. Es gelten $(x(\tau), y(\tau)) = (1, 1) = (x'(\tau), y'(\tau))$. Man berechnet die zeitliche Änderungsrate des Abstands vom Ursprung bei $t = \tau$.

  Laut Pythagoras erfüllt der Abstand $r^2(t) = x^2(t) + y^2(t)$. Man leitet ab, (Einheiten kontrollieren)

  $$2r(t)r'(t) = 2x(t)x'(t) + 2y(t)y'(t) \quad \Rightarrow \quad r'(\tau) = \sqrt{2}$$

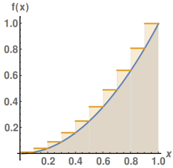
Hausaufgaben, vgl. `Kapitel 9` im Lösungsheft

- Das Material für eine Dose mit fixiertem Volumen soll minimiert werden, und man findet den Radius und die Höhe dieser Dose.
- Man maximiert den Querschnittflächeninhalt des Tunnels auf Seite 125, aber nun mit der Aushöhlung gegeben durch einen kreisförmigen Querschnitt.
- Man zeigt im Allgemeinen, der Median bzw. der Mittelwert der Daten $\{x_i\}_{i=1}^n$ sind gegeben durch das globale Minimum der Funktion $f_p(x) = \sum_{i=1}^n |x - x_i|^p$, $p = 1, 2$.
- Man bestimmt die globalen Extrema der Funktion $f(x) = \text{sign}(x)/(1 + |x|)$ auf $[-1, +1]$.
- Man maximiert den Profit auf Seite 130, aber nun mit Kosten nur linear abhängig von der Anzahl der angekauften Waren.
- Man berechnet $\sqrt{2}$ mit dem Newtonschen Verfahren.
- Man zeigt mit der Regel von de l'Hôpital, $p(x)e^{-x} \to 0$, $x \to \infty$, für jedes Polynom p.
- Man findet $r'(t)$ für das Teilchen 135 in einer Ellipse.

Konzept des Integrals

- In der Einführung [10] sieht man den Flächeninhalt unter der Kurve der Funktion $f(x) = x^2$ zwischen $x = 0$ und $x = 1$ durch einen Grenzwert, d.h. die n-Methode,

$$\Big[\underbrace{x_1^2 \Delta x + \cdots + x_n^2 \Delta x}_{x_i = \frac{i}{n},\ \Delta x = x_i - x_{i-1} = \frac{1}{n}} \Big] = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} = S(n)$$



$$\int_0^1 x^2 dx = \lim_{n\to\infty} S(n) = \frac{1}{3}$$

und im Allgemeinen gibt es die folgende Definition.

Def: Für $a = x_0 < x_i < x_n = b$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} > 0$ und $\hat{x}_i \in [x_{i-1}, x_i]$ ist das *bestimmte Integral* einer Funktion $f(x)$ zwischen Integrationsgrenzen a und b gegeben durch den Grenzwert,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} S(n), \quad S(n) = \sum_{i=1}^{n} f(\hat{x}_i)\Delta x_i, \quad \lim_{n\to\infty} \max_{1\le i\le n} \Delta x_i = 0.$$

Existiert der Grenzwert (für beliebige $\hat{x}_i \in [x_{i-1}, x_i]$) der *Riemannschen Summe* $S(n)$, ist die Funktion $f(x)$ *Riemann integrierbar*.

Bestimmtes Integral

- Beispiel: Für den Fall $g(x) = x$ mit $a = 0$ und $b = 1$ und $x_i = i/n = \hat{x}_i$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = 1/n$ ergibt sich

$$\sum_{i=1}^{n} g(\hat{x}_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \hat{x}_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n}\frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} = S(n)$$

$$\int_0^1 g(x)dx = \lim_{n\to\infty} S(n) = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1}{2}.$$

- Beispiel: Für den Fall $y(x) = x^3$ mit $a = 0$ und $b = 1$ und $x_i = i/n = \hat{x}_i$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = 1/n$ ergibt sich

$$\sum_{i=1}^{n} y(\hat{x}_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \hat{x}_i^3 \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{i^3}{n^3}\frac{1}{n} = \frac{1}{n^4}\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{1}{n^4}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = S(n)$$

$$\int_0^1 y(x)dx = \lim_{n\to\infty} S(n) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n(n+1)}{2n^2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

- Beispiel: Die Funktion r mit $r(x) = 1$ für $x \in \mathbb{Q}$ und $r(x) = 0$ für $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, ist auf keinem $[a, b] \subset \mathbb{R}$ Riemann intergrierbar!

Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnungen

- In vielen Fällen kann man den Flächeninhalt viel leichter bestimmen.
- Anhand einer Funktion $F(t)$ mit der Eigenschaft

$$F(t) - F(a) = \int_a^t f(x)dx$$

ist der Flächeninhalt unter der Kurve für $f(x)$ zwischen $x = a$ und $x = b$ gegeben durch

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$$

Hauptsatz: Es muss $F'(t) = f(t)$ gelten!

$$F'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{F(t+h) - F(t)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left[\int_a^{t+h} f(x)dx - \int_a^t f(x)dx \right]$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} f(x)dx = \lim_{h\to 0} \underset{x\in[t,t+h]}{\text{Mittelwert}}\{f(x)\} = f(t)$$

Stammfunktionen

- Für die Fälle 138,

$$g(x) = x = G'(x), \quad G(x) = \frac{x^2}{2}, \quad \int_0^1 g(x)dx = G(1) - G(0) = \frac{1}{2}$$

$$f(x) = x^2 = F'(x), \quad F(x) = \frac{x^3}{3}, \quad \int_0^1 f(x)dx = F(1) - F(0) = \frac{1}{3}$$

$$y(x) = x^3 = Y'(x), \quad Y(x) = \frac{x^4}{4}, \quad \int_0^1 y(x)dx = Y(1) - Y(0) = \frac{1}{4}$$

Def: Eine Funktion $F(x)$ mit der Eigenschaft $F'(x) = f(x)$ ist eine *Stammfunktion* für die Funktion $f(x)$.

- Oben sind G, F und Y Stammfunktionen für g, f bzw. y.
- Man merkt, eine Stammfunktion ist nicht eindeutig, z.B. $\tilde{F}(x) = x^3/3 + 1$ ist auch eine Stammfunktion für $f(x)$ und

$$\int_0^1 f(x)dx = \tilde{F}(1) - \tilde{F}(0) = \frac{1}{3}.$$

- Stammfunktionen unterscheiden sich immer durch eine Konstante, z.B. $\tilde{F}(x) - F(x) = 1$.

Unbestimmtes Integral

Def: Das *unbestimmte Integral* von $f(x)$ ist gegeben durch die Menge aller Stammfunktionen,

$$\int f(x)dx = F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

wobei $F'(x) = f(x)$ gilt.

- Man leitet die Stammfunktion ab, um zu bestätigen:

$$\int x^p dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + c, \quad p \neq -1, \quad \int x^{-1} dx = \ln(|x|) + c$$

$$\int e^{\alpha x} dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha} + c, \quad \alpha \neq 0, \quad \int \sin(\omega x) dx = -\frac{\cos(\omega x)}{\omega} + c$$

$$\int \sec^2(x) dx = \tan(x) + c, \quad \int \frac{1}{1+x^2} dx = \tan^{-1}(x) + c$$

- Von einer Tabelle der bekannten Ableitungen, $F(x)$ links und $F'(x)$ rechts, liest man die Stammfunktion für $f(x) = F'(x)$ rechts von $F(x)$ links (einfach rückwärts) ab.

Summenregel und Vielfachregel

- Das unbestimmte Integral einer Summe von Funktionen

$$\int [f(x) + g(x)]dx = F(x)+G(x)+c = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

  ist gegeben durch die Summe der unbestimmten Integrale.
- Das unbestimmte Integral eines Vielfaches einer Funktion

$$\int \lambda f(x)dx = \lambda F(x) + c = \lambda \int f(x)dx$$

  ist gegeben durch das Vielfache des unbestimmten Integrals.
- Mit diesen Regeln bekommt man die Formel für die Stammfunktion eines Polynoms
  $p(x) = p_n x^n + \cdots + p_1 x + p_0$,

$$\int p(x)dx = p_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots p_1 \frac{x^2}{2} + p_0 x + c$$

Kettenregel

- Das folgende unbestimme Integral ist gegeben durch eine (rückwärts) Anwendung der Kettenregel,

$$\int f'(g(x))g'(x)dx = f(g(x)) + c$$

- Beispiel: $f(x) = e^x$, $g(x) = \alpha x$,

$$\int e^{\alpha x}\alpha dx = \int f'(g(x))g'(x)dx = f(g(x)) + c = e^{\alpha x} + c$$

  oder allgemeiner $\int e^{u(x)}u'(x)dx = e^{u(x)} + c$.
- Beispiel: $f(x) = -\cos(x)$, $g(x) = \omega x$,

$$\int \sin(\omega x)\omega dx = \int f'(g(x))g'(x)dx = f(g(x)) + c = -\cos(\omega x) + c$$

  oder allgemeiner $\int \sin(u(x))u'(x)dx = -\cos(u(x)) + c$.

Substitutionen

- Wenn das 1. Beispiel auf 143 umgeschrieben wird,
  $$\int e^{\alpha x} dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha} + c$$
  kann man die Kettenregel mit einer *Substitution*
  $$u = u(x) = \alpha x$$
  betrachten.
- Anstatt einer Integration bezüglich x führt man eine Integration bezüglich u durch.
- Während dx der Breite eines x-Integrationsvierecks entspricht, entspricht
  $$du = u'(x)dx = \alpha dx$$
  der Breite eines u-Integrationsvierecks,
  $$\int e^{\alpha x} dx = \int e^u du/\alpha = \frac{1}{\alpha}\int e^u du = \frac{1}{\alpha} e^u + c = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x} + c$$
- Analog wenn das 2. Beispiel auf 143 umgeschrieben wird,
  $$\int \sin(\omega x) dx = -\frac{\cos(\omega x)}{\omega} + c$$

Substitutionen

- Beispiel: Mit einem Auge auf die Kettenregel

$$\int \frac{u'(x)}{u(x)} dx = \ln |u(x)| + c$$

erkennt man im folgenden Integral, der Zähler ist fast die Ableitung des Nenners

$$\int \frac{x}{1+x^2} dx$$

Daher macht man die Substitution

$$u(x) = 1 + x^2, \quad du = u'(x)dx = 2xdx, \quad xdx = du/2$$

und bekommt

$$\int \frac{xdx}{1+x^2} = \int \frac{du/2}{u} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{2} \ln |u| + c = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + c$$

Substitutionen

- Beispiel: Mit einem Auge auf die Kettenregel

$$\int e^{u(x)} u'(x) dx = e^{u(x)} + c$$

erkennt man im folgenden Integral, neben der Exponentialfunktion steht fast die Ableitung der Potenz,

$$\int x e^{x^2} dx$$

Daher macht man die Substitution

$$u(x) = x^2, \quad du = u'(x) dx = 2x dx, \quad x dx = du/2$$

und bekommt

$$\int x e^{x^2} dx = \int e^u du/2 = \frac{1}{2} \int e^u du = \frac{1}{2} e^u + c = \frac{1}{2} e^{x^2} + c$$

Substitutionen

- Beispiel: Mit einem Auge auf die Kettenregel

$$\int \frac{u'(x)}{1+u(x)^2}dx = \tan^{-1}(u(x)) + c$$

erkennt man im folgenden Integral, wenn die 4 herausgehoben wird

$$\int \frac{dx}{4+x^2} = \int \frac{dx/4}{1+(x/2)^2}$$

und man die Substitution macht,

$$u(x) = x/2, \quad du = u'(x)dx = dx/2, \quad dx = 2du$$

ergibt sich

$$\int \frac{dx}{4+x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{2}\tan^{-1}(u)+c = \frac{1}{2}\tan^{-1}(x/2) + c$$

Bruchzerlegung

- Beispiel: Obwohl der Zähler sich von der Ableitung des Nenners unterscheidet,

$$\int \frac{x}{1+x} dx$$

kann man den Bruch zerlegen,

$$\frac{x}{1+x} = \frac{1+x-1}{1+x} = \frac{1+x}{1+x} - \frac{1}{1+x} = 1 - \frac{1}{1+x}$$

und es ergibt sich

$$\int \frac{x}{1+x} dx = \int 1 dx - \int \frac{1}{1+x} dx = x - \ln|1+x| + c$$

wobei

$$\int \frac{1}{1+x} dx \overset{u=1+x}{=} \int \frac{du}{u} = \ln|u| + c = \ln|1+x| + c$$

Partialbruchzerlegung

- Beispiel: Obwohl der Zähler sich von der Ableitung des Nenners unterscheidet,

$$\int \frac{1}{x^2-1}\,dx$$

kann man den Bruch zerlegen,

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$$

oder mit $1 = A(x+1) + B(x-1)$

$$x = 1 \Rightarrow A = 1/2, \quad x = -1 \Rightarrow B = -1/2$$

Dann mit

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1/2}{x-1} - \frac{1/2}{x+1}$$

ergibt sich

$$\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1} = \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+1| + c$$

Partielle Integration

- Die Produktregel ist die Basis der partiellen Integration,

$$u(x)v(x) = \int [u(x)v(x)]' dx = \int u'(x)v(x)dx + \int u(x)v'(x)dx$$

  oder

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$$

- Beispiel: Für das Integral

$$\int xe^x dx$$

  erkennt man, der problematische Term $x = u(x)$ verschwindet mit $u'(x) = 1$. Daher macht man die Substitutionen,

$$xe^x = u(x)v'(x), \quad u(x) = x, \quad v'(x) = e^x$$

  und bekommt mit $u'(x) = 1$ und $v(x) = e^x$,

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = (x-1)e^x + c$$

Partielle Integration

- Beispiel: Für das Integral

$$\int \ln(x)dx$$

erkennt man, der problematische Term $\ln(x) = u(x)$ wird leichter durch $u'(x) = 1/x$. Daher macht man die Substitutionen,

$$\ln(x) = u(x)v'(x), \quad u(x) = \ln(x), \quad v'(x) = 1$$

und bekommt mit $u'(x) = 1/x$ und $v(x) = x$,

$$\int \ln(x)dx = x\ln(x) - \int x\frac{1}{x}dx = x(\ln(x) - 1) + c$$

- Beispiel: Für das Integral

$$\int \sin(x)e^x dx$$

erkennt man, der Integrand $\sin(x)e^x$ wird $-\sin(x)e^x$, nachdem partielle Integration zweimal durchgeführt wird.

Partielle Integration

- Daher macht man zuerst die Substitutionen,
  $\sin(x)e^x = u(x)v'(x), \quad u(x) = \sin(x), \quad v'(x) = e^x$
  und bekommt mit $u'(x) = \cos(x)$ und $v(x) = e^x$,

$$\int \sin(x)e^x dx = \sin(x)e^x - \int \cos(x)e^x dx$$

- Dann für das letzte Integral macht man die Substitutionen
  $\cos(x)e^x = f(x)g'(x), \quad f(x) = \cos(x), \quad g'(x) = e^x$
  und bekommt mit $f'(x) = -\sin(x)$ und $g(x) = e^x$,

$$\int \cos(x)e^x dx = \cos(x)e^x + \int \sin(x)e^x dx$$

- Wenn die letzten 2 partiellen Integrationen kombiniert werden, ergibt sich (dann $\div 2$)

$$2\int \sin(x)e^x dx = (\sin(x) - \cos(x))e^x + c$$

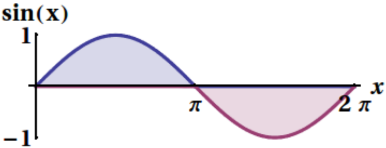
Hausaufgaben, vgl. Kapitel 10 im Lösungsheft

- Durch einen Grenzwert berechnet man das bestimmte Integral der Funktion $y(x) = x + x^2$ zwischen 0 und 1.
- Man löst das letzte Beispiel mit dem Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnungen.
- Für das letzte Beispiel bestimmt man zwei verschiedene Stammfunktionen für $y(x) = x + x^2$.
- Für jede tabellarische Rechnung einer Ableitung im früheren Abschnitt über Differentialrechnungen schreibt man diese bezüglich einer Stammfunktion um.
- Anhand der Kettenregel bestimmt man eine Stammfunktion für $e^{\tan^{-1}(x)}/(1+x^2)$, $-\sin(x)\sin(\cos(x))$, $2xe^{x^2}\ln(e^{x^2})$, und $\cos(\tan(x))\sec^2(x)$.
- Man berechnet das unbestimmte Integral für die folgenden Integranden: $1/(7+2x+x^2)$, $(1+x)/(7+2x+x^2)$, $1/(2+3x^2)$, $(x^2+x+1)/(x^2-4)$, $x/\sqrt{1-x^2}$, x^2e^{-x} und $e^{2x}\cos(3x)$.

Flächeninhaltsrechnungen

- Da $F(x) = -\cos(x)$ eine Stammfunktion für $\sin(x)$ ist,

$$\int_0^\pi \sin(x)dx = F(\pi) - F(0) = -\cos(\pi) + \cos(0) = -(-1) + 1 = 2$$



  d.h. der Flächeninhalt unter $\sin(x)$ von 0 bis π ist 2.

- Für die Auswertung zwischen 0 und π schreibt man,

$$\int_0^\pi \sin(x)dx = -\cos(x)|_0^\pi = -\cos(\pi) + \cos(0) = 2$$

- Da die Werte von $\sin(x)$ zwischen π und 2π die negativen Werte von $\sin(x)$ zwischen 0 und π sind, gilt

$$\int_\pi^{2\pi} \sin(x)dx = -\cos(x)|_\pi^{2\pi} = -\cos(2\pi) + \cos(\pi) = -2 < 0$$

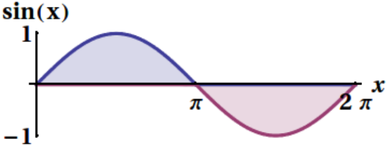
Flächeninhaltsrechnungen

- Die Summe der letzten 2 bestimmten Integrale ist

$$\int_0^{2\pi} \sin(x)dx = \int_0^{\pi} \sin(x)dx + \int_{\pi}^{2\pi} \sin(x)dx = 2 - 2 = 0$$

oder

$$\int_0^{2\pi} \sin(x)dx = -\cos(x)|_0^{2\pi} = -\cos(2\pi) + \cos(0) = -1 + 1 = 0$$



- Auch das rückwärts Integrieren ändert das Vorzeichen,

$$\int_{\pi}^{0} \sin(x)dx = -\cos(x)|_{\pi}^{0} = -2 = \cos(x)|_0^{\pi} = -\int_0^{\pi} \sin(x)dx$$

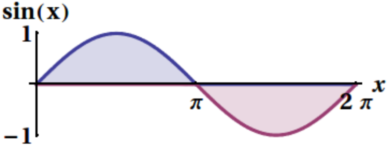
da bei einem rückwärts laufenden x die Breite dx negativ ist.

Flächeninhaltsrechnungen

- Um den Flächeninhalt im schattierten Bereich zu bestimmen, muss man teilweise intergrieren und das Vorzeichen entsprechend anpassen:

Flächeninhalt$(0, 2\pi) =$

$$\int_0^{\pi} \sin(x)dx - \int_{\pi}^{2\pi} \sin(x)dx = 4$$

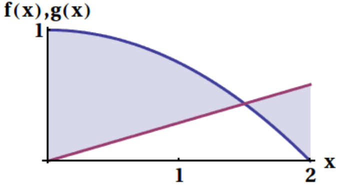


- Analog ist der Flächeninhalt zwischen $f(x) = 1 - x^2/4$ und $g(x) = 7x/24$ zwischen 0 und 2 gegeben durch

$$\int_0^{3/2} [f(x) - g(x)]dx + \int_{3/2}^{2} [g(x) - f(x)]dx =$$

$$\int_0^{3/2} \left[1 - \frac{x^2}{4} - \frac{7x}{24}\right] dx + \int_{3/2}^{2} \left[\frac{7x}{24} - 1 + \frac{x^2}{4}\right] dx =$$

$$\left(x - \frac{x^3}{12} - \frac{7x^2}{48}\right)\Bigg|_0^{3/2} + \left(\frac{7x^2}{48} - x + \frac{x^3}{12}\right)\Bigg|_{3/2}^{2} = \frac{33}{32}$$



Leibniz-Regel

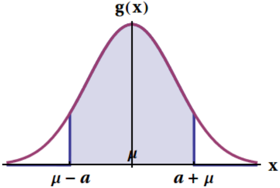
- Man leitet die Funktion ab,
$$L(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(t)dt$$
wobei die Integrationsgrenzen von x abhängen.
- Dafür zerlegt man das Integrationsintervall in 2 Teile $[a(x), b(x)] = [a(x), c] \cup [c, b(x)]$ mit $c \in D_f$,
$$L(x) = \int_{a(x)}^{c} f(t)dt + \int_{c}^{b(x)} f(t)dt = \int_{c}^{b(x)} f(t)dt \overset{\downarrow}{-} \int_{c}^{a(x)} f(t)dt$$
die als Differenz der Kompositionen umgeschrieben wird,
$$L(x) = F(b(x)) - F(a(x)), \quad F(x) = \int_{c}^{x} f(t)dt$$
- Mit der Kettenregel bekommt man die *Leibniz-Regel*,
$$L'(x) = F'(b(x))b'(x) - F'(a(x))a'(x) = f(b(x))b'(x) - f(a(x))a'(x)$$
- Beispiel: $D_x \int_{\ln(x)}^{x^2} \sin(t)dt = \sin(x^2)2x - \sin(\ln(x))/x$.

Wenn keine Formel Anwendbar ist

- Man führt eine Messung von einer Größe x durch, aber es gibt Messfehler dabei. (Details im `Stat Skriptum`)
- Seien $\{x_n\}_{n=1}^{N}$ Stichproben mit

$$\mu \approx \bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} x_n, \quad \sigma^2 \approx s^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{n=1}^{N}(x_n - \bar{x})^2$$

- Man sagt, die Messung X ist *Gauß verteilt*, wenn die Wahrscheinlichkeit dass $|X - \mu| < a$ gilt, durch den Flächeninhalt einer glockenförmigen Kurve gegeben ist,



$$\int_{\mu-a}^{\mu+a} g(x)dx, \quad g(x) = \frac{e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}$$

- Keine Stammfunktion kann für dieses Integral angegeben werden, und die Wahrscheinlichkeiten müssen numerisch approximiert werden, z.B. mit endlich vielen Vierecken.

Trennbare Differentialgleichungen

- Die zeitliche Änderungsrate $m'(t)$ der Masse einer radioaktiven Substanz ist proportional zu der Masse $m(t)$,

$$m'(t) = a \cdot m(t), \quad m(0) = m_0$$

  wobei $a < 0$ ein Proportionalitätsfaktor ist, und m_0 ist die Anfangsmasse.
- Zur Lösung gruppiert man alle m Größen zusammmen,

$$\frac{m'(t)}{m(t)} = a, \quad m(0) = m_0 \qquad (a = a(t) \text{ auch möglich})$$

- und integriert beide Seiten über das Intervall $[0, t]$,

$$\ln\left|\frac{m(t)}{m_0}\right| = \ln|m(t)| - \ln|m(0)| = \int_0^t \frac{m'(s)}{m(s)} ds = \int_0^t a ds = at$$

- Man löst nach $m(t)$ auf und bekommt

$$|m(t)/m_0| = \exp\left(\ln\left|\frac{m(t)}{m_0}\right|\right) = \exp(at) \quad \text{oder} \quad m(t) = m_0 e^{at}$$

Trennbare Differentialgleichungen

- Die zeitliche Änderungsrate einer Tierpopulation mit begrenztem Futter wird modelliert durch

$$p'(t) = \frac{p(t)}{\tau}\left(1 - \frac{p(t)}{K}\right), \quad p(0) = p_0$$

wobei K die *Kapazität* des Lebensraums ist, und τ beeinflusst wie schnell die Kapazität erreicht wird.

- Zur Lösung gruppiert man alle p Größen zusammmen,

$$\frac{p'(t)}{p(t)(1 - p(t)/K)} = \frac{1}{\tau}, \quad p(0) = p_0 \qquad (\tau = \tau(t) \text{ auch möglich})$$

- und nach Partialbruchzerlegung integriert über $[0, t]$

$$\ln\left|\frac{p(t)}{K - p(t)}\right| - \ln\left|\frac{p_0}{K - p_0}\right| = \int_0^t \frac{Kp'(s)}{p(s)(K - p(s))} ds = \int_0^t \frac{1}{\tau} ds = \frac{t}{\tau}$$

- Man löst nach $p(t)$ auf und bekommt

$$p(t) = \frac{K}{1 + (K/p_0 - 1)e^{-t/\tau}}$$

Differentialgleichung erster Ordnung

- Für die allgemeine Differentialgleichung erster Ordnung,

$$y'(t) + a(t)y(t) = b(t), \quad y(0) = y_0$$

- multipliziert man zuerst mit dem *Integrationsfaktor*

$$f(t) = \exp\left(\int_0^t a(s)ds\right), \quad \text{die erfüllt} \quad f'(t) = a(t)f(t),$$

- und bekommt durch die Produktregel,

$$[y(t)f(t)]' = y'(t)f(t)+f'(t)y(t) = f(t)[y'(t)+a(t)y(t)] = f(t)b(t).$$

- Zur Lösung integriert man über das Intervall $[0, t]$,

$$y(t)f(t) - y(0)f(0) = \int_0^t [y(s)f(s)]'ds = \int_0^t f(s)b(s)ds$$

- Man löst nach $y(t)$ auf und bekommt

$$y(t) = \frac{y_0}{f(t)} + \int_0^t \frac{f(s)}{f(t)} b(s)ds$$

Hausaufgaben, vgl. `Kapitel 11` im Lösungsheft

- Man berechnet das bestimmte Integral von $y(x) = x^3 - x$ (a) zwischen -1 und 0, (b) zwischen 0 und $+1$ und (c) zwischen -1 und $+1$. Dann bestimmt man den Flächeninhalt zwischen der Kurve für $y(x)$ und der x-Achse.
- Man bestimmt den Flächeninhalt zwischen $f(x) = \ln(x)$ und $g(x) = (x-1)(x-2+\ln(2))$ zwischen 0 und 2. Hinweis: Obwohl $f(x) \to -\infty$ für $x \to 0$, ist das bestimmte Integral von $f(x)$ zwischen 0 und 1 endlich!
- Man bestätigt, $D_x \int_{\ln(x)}^{x^2} \sin(t)dt = \sin(x^2)2x - \sin(\ln(x))/x$.
- Man approximiert das bestimmte Integral $\int_0^1 g(x)dx$, $g(x) = e^{-x^2/2}/\sqrt{2\pi}$, durch eine Summe $\sum_{i=1}^n g(x_i)\Delta x$, $x_i = i/n$, $\Delta x = 1/n$, für immer größeres n. Hinweis: Der Grenzwert ist ≈ 0.341345.
- Für die logistische Differentialgleichung $p'(t) = p(t)(1-p(t))$, $p(0) = p_0$, leitet man die Lösung $p(t) = 1/(1+(1/p_0 - 1)e^{-t})$ her.

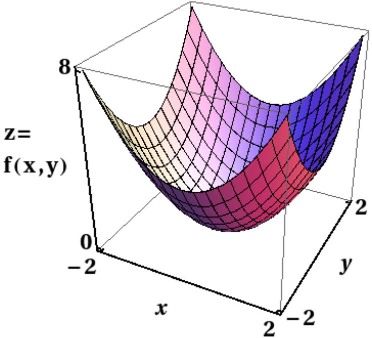
Funktionen mehrerer Variablen

- Beispiel: Die Funktion

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

ordnet einen Wert $f(x, y) \in \mathbb{R}$ für jedes Paar $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ zu, z.B. $f(1, 2) = 1^2 + 2^2 = 5$.

- Diese Funktion lässt sich so grafisch darstellen:



- Es gelten $D = \mathbb{R}^2$ und $B = [0, \infty)$.
- Es gibt für diese Funktion
  a. keine Unendlichkeiten,
  b. keine Sprünge und
  c. keine unendlich schnelle Schwingungen.

  Also analog zum Fall einer Funktion einer einzigen Variable ist diese Funktion stetig.

Stetige Funktionen mehrerer Variablen

Informelle Def: Ein *Grenzwert* L einer Funktion $f(x, y)$ an einer Stelle $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ ist der Wert, der von $f(x, y)$ angenähert wird, während (x_0, y_0) von (x, y) beliebig angenähert wird.

$$\text{Man schreibt den Limes}: \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L.$$

Wenn $f(x_0, y_0)$ existiert und mit dem Grenzwert übereinstimmt, d.h. $L = f(x_0, y_0)$, dann ist die Funktion $f(x, y)$ *stetig* an der Stelle (x_0, y_0).

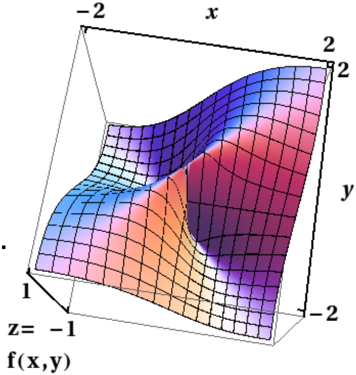
- Anhand der Erfahrung mit Funktionen einer einzigen Variable überzeugt man sich, dass die folgenden Funktionen stetig sind, außer an der Stelle $(x_0, y_0) = (0, 0)$:

$$f_1(x, y) = \text{sign}(x^2 + y^2), \quad f_2(x, y) = \sin(1/(x^2 + y^2))$$

$$f_3(x, y) = 1/(x^2 + y^2) \quad \text{wobei } f_i(0, 0) = 0, \quad i = 1, 2, 3$$

Hinweis: Diese Funktionen hängen nur vom Abstand $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ zwischen dem Punkt (x, y) und dem Ursprung $(0, 0)$ ab. Die Graphen sind Rotationsflächen.

Stetige Funktionen mehrerer Variablen



- Beispiel: Die Funktion

$$f(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}$$

mit $f(0,0) = 0$ lässt sich so grafisch darstellen:

- Es gelten $D = \mathbb{R}^2$ und $B = [-1,+1]$.
- Entlang der Gerade $y = kx$,

$$f(x,kx) = \frac{2k}{1+k^2}, \quad x \neq 0$$

hängt der Wert von f von der Steigung k ab!

- Daher gibt es keinen Wert L, der von f angenähert wird, wähend $(x_0, y_0) = (0,0)$ von (x,y) beliebig angenähert wird.
- Diese Funktion ist nicht stetig an der Stelle $(0,0)$, aber sonst ist sie stetig.

Tangentialebene einer Fläche

- Beispiel: Die Funktion

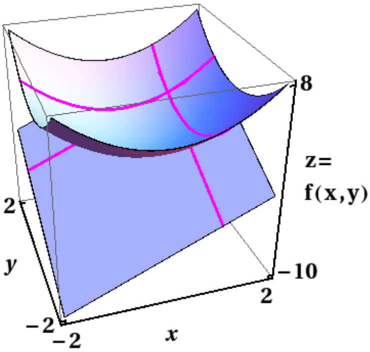
  $$f(x, y) = x^2 + y^2$$

  ist hier zusammen mit einer Ebene grafisch dargestellt, Kontaktpunkt $(x_0, y_0) = (1, 1)$.
- Für fixiertes $y = y_0$ sei $z = f(x, y_0) = u(x)$ die *Spur* in der Fläche durch den Kontaktpunkt. Die Tangente ist

  $$z = u(x_0) + u'(x_0)(x - x_0)$$

- Analog für fixiertes $x = x_0$ sei $z = f(x_0, y) = v(y)$ die Spur in der Fläche durch den Kontaktpunkt. Die Tangente ist

  $$z = v(y_0) + v'(y_0)(y - y_0)$$



Im Kontaktpunkt, Höhe:
$z = f(x_0, y_0)$
$= u(x_0) = v(y_0)$
aber
$u'(x_0) = ? \ldots f_x(x_0, y_0)$
$v'(y_0) = ? \ldots f_y(x_0, y_0)$

Partielle Ableitungen

- Wenn nach der einen Variable abgeleitet wird, während die andere Variable fixiert bleibt, ergeben sich die *partiellen Ableitungen*, d.h. $u'(x_0) = f_x(x_0, y_0)$ und $v'(y_0) = f_y(x_0, y_0)$,

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = \partial_x f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$$

$$f_y(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h} = \partial_y f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

Informelle Def: Sei $w(t) = f(x(t), y(t))$ eine Spur in der Fläche $z = f(x, y)$ über einer differenzierbaren Kurve $(x(t), y(t))$ mit $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$. Weiters existiert die Tangente von $w(t)$ an der Stelle $t = 0$. Wenn alle solchen Tangenten eine Ebene bilden, ist diese die Tangentialebene für f an der Stelle (x_0, y_0).

- Wenn die Tangentialebene einer Funktion $f(x, y)$ an der Stelle (x_0, y_0) existiert, ist sie gegeben durch

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

- Beispiel: $f(x, y) = x^2 + y^2$, $(x_0, y_0) = (1, 1)$: $z = 2x + 2y - 2$.

Differenzierbare Funktionen mehrerer Variablen

Informelle Def: Wenn f_x und f_y in (x_0, y_0) existieren, ist f *partiell differenzierbar* in (x_0, y_0). Wenn es eine Tangentialebene an der Stelle (x_0, y_0) gibt, ist f *differenzierbar* in (x_0, y_0).

Satz: Wenn f_x und f_y in (x_0, y_0) stetig sind, ist f differenzierbar.

- Stetigkeit ist notwendig für Differenzierbarkeit aber nicht für partielle Differenzierbarkeit:
  - Die Funktion $f(x, y) = x^2 + y^2$ ist überall stetig und differenzierbar mit der obigen Tangentialebene.
  - Die Funktion $f(x, y) = 2xy/(x^2 + y^2)$ ist nicht stetig an der Stelle $(0, 0)$ und hat hier keine Tangentialebene. Sie ist aber partiell differenzierbar mit $f_x(0, 0) = 0 = f_y(0, 0)$.
- Anhand der Darstellung der Tangentialebene einer differenzierbaren Funktion,

  $$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

  ist sie waagerecht, d.h. $z =$ Konstante, genau dann wenn

  $$f_x(x_0, y_0) = 0, \quad f_y(x_0, y_0) = 0.$$
- Diese ist eine notwendige Bedingung für eine Extremstelle.

Extrema einer Funktion mehrerer Variablen

- Beispiel: Für die Funktion $f(x, y) = x^2 + y^2$ gilt

$$2x_0 = f_x(x_0, y_0) = 0, \quad 2y_0 = f_y(x_0, y_0) = 0 \quad \text{in} \quad (x_0, y_0) = (0, 0)$$

wo f ein streng lokales Minimum besitzt.

Def: Eine Funktion $f(x, y)$ mit Definitionsbereich D besitzt ein streng *lokales Minimum* an der Stelle $(x_0, y_0) \in D$ wenn

$$f(x_0, y_0) < f(x, y), \quad \text{für jedes } (x, y) \in D \text{ mit } |x - x_0| + |y - y_0| \text{ ausreichend klein,}$$

und ein streng *lokales Maximum* an der Stelle $(x_0, y_0) \in D$ wenn

$$f(x_0, y_0) > f(x, y), \quad \text{für jedes } (x, y) \in D \text{ mit } |x - x_0| + |y - y_0| \text{ ausreichend klein.}$$

Diese sind nicht streng, wenn eine Ungleichung nicht streng ist. Die Extrema sind *global*, wenn eine Ungleichung für alle $(x, y) \in D$ gilt.

Partielle Ableitungen Höherer Ordnung

Def: Die Stelle (x_0, y_0) ist ein *kritischer Punkt* für $f(x, y)$ wenn

$$f_x(x_0, y_0) = 0 = f_y(x_0, y_0)$$

oder wenn eine von diesen nicht existiert.

- Wie bestimmt man, ob ein kritischer Punkt tatsächlich einem lokalen Extremum entspricht?
- Analog zum Fall einer Funktion einer einzigen Variable braucht man auch hier Ableitungen höherer Ordnung.
- Diese werden natürlich so definiert:

$$f_{xx}(x, y) = \partial_x f_x(x, y) = \partial_x^2 f(x, y), \quad f_{yy}(x, y) = \partial_y f_y(x, y) = \partial_y^2 f(x, y)$$

$$f_{xy}(x, y) = \partial_x f_y(x, y) = \partial_y f_x(x, y) = f_{yx}(x, y)$$

  wobei gemischte partielle Ableitungen unabhängig von der Reihenfolge der jeweiligen partiellen Ableitungen sind, d.h. $f_{xy} = f_{yx}$, falls diese stetig sind.
- Man braucht auch die allgemeinere Kettenregel (Details?)

$$D_t f(x(t), y(t)) = f_x(x(t), y(t))x'(t) + f_y(x(t), y(t))y'(t)$$

Lokale Extrema bezüglich mehrerer Variablen

- Wenn $f(x,y)$ ein lokales Minimum oder Maximum in (x_0,y_0) besitzt, müssen $u(x)=f(x,y_0)$ und $v(y)=f(x_0,y)$ ein lokales Minimum oder Maximum in x_0 bzw. y_0 besitzen.
- Gelten müssen dann für ein lokales Minimum

$$0 < u''(x_0) = f_{xx}(x_0,y_0), \quad 0 < v''(y_0) = f_{yy}(x_0,y_0)$$

und für ein lokales Maximum

$$0 > u''(x_0) = f_{xx}(x_0,y_0), \quad 0 > v''(y_0) = f_{yy}(x_0,y_0).$$

- Weiters entlang jeder Gerade $y-y_0=k(x-x_0)$ besitzt $w(x)=f(x,y_0+k(x-x_0))$ ein lokales Minimum oder Maximum in x_0 mit $w''(x_0)>0$ bzw. $w''(x_0)<0$ wobei

$$w''(x_0) \overset{\text{K.R.}}{=} f_{xx}(x_0,y_0)+2kf_{xy}(x_0,y_0)+k^2 f_{yy}(x_0,y_0) \quad = \phi(k)$$

Also müssen die k-Nullstellen von der rechten Seite $\phi(k)$ komplex sein, d.h. die Diskriminante erfüllt

$$[2f_{xy}(x_0,y_0)]^2 - 4f_{xx}(x_0,y_0)f_{yy}(x_0,y_0) < 0.$$

Bedingungen für Lokale Extrema

Satz: Eine Funktion $f(x, y)$ mit Definitionsbereich D sei zweimal stetig partiell differenzierbar in D. Sei $(x_0, y_0) \in D$ ein kritischer Punkt mit

$$f_x(x_0, y_0) = 0 = f_y(x_0, y_0).$$

Sie besitzt ein streng lokales Minimum an dieser Stelle wenn

$$f_{xx}(x_0, y_0) > 0, \quad f_{yy}(x_0, y_0) > 0, \quad f_{xy}^2(x_0, y_0) < f_{xx}(x_0, y_0) f_{yy}(x_0, y_0).$$

Sie besitzt ein streng lokales Maximum an dieser Stelle wenn

$$f_{xx}(x_0, y_0) < 0, \quad f_{yy}(x_0, y_0) < 0, \quad f_{xy}^2(x_0, y_0) < f_{xx}(x_0, y_0) f_{yy}(x_0, y_0).$$

- Beispiel: Für $f(x, y) = x^2 + y^2$ gelten in $(x_0, y_0) = (0, 0)$,

$$f_x(x_0, y_0) = 2x_0 = 0, \quad f_y(x_0, y_0) = 2y_0 = 0$$

und

$$f_{xx}(x_0, y_0) = f_{yy}(x_0, y_0) = 2 > 0, \quad f_{xy}^2(x_0, y_0) = 0 < 4 = f_{xx}(x_0, y_0) f_{yy}(x_0, y_0)$$

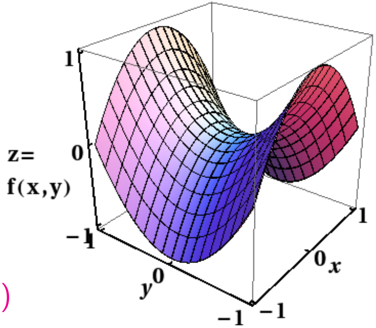
und daher besitzt $f(x, y)$ ein lokales Minimum in (x_0, y_0).

Sattelpunkte

- Beispiel: Die Funktion

  $$f(x,y) = y^2 - x^2$$

  lässt sich so grafisch darstellen:



- Es gelten in $(x_0, y_0) = (0,0)$,

$$f_x(x_0,y_0) = -2x_0 = 0 = 2y_0 = f_y(x_0,y_0)$$

$$f_{xx}(x_0,y_0) = -2, \quad f_{yy}(x_0,y_0) = 2$$

$$f_{xy}^2(x_0,y_0) = 0 > -4 = f_{xx}(x_0,y_0) f_{yy}(x_0,y_0)$$

  und die Ungleichung $f_{xy}(x_0,y_0)^2 > f_{xx}(x_0,y_0) f_{yy}(x_0,y_0)$ ist eine hinreichende Bedingung für einen Sattelpunkt:

Def: Ein kritischer Punkte ist ein *Sattelpunkt*, wenn er keiner Extremstelle entspricht.

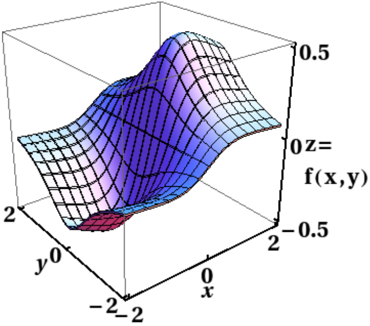
- Die Funktion $f(x,y) = y^2 - x^2$ erfüllt $f(0,y) = y^2 > f(0,0) > -x^2 = f(x,0)$, $x, y \neq 0$. Der kritische Punkt $(x_0,y_0) = (0,0)$ entspricht daher keiner Extremstelle und ist ein Sattelpunkt.

Lokale Extrema von Funktionen mehrerer Variablen

- Beispiel: Die Funktion

$$f(x,y) = \frac{x}{1+x^2}\frac{1}{1+y^2}$$

lässt sich so grafisch darstellen:



- Es gelten in $(\pm 1, 0)$

$$f_x(x,y) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}\frac{1}{1+y^2} \xrightarrow[y=0]{x=\pm 1} 0$$

$$f_y(x,y) = \frac{x}{1+x^2}\frac{-2y}{(1+y^2)^2} \xrightarrow[y=0]{x=\pm 1} 0$$

$$f_{xx}(x,y) = \frac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}\frac{1}{1+y^2} \xrightarrow[y=0]{x=-1} \frac{1}{2} > 0 < 1 \xleftarrow[y=0]{x=-1} \frac{x}{1+x^2}\frac{6y^2-2}{(1+y^2)^3} = f_{yy}(x,y)$$

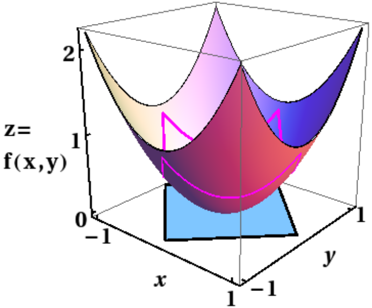
$$f_{xy}(x,y) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}\frac{-2y}{(1+y^2)^2} \xrightarrow[y=0]{x=\pm 1} 0, \quad f_{xx}(1,0) = -\frac{1}{2} < 0 > -1 = f_{yy}(1,0)$$

- Daher besitzt $f(x,y)$ ein lokales Minimum in $(-1,0)$ und ein lokales Maximum in $(+1,0)$.

Hausaufgaben, vgl. `Kapitel 12` im Lösungsheft

- Man stellt die Funktionen $f_1(x,y) = \operatorname{sign}(x^2+y^2)$, $f_2(x,y) = \sin(1/(x^2+y^2))$, $f_3(x,y) = 1/(x^2+y^2)$, $f_i(0,0) = 0$, $i = 1,2,3$, grafisch dar und bestätigt dass diese stetig sind, außer an der Stelle $(0,0)$.
- Man zeigt für die Funktion $f(x,y) = 2xy/(x^2+y^2)$, $f(0,0) = 0$, der Grenzwert $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ existiert nicht, aber die partiellen Ableitungen existieren und erfüllen $f_x(0,0) = 0 = f_y(0,0)$.
- Man bestätigt, dass $f(x,y) = x^2$ und $g(x,y) = y^2$ keine streng lokalen Extremen besitzen.
- Man stellt die Funktion $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ grafisch dar und bestimmt die Tangentialebene in $(1,1,\sqrt{2})$. Existiert eine Tangentialebene in $(0,0,0)$? Für $g(x,y) = \sqrt{1+x^2+y^2}$?
- Man bestimmt die lokalen Extrema für die Funktion $f(x,y) = (x^3/3 - x)/(1+y^2)$.
- Man zeigt, die Funktion $f(x,y) = xy$ besitzt einen Sattelpunkt.

Eingeschränkte Globale Extrema



- Beispiel: Man findet die globalen Extrema für $f(x,y) = x^2 + y^2$ über $Q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}$.
- Der einzige kritische Punkt für $f(x,y)$ ist $(0,0) \in Q$ mit $f(0,0) = 0$.
- Für die Extremestellen am Rand von Q untersucht man zuerst die Seite $y = 1 - x$, $x \in [0,1]$. Hier sind die Werte von $f(x,y)$ gegeben durch $g(x) = f(x, 1-x) = 1 - 2x + 2x^2$, $x \in [0,1]$.
- Der einzige kritische Punkt von $g(x)$ ist $x = \frac{1}{2}$ mit $g(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$, und die Randwerte sind $g(0) = 1 = g(1)$.
- Die entsprechenden Werte für $f(x,y)$ sind $f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = g(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ und $f(0,1) = g(0) = 1 = g(1) = f(1,0)$.
- Die anderen Seiten von Q sind ähnlich.
- Das globale Minimum von f auf Q ist $f(0,0) = 0$ und das globale Maximum von f auf Q ist $f(0,\pm 1) = f(\pm 1, 0) = 1$.
- Am Rand von Q sind die globalen Extrema $1/2$ und 1.

Lagrangesche Funktionen

- Manchmal ist es schwierig, eine Abhängigkeit zwischen x und y in der Einschränkungsmenge mit einer Funktion einer einzigen Variable darzustellen, z.B. $y(x) = 1 - x$ im letzten Beispiel.
- Sei die Einschränkungsmenge implizit gegeben durch

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = 0\}$$

  und man sucht die globalen Extrema von $f(x, y)$ in E.
- Obwohl eine eingeschränkte Extremstelle $(x_0, y_0) \in E$ noch nicht bekannt ist, sei $y = y(x)$ eine Funktion, die E in der Nähe von (x_0, y_0) darstellt,

$$y(x_0) = y_0, \quad g(x, y(x)) = 0, \quad |x - x_0| \text{ klein genug.}$$

- Beispiel: Mit $f(x, y) = xy$ und $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ besitzt $f(x, y)$ globale Extrema in $(\pm 1/\sqrt{2}, \pm 1/\sqrt{2}) \in E$, wobei E in diesen Punkten entweder durch
  $y(x) = y_1(x) = +\sqrt{1 - x^2}$ oder durch
  $y(x) = y_2(x) = -\sqrt{1 - x^2}$ dargestellt wird.

Lagrangesche Funktionen

- Durch die Kettenregel

$$D_x g(x, y(x)) = g_x(x, y(x)) + g_y(x, y(x))y'(x)$$

Da $g(x, y(x)) = 0$ und $y(x_0) = y_0$ gelten, folgen

$$0 = D_x g(x, y(x))|_{x=x_0} = g_x(x_0, y_0) + g_y(x_0, y_0)y'(x_0) = 0 \qquad -y'(x_0) = \frac{g_x(x_0, y_0)}{g_y(x_0, y_0)}$$

- Durch die Kettenregel

$$D_x f(x, y(x)) = f_x(x, y(x)) + f_y(x, y(x))y'(x)$$

Da $(x_0, y(x_0)) = (x_0, y_0)$ für $f(x, y(x))$ extrem ist, folgen

$$0 = D_x f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0) + f_y(x_0, y_0)y'(x_0) = 0 \qquad -y'(x_0) = \frac{f_x(x_0, y_0)}{f_y(x_0, y_0)} = \frac{g_x(x_0, y_0)}{g_y(x_0, y_0)}$$

- Daher sucht man (x_0, y_0) durch die Bedingungen,

$$f_x(x_0, y_0) = \lambda g_x(x_0, y_0), \quad f_y(x_0, y_0) = \lambda g_y(x_0, y_0), \quad \text{für } \lambda \in \mathbb{R}$$

(λ ist das gemeinsame Vielfache im Bruchteil bei $y'(x_0)$)

eines kritischen Punktes für die *Lagrangesche Funktion*,

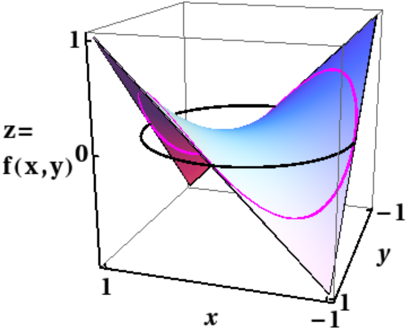
$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$$

wobei λ ein *Lagrangescher Multiplikator* für die Einschränkung $g(x, y) = 0$ ist.

Lagrangesche Funktionen

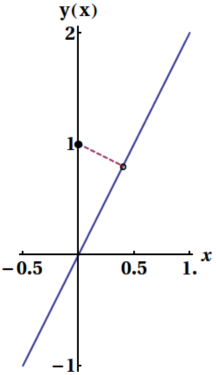
- Beispiel: Mit $f(x, y) = xy$ und $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ sind die Bedingungen eines kritischen Punktes für $L(x, y, \lambda) = xy - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$ gegeben durch

$$L_x(x, y, \lambda) = y - 2x\lambda = 0$$
$$L_y(x, y, \lambda) = x - 2y\lambda = 0$$
$$L_\lambda(x, y, \lambda) = 1 - x^2 - y^2 = 0$$



- Mit $y = 2\lambda x$ folgt $x = 2\lambda y = 4\lambda^2 x$. Da $(x, y) \in E$, kann $x = y = 0$ nicht gelten, und es folgt $\lambda = \pm 1/2$.
- Aus $y = 2\lambda x$ und $x = 2\lambda y$ folgt $y = \pm x$. Aus $1 = x^2 + y^2 = 2x^2 = 2y^2$ folgt $(x, y) = (\pm 1/\sqrt{2}, \pm 1/\sqrt{2})$.
- Dann ist $f(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) = 1/2 = f(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ das globale Maximum, und das globale Minimum ist $f(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}) = -1/2 = f(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$.

Lagrangesche Funktionen



- Beispiel: Man sucht den minimalen Abstand zwischen dem Punkt $(0,1)$ und der Gerade $\{(x,y) : y = 2x\}$.
- Der Abstand $\sqrt{(x-0)^2 + (y-1)^2}$ zwischen dem Punkt $(0,1)$ und einem allgemeinen Punkt (x,y) wird minimiert, wenn $f(x,y) = x^2 + (y-1)^2$ minimiert wird.
- Die Einschränkung lässt sich mit $g(x,y) = y - 2x = 0$ darstellen.
- Die Bedingungen eines kritischen Punktes für die Lagrangesche Funktion

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y) \\ = x^2 + (y-1)^2 - \lambda(y-2x) \quad \text{sind} \quad \begin{cases} L_x(x,y,\lambda) = 2x + 2\lambda = 0 \\ L_y(x,y,\lambda) = 2(y-1) - \lambda = 0 \\ L_\lambda(x,y,\lambda) = 2x - y = 0 \end{cases}$$

- Mit $x = -\lambda$, $y = 1 + \lambda/2 = 1 - x/2$ und $0 = y - 2x = (1 - x/2) - 2x = 1 - 5x/2$ ist der näheste Punkt (die Projektion) in E gegeben durch $x = 2/5$ und $y = 2x = 4/5$.
- Der Abstand ist $\sqrt{(2/5-0)^2 + (4/5-1)^2} = 1/\sqrt{5}$.

Konvexität, Konkavität, Globale Extrema

Def: Eine zweimal stetig partiell differenzierbare Funktion $f(x, y)$ ist *konvex* in der Menge D wenn $\forall (x, y) \in D$,

$$f_{xx}(x, y) > 0, \quad f_{yy}(x, y) > 0, \quad f_{xy}^2(x, y) < f_{xx}(x, y) f_{yy}(x, y)$$

und *konkav* in D wenn $\forall (x, y) \in D$,

$$f_{xx}(x, y) < 0, \quad f_{yy}(x, y) < 0, \quad f_{xy}^2(x, y) < f_{xx}(x, y) f_{yy}(x, y)$$

Satz: Sei $f(x, y)$ eine zweimal stetig partiell differenzierbare Funktion mit einem kritischen Punkt in (x_0, y_0). Wenn $f(x, y)$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ konvex bzw. konkav ist, ist $f(x_0, y_0)$ das globale Minimum bzw. Maximum für $f(x, y)$.

- Für die Funktion $f(x, y) = x^2 + y^2$ gelten $f_{xx}(x, y) = 2 = f_{yy}(x, y)$ und $f_{xy}(x, y) = 0$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Daher ist sie global konvex, und sie besitzt ein globales Minimum im kritischen Punkt $(0, 0)$.

Gradient und Hessematrix

- Eine ausreichend differenzierbare Funktion $f(x, y)$ lässt sich folgendermassen quadratisch in (x, y) approximieren:

$$f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$
$$+\frac{1}{2} f_{xx}(x_0,y_0)(x-x_0)^2 + f_{xy}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) + \frac{1}{2} f_{yy}(x_0,y_0)(y-y_0)^2$$

- Vektoren und Matrizen werden im nächsten Abschnitt präsentiert, aber der *Gradient* Vektor $\nabla f(x, y)$ und die Hessematrix $\nabla^2 f(x, y)$ sind

$$\nabla f(x,y) = \begin{bmatrix} f_x(x,y) \\ f_y(x,y) \end{bmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \nabla^2 f(x,y) = \begin{bmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{bmatrix}$$

- Das Skalarprodukt, die Transponierte und die Multiplikation von Matrizen werden im nächsten Abschnitt definiert.
- Durch diese ist die obige quadratische Approximation gegeben durch

$$f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + \begin{bmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{bmatrix}^\top \nabla f(x_0,y_0) + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{bmatrix}^\top \nabla^2 f(x_0,y_0) \begin{bmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{bmatrix}$$

Hausaufgaben, vgl. `Kapitel 12&13` im Lösungsheft

- Man bestimmt die lokalen Extrema für die Funktion $f(x, y) = (x^3/3 - x)/(1 + y^2)$.
- Man zeigt, die Funktion $f(x, y) = xy$ besitzt einen Sattelpunkt.
- Man bestimmt die globalen Extrema von $f(x, y) = x^2 + y^2$ über $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x|, |y|\} \leq 1\}$ und über den Rand von Q.
- Man bestimmt die globalen Extrema von $f(x, y) = y^2 - x^2$ über $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = 0\}$ wobei $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$.
- Man bestimmt den minimalen Abstand zwischen dem Punkt $(2, 3)$ und dem Kreis $x^2 + y^2 = 1$. Gleichzeitig findet man die Projektion von diesem Punkt auf den Kreis.
- Man bestimmt den minimalen Abstand zwischen dem Punkt $(1, 2, 3) \in \mathbb{R}^3$ und der Ebene $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$. Gleichzeitig findet man die Projektion von diesem Punkt auf die Ebene.

Lösung eines linearen Gleichungssystems

- Eine allgemeine Lösungsmethode für lineare Gleichungssysteme ist Gaußsche Elimination:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & 6x_2 & + & 9x_3 & = & 6 \\ 2x_1 & + & 5x_2 & - & 8x_3 & = & -10 \\ x_1 & - & 4x_2 & - & 7x_3 & = & -8 \end{array}$$

äquivalent,
$\mathrm{II} - \frac{2}{3}\mathrm{I} \to \mathrm{II}$
$\mathrm{III} - \frac{1}{3}\mathrm{I} \to \mathrm{III}$

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & 6x_2 & + & 9x_3 & = & 6 \\ & & x_2 & - & 14x_3 & = & -14 \\ & - & 6x_2 & - & 10x_3 & = & -10 \end{array}$$

äquivalent,
$\mathrm{III} + \frac{6}{1}\mathrm{II} \to \mathrm{III}$

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & 6x_2 & + & 9x_3 & = & 6 \\ & & x_2 & - & 14x_3 & = & -14 \\ & & & - & 94x_3 & = & -94 \end{array}$$

Lösung durch Rückwärtssubstitution:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 3x_1 & + & 6x_2 & + & 9x_3 & = & 6 & \Rightarrow & x_1 = \frac{1}{3}(6 - 6x_2 - 9x_3) = -1 \\ & & x_2 & - & 14x_3 & = & -14 & \Rightarrow & x_2 = -14 + 14x_3 = 0 \uparrow \\ & & & - & 94x_3 & = & -94 & \Rightarrow & x_3 = +1 \uparrow \end{array}$$

Vektoren und Matrizen

- Dieses lineare Gleichungssystem lässt sich mit Matrizen und Vektoren vorteilhaft umschreiben.
- Multiplikation der Matrix A mit dem Vektor $\boldsymbol{c}$ ist gegeben durch Skalarprodukte wie $(1,2) \cdot (7,8) = 1 \times 7 + 2 \times 8$,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad A\boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} (1,2) \cdot (7,8) \\ (3,4) \cdot (7,8) \\ (5,6) \cdot (7,8) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 \\ 53 \\ 83 \end{bmatrix}$$

- Man schreibt, $A \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$, d.h. A hat Dimensionen 3×2 mit 3 Zeilen und 2 Spalten. Achtung: #Spalten(A)=#Zeilen($\boldsymbol{c}$).
- Man schreibt, $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^2$ oder $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$, d.h. $\boldsymbol{c}$ ist ein Vektor aber auch eine Matrix mit 2 Zeilen und 1 Spalte.
- Das Skalarprodukt wird auch durch Matrix-Multiplikation so gegeben,

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \end{bmatrix} = 1 \times 7 + 2 \times 8 = 23$$

wobei $\boldsymbol{a}^\top$ die Transponierte vom Vektor $\boldsymbol{a}$ bezeichnet.

Vektoren und Matrizen

- Eine direkte Rechnung zeigt für $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^2$, $A \in \mathbb{R}^{3\times 2}$, $B \in \mathbb{R}^{2\times 3}$,

$$(A\boldsymbol{c})^\top = \boldsymbol{c}^\top A^\top \in \mathbb{R}^{1\times 3}, \quad (AB)^\top = B^\top A^\top \in \mathbb{R}^{3\times 3}, \quad (BA)^\top = A^\top B^\top \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

- Das Produkt $A^\top A$ ergibt sich häufig, z.B.

$$A^\top A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35 & 44 \\ 44 & 56 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

- Die Summe oder Differenz von 2 Matrizen (oder Vektoren) mit den gleichen Dimensionen gilt komponentweise,

$$\text{mit } B = \begin{bmatrix} +6 & -5 \\ -4 & +3 \\ +2 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{gilt} \quad A + B = \begin{bmatrix} +7 & -3 \\ -1 & +7 \\ +7 & +5 \end{bmatrix}.$$

- Sowie Skalar-Multiplikation: $k\boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 7k \\ 8k \end{bmatrix}$, $k \in \mathbb{R}$.
- Die Euklidische Norm eines Vektors ist gegeben z.B. durch

$$\|\boldsymbol{c}\| = \sqrt{\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{c}} = \sqrt{\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{c}} = \sqrt{7^2 + 8^2} = \sqrt{113}$$

Lösung eines linearen Gleichungssystems

- Mit den folgenden Matrizen und Vektoren

$$M = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 2 & 5 & -8 \\ 1 & -4 & -7 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ -10 \\ -8 \end{bmatrix}$$

  lässt sich das obige lineare Gleichungssystem mit $M\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ darstellen.
- Die Matrix

$$M^{-1} = \frac{1}{282} \begin{bmatrix} 67 & -6 & 93 \\ -6 & 30 & -42 \\ 13 & -18 & -3 \end{bmatrix}$$

  bezeichnet die *Inverse* von M mit der Eigenschaft

$$M^{-1}M = MM^{-1} = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

  wobei I die *Einheitsmatrix* bezeichnet.
- Wenn M^{-1} existiert, ist M *invertierbar*.

Inverse Matrix

- Die Inverse kann auch durch Eliminationsschritte berechnet werden.
- Beispielsweise für die obige Matrix M bildet man die ergänzte Matrix

$$[M|I] = \left(\begin{array}{rrr|rrr} 3 & 6 & 9 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & -8 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & -7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

- Man führt die analogen Eliminationsschritte durch,

$$\begin{array}{rcl} \frac{1}{3}\mathrm{I} & \to & \mathrm{I} \\ \mathrm{II} - \frac{2}{3}\mathrm{I} & \to & \mathrm{II} \\ \mathrm{III} - \frac{1}{3}\mathrm{I} & \to & \mathrm{III} \end{array} \quad \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 3 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -14 & -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -10 & -\frac{1}{3} & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\mathrm{III} + \frac{6}{1}\mathrm{II} \to \mathrm{III} \quad \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 3 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -14 & -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -94 & -\frac{13}{3} & 6 & 1 \end{array}\right)$$

um die streng untere Dreieckselemente von M zu nullen.

Inverse Matrix

- Dann führt man weitere Eliminationsschritte durch,

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{I} + \frac{3}{94}\mathrm{III} & \to & \mathrm{I} \\ \mathrm{II} - \frac{14}{94}\mathrm{III} & \to & \mathrm{II} \\ -\frac{1}{94}\mathrm{III} & \to & \mathrm{III} \end{array} \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & \frac{55}{282} & \frac{9}{47} & \frac{3}{94} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{47} & \frac{5}{47} & \frac{-7}{47} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{13}{282} & -\frac{3}{47} & -\frac{1}{94} \end{array}\right)$$

$$\mathrm{I} - \frac{2}{1}\mathrm{II} \to \mathrm{I} \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{67}{282} & -\frac{1}{47} & \frac{31}{94} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{47} & \frac{5}{47} & \frac{-7}{47} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{13}{282} & -\frac{3}{47} & -\frac{1}{94} \end{array}\right) = [I|M^{-1}]$$

  um die streng obere Dreieckselemente von M zu nullen.
- Hausaufgabe: Man zeigt, die 3×3 Matrix auf der rechten Seite ist M^{-1} wie früher angegeben.
- Hausaufgabe: Man zeigt, die Lösung des obigen linearen Gleichungssystems $M\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ ist gegeben durch

$$I\boldsymbol{x} = M^{-1}M\boldsymbol{x} = M^{-1}\boldsymbol{b} \quad \text{oder} \quad \boldsymbol{x} = M^{-1}\boldsymbol{b}$$

Linear Abhängigkeit und Rang

- Eine lineare Kombination von Vektoren $\boldsymbol{m}_1, \boldsymbol{m}_2, \ldots \boldsymbol{m}_n$ ist ein Vektor
$$x_1 \boldsymbol{m}_1 + x_2 \boldsymbol{m}_1 + \cdots + x_n \boldsymbol{m}_n$$
für $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$.
- Vektoren $\boldsymbol{m}_1, \boldsymbol{m}_2, \ldots, \boldsymbol{m}_n$ sind linear unabhängig, wenn $[x_1, x_2, \ldots, x_n] = \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ aus
$$x_1 \boldsymbol{m}_1 + x_2 \boldsymbol{m}_1 + \cdots + x_n \boldsymbol{m}_n = \boldsymbol{0}$$
folgt, und sonst sind die Vektoren linear abhängig.
- Eine Matrix M ist invertierbar genau dann, wenn ihre Spalten $M = [\boldsymbol{m}_1 \ \boldsymbol{m}_2 \ \cdots \ \boldsymbol{m}_n]$ linear unabhängig sind.
- Der Rang einer Matrix $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ist die maximale Anzahl der linear unabhängigen Spalten.
- Beispiel: Der Rang der Matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = [\boldsymbol{a}_1 \ \boldsymbol{a}_2]$ ist 2:
Hausaufgabe: Auch 2 für $A^\top$.

$$x_1 \boldsymbol{a}_1 + x_2 \boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{0} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 0 \\ 3x_1 + 4x_2 &= 0 \\ 5x_1 + 6x_2 &= 0 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Cramersche Regel

- Beispiel: Die Lösung $u = -1$, $v = 2$, des 2×2 linearen Gleichungssystems $A\boldsymbol{u} = \boldsymbol{w}$,

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{array}{rcl} 3u + 2v & = & 1 \\ 6u + 5v & = & 4 \end{array}$$

  ist gegeben durch,

$$u = \det([\boldsymbol{w}\ \boldsymbol{a}_2]) / \det(A), \quad v = \det([\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{w}]) / \det(A)$$

  wobei $\boldsymbol{a}_1$ und $\boldsymbol{a}_2$ die Spalten von A bezeichnen, und

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

  ist die Determinante für die 2×2 Matrix $\{a_{i,j} : i, j = 1, 2\}$.
- Mit $M = [\boldsymbol{m}_1\ \boldsymbol{m}_2\ \boldsymbol{m}_3]$ ist die Lösung des 3×3 Gleichungssystems $M\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ gegeben durch,

$$x_1 = \frac{\det([\boldsymbol{b}\ \boldsymbol{m}_2\ \boldsymbol{m}_3])}{\det(M)}, \quad x_2 = \frac{\det([\boldsymbol{m}_1\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{m}_3])}{\det(M)}, \quad x_3 = \frac{\det([\boldsymbol{m}_1\ \boldsymbol{m}_2\ \boldsymbol{b}])}{\det(M)}$$

Determinante

- Die Determinante für eine 3×3 Matrix wird *rekursiv* durch die Definition für 2×2 Teilmatrizen so definiert,

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11} \det \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$-a_{12} \det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} + a_{13} \det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

- Man erhält die Teilmatrix, deren Determinante mit a_{11} multipliziert wird, wenn man die Zeile und Spalte von A entfernt, in denen a_{11} sich befindet.
- Die anderen Teilmatrizen werden analog bestimmt.
- Das Vorzeichen der Terme in der obigen Summe alterniert!
- Diese Methode zur Lösung eines linearen Gleichungssystems durch Determinanten heißt die *Cramersche Regel*.
- Ist A invertierbar, d.h. $\det(A) \neq 0$, funktioniert die Methode.
- Der Aufwand ist aber groß, wenn das System groß ist!

Lösbarkeit und Kern

- Das lineare Gleichungssystem $M\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ ist zu lösen,

$$M = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 2 & 5 & 8 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Es gilt aber $\det(M) = 0$, und daher ist M nicht invertierbar!
- Das Ergebnis der Gaußschen Elimination ist trotzdem

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & 9 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \qquad \begin{aligned} x_1 &= 2 - 2x_2 - 3x_3 = -2 + x_3 \\ \uparrow x_2 &= 2 - 2x_3 \\ x_3 &\text{ beliebig} \end{aligned}$$

- Mit $\boldsymbol{x}^\star = [-2, 2, 0]^\top$ gilt $M\boldsymbol{x}^\star = \boldsymbol{b}$.
- Mit $\hat{\boldsymbol{x}} = [1, -2, 1]^\top$ gilt $M\hat{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{0}$, und daher $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ löst $\boldsymbol{x}_\lambda = \boldsymbol{x}^\star + \lambda\hat{\boldsymbol{x}}$ das System: $M\boldsymbol{x}_\lambda = M\boldsymbol{x}^\star + \lambda M\hat{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{b}$.

Achtung: Das Produkt der diagonalen Elemente nach der Gaußschen Elimination 184 ist die Determinante! So kann die Determinante mit minimalem Aufwand berechnet werden!

Lösbarkeit und Kern

- Der Kern einer Matrix A ist die Menge der Vektoren $\boldsymbol{x}$, die $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ erfüllen.
- Jedes Vielfache vom Vektor $\hat{\boldsymbol{x}}$ liegt im Kern der Matrix M, d.h. $M(\lambda\hat{\boldsymbol{x}}) = \lambda M\hat{\boldsymbol{x}} = \mathbf{0}$.
- Wenn der Vektor $\boldsymbol{b}$ anders ist, z.B.

$$M = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 2 & 5 & 8 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}$$

  dann ergibt sich nach Gaußchen Elimination,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & 9 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 1?$$

- Für diesen Vektor $\boldsymbol{b}$ gibt es keine Lösung des Systems.
- Der Kern von $M^\top$ besteht aus Vielfachen von $\check{\boldsymbol{x}} = [-1, 1, 1]^\top$.
- Das System $M\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ hat eine Lösung, nur wenn $\check{\boldsymbol{x}}^\top \boldsymbol{b} = 0$.

Eigenvektoren und Eigenwerte

- Wenn eine Matrix diagonal ist, ist die Wirkung der Matrix klar, z.B. im folgenden Fall werden die Komponenten von $\boldsymbol{x}$ durch die jeweiligen Vielfachen vergrößert,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} = \text{diag}\{2, 5, 9\}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad A\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 5x_2 \\ 9x_3 \end{bmatrix}$$

- Hier sieht man auch mit den Einheitsvektoren

$$\hat{\boldsymbol{e}}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{\boldsymbol{e}}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{\boldsymbol{e}}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

  es gelten

$$A\hat{\boldsymbol{e}}_1 = 2\hat{\boldsymbol{e}}_1, \quad A\hat{\boldsymbol{e}}_2 = 5\hat{\boldsymbol{e}}_2 \quad \text{und} \quad A\hat{\boldsymbol{e}}_3 = 9\hat{\boldsymbol{e}}_3$$

  d.h. für $i = 1, 2, 3$ bildet die Matrix A ein Vielfaches von $\hat{\boldsymbol{e}}_i$ in ein Vielfaches von $\hat{\boldsymbol{e}}_i$ ab. Diese Vielfachen sind *Eigenräume*.
- Ähnliches gilt für allgemeinere Matrizen nach Transformationen.

Eigenvektoren und Eigenwerte

- Für eine allgemeine Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ sucht man eine Transformation $S \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, wobei A so

$$S^{-1}AS = \Lambda = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$$

auf eine diagonale Matrix transformiert wird.
- Mit einer Spalten-Zerlegung $S = [\boldsymbol{s}_1 \ \boldsymbol{s}_2 \ \boldsymbol{s}_3]$ lässt sich die obige Gleichung $AS = S\Lambda$ so umschreiben,

$$A\boldsymbol{s}_i = \boldsymbol{s}_i\lambda_i, \quad i = 1, 2, 3$$

- Da $(A - \lambda_i I)\boldsymbol{s}_i = \mathbf{0}$ für ein $\boldsymbol{s}_i \neq \mathbf{0}$ gelten muss, sieht man von der Cramerschen Regel, es muss gelten

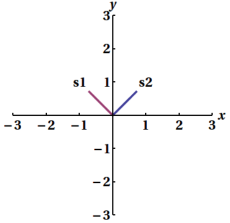
$$\det(A - \lambda_i I) = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

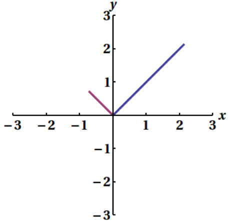
- Unterschiedliche Nullstellen λ_i für das *charakteristische Polynom* $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ führen zu linear unabhängigen Vektoren $\boldsymbol{s}_i$, d.h. S^{-1} existiert und A ist diagonalisierbar.
- Diese Nullstellen $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ sind die *Eigenwerte*, und die jeweiligen *Eigenvektoren* sind $\{\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2, \boldsymbol{s}_3\}$. Vielfache der Eigenvektoren sind *Eigenräume*.

Eigenvektoren und Eigenwerte

- Beispiel: Für die folgende Matrix A werden die Vektoren links in die Vektoren rechts abgebildet,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$





- Das charakteristische Polynom hat Nullstellen $\lambda \in \{1, 3\}$,

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} (2-\lambda) & 1 \\ 1 & (2-\lambda) \end{bmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1$$

- Mit $\mu = 1/\sqrt{2}$ sind die entsprechenden Eigenvektoren $\boldsymbol{s}_1 = [-\mu\ \mu]^\top$ und $\boldsymbol{s}_2 = [\mu\ \mu]^\top$ für $\lambda_1 = 1$ bzw. $\lambda_2 = 3$,

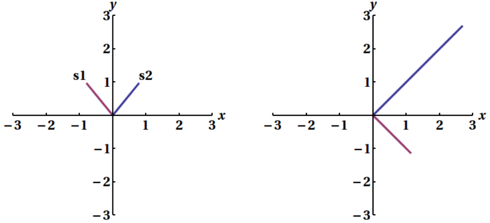
$$(A - 1\,I)\boldsymbol{s}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{s}_1 = \mathbf{0}, \quad (A - 3\,I)\boldsymbol{s}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \boldsymbol{s}_2 = \mathbf{0}$$

- Die Eigenvektoren sind senkrecht, weil A symmetrisch ist.

Eigenvektoren und Eigenwerte

- Beispiel: Für die folgende Matrix A werden die Vektoren links in die Vektoren rechts abgebildet,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$



- Das charakteristische Polynom hat Nullstellen $\lambda \in \{1 \pm \sqrt{6}\}$,

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} (1-\lambda) & 2 \\ 3 & (1-\lambda) \end{bmatrix} = (1-\lambda)^2 - 6$$

- Mit $\mu = \sqrt{2/5}$ und $\nu = \sqrt{3/5}$ sind die entsprechenden Eigenvektoren $\boldsymbol{s}_1 = [-\mu \ \nu]^\top$ und $\boldsymbol{s}_2 = [\mu \ \nu]^\top$ für $\lambda_1 = 1 - \sqrt{6}$ bzw. $\lambda_2 = 1 + \sqrt{6}$,

$$(A - (1-\sqrt{6})I)\boldsymbol{s}_1 = \mathbf{0}, \quad (A - (1+\sqrt{6})I)\boldsymbol{s}_2 = \mathbf{0}$$

- A ist nicht symmetrisch, die Eigenvektoren nicht senkrecht.

Eigenvektoren und Eigenwerte

- Sei $AS = S\Lambda$ die Eigenraum-Zerlegung für A, wobei $\Lambda = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2\}$ und $S = [\boldsymbol{s}_1 \; \boldsymbol{s}_2]$ invertierbar ist.
- Sei ein beliebiger Vektor $\boldsymbol{x}$ bezüglich der Eigenvektoren so dargestellt,
$$\boldsymbol{x} = y_1 \boldsymbol{s}_1 + y_2 \boldsymbol{s}_2$$
d.h. $\boldsymbol{x} = S\boldsymbol{y}$ wobei $\boldsymbol{y} = [y_1 \; y_2]^\top$.
- Dann wird die Wirkung von A bezüglich Vielfachen der Eigenvektoren so dargestellt,
$$A\boldsymbol{x} = AS\boldsymbol{y} = S\Lambda\boldsymbol{y} = \lambda_1(y_1\boldsymbol{s}_1) + \lambda_2(y_2\boldsymbol{s}_2)$$
- Anwendung: Iterative Verfahren, $\boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{b} + (I - A)\boldsymbol{x}_{k-1}$, $\boldsymbol{x}_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$ nur wenn $\max\{\lambda(I - A)\} < 1$, weil $\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x} = (I - A)(\boldsymbol{x}_{k-1} - \boldsymbol{x}) = (I - A)^k(\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \boldsymbol{0}$.
- Anwendung: Sei $\tilde{\boldsymbol{x}}$ eine Lösung des Systems $A\tilde{\boldsymbol{x}} = \tilde{\boldsymbol{b}}$, wobei Fehler in $\tilde{\boldsymbol{b}} \approx \boldsymbol{b} = A\boldsymbol{x}$ vorhanden sind. Dann mit $\kappa(A) = \sqrt{\max\{\lambda(A^\top A)\}}/\sqrt{\min\{\lambda(A^\top A)\}}$ gilt,
$$\frac{\|\boldsymbol{x} - \tilde{\boldsymbol{x}}\|}{\|\boldsymbol{x}\|} \leq \kappa(A)\frac{\|\boldsymbol{b} - \tilde{\boldsymbol{b}}\|}{\|\boldsymbol{b}\|}$$

Hauptkomponentenanalyse

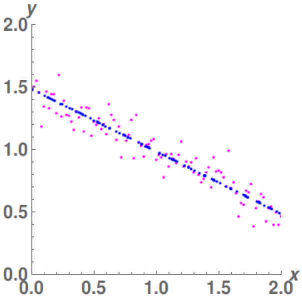
- Gemessene Daten:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{bmatrix}$$

- Zentrieren: $\boldsymbol{e} = [1, 1, \ldots, 1] \in \mathbb{R}^{1\times n}$,

$$X_\mathrm{z} = X - (X\boldsymbol{e}^\top/n)\boldsymbol{e}$$

- Sphären:



Kovarianz: $K = X_\mathrm{z}X_\mathrm{z}^\top/n, \quad KV = V\Lambda, \quad X_\mathrm{s} = \Lambda^{-\frac{1}{2}}V^\top X_\mathrm{z}$

- Seien $V = [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2]$ und $\Lambda = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2\}$, $\lambda_1 > \lambda_2$.
- Die Richtungen $\boldsymbol{v}_1$ und $\boldsymbol{v}_2$ sind die Hauptkomponenten.
- Die Varianz λ_1 der Datensteuung in der Richtung $\boldsymbol{v}_1$ ist größer als die Varianz der Datensteuung in der Richtung $\boldsymbol{v}_2$.
- Kompromieren: $\boldsymbol{p} = [1, 0] \in \mathbb{R}^{1\times 2}$ (da $\lambda_1 > \lambda_2$),

$$X_\mathrm{k} = V\Lambda^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{p}^\top\boldsymbol{p}X_\mathrm{s} + X - X_\mathrm{z}$$

Lineares System von Differentialgleichungen

- Analog zum Anfangswertproblem 159 gibt es Anwendungen

$$\begin{cases} m'(t) = a \cdot m(t) \\ m(0) = m_0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x}'(t) = A\boldsymbol{x}(t) \\ \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0 \end{cases}$$

  mit einem System von Differentialgleichungen, z.B.

$$x_1'(t) = 2x_1(t) + x_2(t), \quad x_2'(t) = x_1(t) + 2x_2(t)$$

- Sei $AS = S\Lambda$ die Eigenraum-Zerlegung für $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, wobei $\Lambda = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2\}$ und $S = [\boldsymbol{s}_1 \ \boldsymbol{s}_2]$ invertiertbar ist.
- Mit $\boldsymbol{y}(t) = S^{-1}\boldsymbol{x}(t)$ folgt

$$\boldsymbol{y}'(t) = S^{-1}\boldsymbol{x}'(t) = S^{-1}A\boldsymbol{x}(t) = S^{-1}AS\boldsymbol{y}(t) = \Lambda\boldsymbol{y}(t)$$

  oder $y_1'(t) = \lambda_1 y_1(t)$ und $y_2'(t) = \lambda_2 y_2(t)$.
- Das entkoppelte System lässt sich wie 159 lösen,

$$S\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{y}(t) = \exp(\Lambda t)\boldsymbol{y}(0) = \exp(\Lambda t)S\boldsymbol{x}(0)$$

  oder $\boldsymbol{x}(t) = S^{-1}\exp(\Lambda t)S\boldsymbol{x}_0$, d.h. $\boldsymbol{x}(t) = \exp(At)\boldsymbol{x}_0$.
- Analog zum Anfangswertproblem 161

$$\boldsymbol{x}(t) = e^{At}\boldsymbol{x}_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}\boldsymbol{b}(s)ds \quad \text{löst} \quad \begin{cases} \boldsymbol{x}'(t) = A\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}(t) \\ \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0 \end{cases}$$

Symmetrisch, Positiv Definite Matrizen

- Eine Matrix A ist symmetrisch (S), wenn $A = A^\top$ gilt.
- Für eine symmetrische Matrix A gilt immer $\lambda(A) \subset \mathbb{R}$.
- Eine Matrix A ist positiv definit (PD), wenn $\boldsymbol{x}^\top A \boldsymbol{x} > 0$, $\forall \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$, z.B. es gilt immer $\boldsymbol{x}^\top A \boldsymbol{x} = \frac{1}{2} \boldsymbol{x}^\top (A + A^\top) \boldsymbol{x}$ und

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{gathered} \boldsymbol{x}^\top A \boldsymbol{x} = \tfrac{1}{2} \boldsymbol{x}^\top (A + A^\top) \boldsymbol{x} = \\ \boldsymbol{x}^\top B^\top B \boldsymbol{x} = (B\boldsymbol{x})^\top (B\boldsymbol{x}) = \\ \|B\boldsymbol{x}\|^2 > 0, \quad \forall \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0} \end{gathered}$$

- Für eine SPD Matrix A gilt immer $\lambda(A) > 0$.
- Eine Matrix V ist orthogonal, wenn $V^{-1} = V^\top$.
- Eine SPD Matrix A ist immer diagonalisierbar. Weiters gilt $A = V \Lambda V^\top$ für eine orthogonale Matrix V und eine diagonale Matrix Λ, z.B. wie bei der Eigenraum-Zerlegung,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad V = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 & +1 \\ +1 & +1 \end{bmatrix}, \quad \Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Symmetrisch, Positiv Definite Matrizen

- Die Spur einer Matrix A ist die Summe der diagonalen Elemente. Insbesondere gilt $\text{spur}(A) = \sum_i \lambda_i$.
- Weiters gilt $\det(A) = \prod_i \lambda_i$.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \begin{array}{c} \text{spur}(A) = \text{spur}(\Lambda) = 4, \\ \det(A) = \det(\Lambda) = 3. \end{array}$$

- Für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ gilt
  - A ist SPD $\Leftrightarrow$
  - $\det(A) = \lambda_1\lambda_2 > 0$ & $\text{spur}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 > 0 \Leftrightarrow$
  - $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0.$ & $a_{11}, a_{22} > 0$
- Die Bedingungen für Konvexität 181 sind äquivalent zu der Bedingung, dass die Hessematrix

$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}$$

SPD ist. Analog sind die Bedingungen für Konkavität 181 äquivalent zu der Bedingung, dass $-\nabla^2 f$ SPD ist.

Hausaufgaben, vgl. Kapitel 14 im Lösungsheft

- Man löst ein eigenes lineares Gleichungssystem $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, mit Gaußscher Elimination.
- Man löst dieses System auch mit der Cramerschen Regel.
- Man verwendet Eliminationsschritte, um die Inverse A^{-1} dieser Matrix A zu bestimmen.
- Für das eigene lineare Gleichungssystem $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ bestätigt man, es gilt $\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$.
- Man bestimmt die Eigenraum-Zerlegung für diese Matrix A, und für $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ stellt man $\boldsymbol{b}$ und $\boldsymbol{x}$ bezüglich Vielfachen der Eigenvektoren dar.
- Für eine Matrix A mit $\max\{\lambda(A)\} < 1$ bestätigt man durch Rechnungen, es gilt $A^k\boldsymbol{x} \to \mathbf{0}$, $k \to \infty$, für ein beliebiges $\boldsymbol{x}$.
- Man bestätigt die Abschätzung $\|\boldsymbol{x} - \tilde{\boldsymbol{x}}\|/\|\boldsymbol{x}\| \leq \kappa(A)\|\boldsymbol{b} - \tilde{\boldsymbol{b}}\|/\|\boldsymbol{b}\|$ beispielsweise mit ausgewählten A, $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{b}$, $\tilde{\boldsymbol{x}}$ und $\tilde{\boldsymbol{b}}$.
- Man kompromiert die Daten $X = \begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{8} & \frac{5}{8} & 1 \\ 0 & \frac{5}{8} & \frac{3}{8} & 1 \end{bmatrix}$ auf eine Gerade mit Hauptkomponentenanalyse.

Globale Extrema für Lineare Regression

- Für lineare Regression bestimmt man für Daten $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^n$, $n \in \mathbb{N}$, eine repräsentative Gerade $y = a_0 + a_1 x$ durch die Methode der kleinsten Quadrate.
- Man minimiert die Funktion global,

$$E(a_0, a_1) = \sum_{i=1}^{n} [(a_0 + a_1 x_i) - y_i]^2 \quad \text{über } \boldsymbol{a} = (a_0, a_1) \in \mathbb{R}^2$$

- Schwieriger aber weniger empfindlich auf Ausreißer ist mit

$$F(a_0, a_1) = \sum_{i=1}^{n} |(a_0 + a_1 x_i) - y_i| \quad \text{über } (a_0, a_1) \in \mathbb{R}^2$$

- Die partiellen Ableitungen sind durch die Kettenregel und die Mittelwert-Notation $\overline{f(x, y)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i)$ gegeben,

$$\begin{aligned} E_{a_0}(\boldsymbol{a}) &= \sum_{i=1}^{n} 2[(a_0 + a_1 x_i) - y_i] &&= 2n(a_0 + a_1 \cdot \overline{x} - \overline{y}) \\ E_{a_1}(\boldsymbol{a}) &= \sum_{i=1}^{n} 2[(a_0 + a_1 x_i) - y_i] x_i &&= 2n(a_0 \cdot \overline{x} + a_1 \cdot \overline{x^2} - \overline{xy}) \end{aligned}$$

$$\nabla E(\boldsymbol{a}) = [E_{a_0}(\boldsymbol{a}) \; E_{a_1}(\boldsymbol{a})]^\top$$

Globale Extrema für Lineare Regression

- Es gilt $E_{a_0}(\boldsymbol{a}^*) = 0 = E_{a_1}(\boldsymbol{a}^*)$, d.h. $\nabla E(\boldsymbol{a}^*) = \mathbf{0}$, in

$$\boldsymbol{a}^* = (a_0^*, a_1^*), \quad a_1^* = \frac{\overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2}, \quad a_0^* = \overline{y} - a_1^* \overline{x}$$

- Die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung sind

$$E_{a_0,a_0}(\boldsymbol{a}) = \sum_{i=1}^{n} 2 = 2n, \quad E_{a_1,a_1}(\boldsymbol{a}) = \sum_{i=1}^{n} 2x_i^2 = 2n\overline{x^2}$$

$$E_{a_0,a_1}(\boldsymbol{a}) = E_{a_1,a_0}(\boldsymbol{a}) = \sum_{i=1}^{n} 2x_i = 2n\overline{x}, \quad \nabla^2 E(\boldsymbol{a}) = \begin{bmatrix} E_{a_0 a_0} & E_{a_0 a_1} \\ E_{a_1 a_0} & E_{a_1 a_1} \end{bmatrix}$$

- Da $E_{a_0,a_0}(\boldsymbol{a}) = 2n > 0$, $E_{a_1,a_1}(\boldsymbol{a}) = 2n\overline{x^2} > 0$ und

$$E_{a_0,a_0}(\boldsymbol{a}) E_{a_1,a_1}(\boldsymbol{a}) - E^2_{a_0,a_1}(\boldsymbol{a}) = 4n^2(\overline{x^2} - \overline{x}^2) = 4n^2\overline{(x - \overline{x})^2} > 0$$

  gelten, ist $\nabla^2 E$ SPD und $E(\boldsymbol{a})$ ist global konvex.
- Daher wird $E(\boldsymbol{a})$ in $\boldsymbol{a}^*$ global minimiert.

Globale Extrema für Polynomiale Regression

- Für polynomiale Regression kann für Daten $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^n$, $n \in \mathbb{N}$, ein repräsentatives Polynom $y(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m$ durch die Methode der kleinsten Quadrate bestimmt werden.
- Dafür wird die folgende Zielfunktion global über $\{a_i\}_{i=0}^m \in \mathbb{R}^{m+1}$ minimiert,

$$E(a_0, a_1, \ldots, a_m) = \sum_{i=1}^n [(a_0 + a_1 x_i + \cdots a_m x_i^m) - y_i]^2$$

  wobei lineare Regression dem Fall $m = 1$ entspricht.
- Die Zielfunktion E lässt sich mit Matrizen und Vektoren darstellen.
- Man erkennt die Auswertung $y(x_i)$ als Skalarprodukt,

$$y(x_i) = (1, x_i, \ldots, x_i^m) \cdot (a_0, a_1, \ldots, a_m) = 1 \times a_0 + x_i \times a_1 + \cdots + x_i^m \times a_m$$

  zwischen den Vektoren $(1, x_i, \ldots, x_i^m)$ und $(a_0, a_1, \ldots, a_m)$.
- Dies muss für jedes $i = 1, \ldots, n$ durchgeführt werden.

Globale Extrema für Polynomiale Regression

- Hausaufgabe: Mit den folgenden Matrizen und Vektoren

$$M = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^m \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^m \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

  kann die Zielfunktion so dargestellt werden,

$$E(\boldsymbol{a}) = \|M\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}\|^2$$

- Hausaufgabe: Durch die Norm-Eigenschaften,

$$\begin{aligned} E(\boldsymbol{a}) &= \|M\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}\|^2 = (M\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})^\top (M\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) \\ &= \boldsymbol{a}^\top M^\top M\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{b}^\top M\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{b} \end{aligned}$$

- Hausaufgabe: Durch eine direkte Rechnung ergeben sich die partiellen Ableitungen der Zielfunktion,

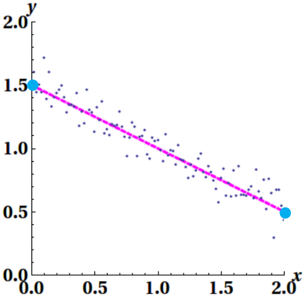
$$\nabla E(\boldsymbol{a}) = 2(M^\top M\boldsymbol{a} - M^\top \boldsymbol{b}), \quad \nabla^2 E(\boldsymbol{a}) = 2M^\top M \quad \text{(SPD)}$$

- Also ist der (global minimierende) kritische Punkt $\boldsymbol{a}^*$ gegeben durch die Lösung des linearen Gleichungssystems,

$$M^\top M\boldsymbol{a} = M^\top \boldsymbol{b}$$

Abschätzung von Geraden

- Es seien Daten $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)\}$ gegeben, die ungefähr eine lineare Beziehung aufweisen,



und man schätzt eine Funktion $y(x) = a_0 + a_1 x$ so ab,

$$y_i \approx y(x_i) = a_0 + a_1 x_i, \quad i = 1, \ldots, n$$

- Die einfachste Methode zur Bestimmung der 2 Unbekannten a_0, a_1 ist visuell: 2 Punkte auswählen, ungefähr auf der gleichen Gerade wie die Datenpunkte, z.B. $(0, 3/2)$ und $(2, 1/2)$.

Abschätzung von Geraden

- Mit den 2 abgeschätzen Punkten $(0, 3/2)$ und $(2, 1/2)$ ist die Gerade durch diese gegeben durch
$$(y - 3/2) = s(x - 0), \quad \text{Steigung } s = \frac{3/2 - 1/2}{0 - 2} = -1/2$$
oder $a_1 = s = -1/2$ und $a_0 = 3/2$.
- Durch die Methode der *linearen Regression* (vom letzten Abschnitt) minimiert man die Zielfunktion
$$E(a_0, a_1) = [(a_0 + a_1 x_1) - y_1]^2 + \cdots + [(a_0 + a_1 x_n) - y_n]^2 = \min$$
und schätzt die Unbekannten der gesuchten Gerade mit den minimierenden Parametern
$$a_1^* = \frac{\overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2}, \quad a_0^* = \overline{y} - a_1^* \overline{x}$$
ab, wobei
$$\begin{aligned} \overline{x} &= \text{Mittelwert}\{x_1, \ldots, x_n\}, \\ \overline{xy} &= \text{Mittelwert}\{x_1 y_1, \ldots, x_n y_n\}, \\ \overline{x^2} &= \text{Mittelwert}\{x_1^2, \ldots, x_n^2\}, \quad \text{usw.} \end{aligned}$$

Abschätzung von Geraden

- Beispiel: Gegeben seien die Daten

$$(1.0, 0.9), \quad (2.0, 2.1), \quad (3.0, 2.9), \quad (4.0, 4.1),$$

  die klar eine kleine Abweichung von der Gerade $y(x) = x$ aufweisen, d.h. $a_0 = 0$ und $a_1 = 1$.
- Die Mittelwerte der Daten sind:

$$\begin{aligned}
\overline{x} &= (1.0 + 2.0 + 3.0 + 4.0)/4 = 2.5 \\
\overline{y} &= (0.9 + 2.1 + 2.9 + 4.1)/4 = 2.5 \\
\overline{xy} &= (1.0 \cdot 0.9 + 2.0 \cdot 2.1 + 3.0 \cdot 2.9 + 4.0 \cdot 4.1)/4 = 7.55 \\
\overline{x^2} &= (1.0^2 + 2.0^2 + 3.0^2 + 4.0^2)/4 = 7.5
\end{aligned}$$

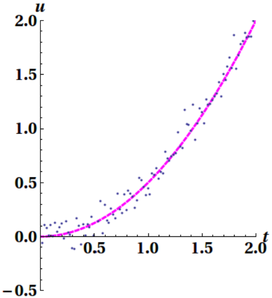
- Die (durch die Methode der linearen Regression optimal) abgeschätzen Parameter der Gerade sind:

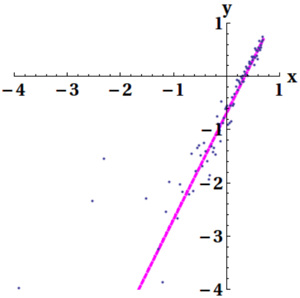
$$a_1^* = \frac{\overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2} = \frac{7.55 - 2.5 \cdot 2.5}{7.5 - 2.5^2} = 1.04 \approx 1$$

$$a_0^* = \overline{y} - a_1^* \overline{x} = 2.5 - 1.04 \cdot 2.5 = -0.1 \approx 0$$

Abschätzung von Potenzfunktionen

- Es seien Daten $\{(t_1, u_1), (t_2, u_2), \ldots, (t_n, u_n)\}$ gegeben, die ungefähr eine potenzartige Beziehung aufweisen,





und man schätzt eine Funktion $u(t) = ct^{\phi}$ so ab,

$$u_i \approx u(t_i) = ct_i^{\phi}, \quad i = 1, \ldots, n$$

- Man transformiert die Daten in lineare Form um,

$$y_i = \ln(u_i) \approx \ln[u(t_i)] = \ln(c)|_{=:a_0} + \phi|_{=:a_1} \ln(t_i)|_{=:x_i} = a_0 + a_1 x_i$$

und schätzt die Parameter visuell ab: $\phi = a_1 = 2$, $c = e^{a_0} = 1/2$.

Abschätzung von Potenzfunktionen

- Beispiel: Gegeben seien die Daten

$$(1.0, 0.9), \quad (4.0, 2.1), \quad (9.0, 2.9), \quad (16.0, 4.1),$$

  die klar eine kleine Abweichung von der Funktion $u(t) = \sqrt{t}$ aufweisen, d.h. $c = 1$ und $\phi = 1/2$.
- Die Mittelwerte der transformierten Daten, d.h. $y_i = \ln(u_i)$, $x_i = \ln(t_i)$, $i = 1, 2, 3, 4$, sind:

$$\begin{aligned}
\overline{x} &= (0.0 + 1.3863 + 2.1972 + 2.7726)/4 = 1.589 \\
\overline{y} &= (-0.1054 + 0.7419 + 1.0647 + 1.4110)/4 = 0.7781 \\
\overline{xy} &= (-0.1054 \cdot 0.0 + \cdots + 2.7726 \cdot 1.4110)/4 = 1.82 \\
\overline{x^2} &= (0.0^2 + \cdots + 2.7726^2)/4 = 3.6092
\end{aligned}$$

- Die abgeschätzen Parameter sind:

$$\phi^* = a_1^* = \frac{\overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2} = \frac{1.82 - 1.589 \cdot 0.7781}{3.6092 - 1.589^2} = 0.5383 \approx 0.5$$

$$\ln(c^*) = a_0^* = \overline{y} - a_1^* \overline{x} = 0.7781 - 0.5383 \cdot 1.589 = -0.0773 \approx 0$$

$$\text{oder} \quad c^* = e^{a_0^*} = 0.9256 \approx 1$$

Abschätzung von Polynomen

- Zur Bestimmung eines Polynoms $n$ten Grades sind $n+1$ Koeffizienten zu bestimmen. Dafür braucht man mindestens $n+1$ Informationsstücke.
- Beispiel: Ein quadratisches Polynom

$$y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

erfüllt $y(-1) = \frac{1}{2}$, $y(-\frac{1}{2}) = \frac{3}{8}$, $y(0) = \frac{1}{2}$. Die Koeffizienten $\boldsymbol{a} = [a_0, a_1, a_2]^\top$ erfüllen das lineare Gleichungssystem,

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{8} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \qquad M\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{a} = M^{-1}\boldsymbol{b}$$

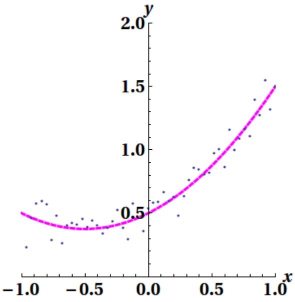
- Das äquivalente Gleichungssystem ergibt sich durch

$$\mathrm{II} - \frac{1}{4}\mathrm{I} \rightarrow \mathrm{II}: \qquad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

mit Lösung $a_0 = \frac{1}{2}$, $a_1 = (\frac{1}{4} - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2})/(-\frac{1}{4}) = \frac{1}{2}$ und $a_2 = \frac{1}{2}$.

Abschätzung von Polynomen

- Es seien Daten
  $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)\}$
  gegeben, die ungefähr eine polynomartige (in diesem Fall quadratische) Beziehung aufweisen, und man schätzt eine Funktion
  $y(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ so ab,
  $$y_i \approx y(x_i) = a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 \qquad i = 1, \ldots, n.$$



- Durch die Methode der polynomialen Regression (Summe der quadratierten Abständen wird minimiert),

$$M = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

werden die Koeffizienten durch Lösung des linearen Gleichungssystems $M^\top M \boldsymbol{a} = M^\top \boldsymbol{b}$ gegeben: $a_2 = a_1 = a_0 = 1/2$.

Abschätzung von Polynomen

- Beispiel: Gegeben seien die Daten

$$(-1.0, 3.05), \quad (-0.5, 1.70), \quad (0.0, 1.05), \quad (0.5, 0.70),$$

  die eine kleine Abweichung von der Funktion $y(x) = 1 - x + x^2$ aufweisen, d.h. $a_0 = 1$, $a_1 = -1$ und $a_2 = 1$.
- Die Matrizen und Vektoren sind:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -1.0 & 1.00 \\ 1 & -0.5 & 0.25 \\ 1 & 0.0 & 0.00 \\ 1 & 0.5 & 0.25 \end{bmatrix}, \quad M^\top M = \begin{bmatrix} 4.0 & -1.0 & 1.500 \\ -1.0 & 1.5 & -1.000 \\ 1.5 & -1.0 & 1.125 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 3.05 & 1.70 & 1.05 & 0.70 \end{bmatrix}^\top, \quad M^\top \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 6.50 & -3.55 & 3.65 \end{bmatrix}^\top$$

- Die abgeschätzen Parameter sind:

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = (M^\top M)^{-1}(M^\top \boldsymbol{b}) = \begin{bmatrix} 0.99 \\ -1.04 \\ 1.00 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Hausaufgaben, vgl. `Kapitel 15` im Lösungsheft

- Man bestätigt die Details, um zu zeigen dass die Zielfunktion für lineare Regression global konvex ist.
- Für polynomiale Regression bestätigt man die Matrix-Darstellung der Zielfunktion und ihre partiellen Ableitungen.
- Man generiert Daten, die eine kleine Abweichung der Gerade $y(x) = -x/2 + 3/2$ aufweisen. Durch Regression bestimmt man eine optimale Gerade durch die eigenen Daten.
- Man generiert Daten, die eine kleine Abweichung der Potenzfunktion $u(t) = t^2/2$ aufweisen. Durch Regression bestimmt man die optimale Potenzfunktion durch die eigenen Daten.
- Man bestimmt das quadratische Polynom durch die Punkte $(-1, 2)$, $(0, 1)$ und $(1, 2)$.
- Man generiert Daten, die eine kleine Abweichung des quadratischen Polynoms $y(x) = 1 + x + x^2$ aufweisen. Durch Regression bestimmt man das optimale quadratische Polynom durch die eigenen Daten.

Abschätzung von Rationalen Funktionen

- Beispiel: Bei der Osmose zwischen zwei Zellkammern wird der Verlauf der Zuckerkonzentration durch die rationale Funktion beschrieben,

$$r(t) = \frac{5t}{4+3t}$$

- Man bestimmt die Gleichgewichts-Konzentration r^* so

$$r(t) = \frac{5t}{4+3t}\left(\frac{t^{-1}}{t^{-1}}\right) = \frac{5}{4t^{-1}+3} \to \frac{5}{3} = r^*, \quad t \to \infty$$

da $t^{-1} = 1/t \to 0$ für $t \to \infty$.

- Laut einer früheren Hausaufgabe ist $r(t)$ streng steigend.
- Der Zeitpunkt τ, an welchem die Abweichung vom Gleichgewichtszustand weniger als 5% beträgt, erfüllt:

$$\frac{5}{3} - \frac{5\tau}{4+3\tau} = r^* - r(\tau) = 0.05 \cdot r^* = \frac{25}{300} \quad | \times 300 \cdot (4+3\tau)$$

$$-300 \cdot 5\tau = (25 - 5 \cdot 100)(4+3\tau) \quad \Rightarrow \quad \tau = 76/3$$

- Weiters für $t > \tau$ gilt $0.95 \cdot r^* = r(\tau) < r(t) < r^*$.

Abschätzung von Rationalen Funktionen

- Zur Bestimmung eines Quotienten $r = p/q$ von Polynomen p $n$ten Grades und q $m$ten Grades, sind $(n+1)+(m+1)$ Koeffizienten dieser Polynome zu bestimmen. Jedoch gibt es nur $n+m+1$ Freiheitsgrade.
- Beispiel: Die rationale Funktion

$$r(x) = \frac{p_0 + p_1 x}{q_0 + q_1 x}\left(\frac{q_0^{-1}}{q_0^{-1}}\right) = \frac{a_1 + a_2 x}{1 + a_3 x}$$

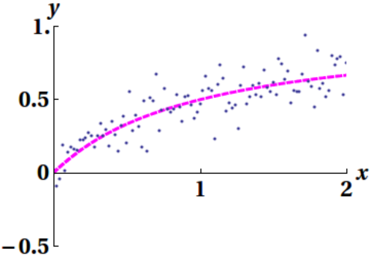
erfüllt $r(1) = \frac{1}{2}$, $r(2) = \frac{2}{3}$, $r(3) = \frac{3}{4}$. Die Koeffizienten $\boldsymbol{a} = [a_1, a_2, a_3]^\top$ erfüllen

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}(1 + a_3 \cdot 1) &= a_1 + a_2 \cdot 1 \\ \tfrac{2}{3}(1 + a_3 \cdot 2) &= a_1 + a_2 \cdot 2 \\ \tfrac{3}{4}(1 + a_3 \cdot 3) &= a_1 + a_2 \cdot 3 \end{aligned} \quad \text{oder} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \cdot \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & -2 \cdot \frac{2}{3} \\ 1 & 3 & -3 \cdot \frac{3}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

mit Lösung $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_3 = 1$.

Abschätzung von Rationalen Funktionen

- Es seien Daten $\{(x_1, r_1), (x_2, r_2), \ldots, (x_n, r_n)\}$ gegeben, die ungefähr einer rationalen Funktion $r(x) = (a_1 + a_2 x)/(1 + a_3 x)$ entsprechen, und man schätzt diese Funktion so ab, $r_i \approx r(x_i) = (a_1 + a_2 x_i)/(1 + a_3 x_i)$ $i = 1, \ldots, n$.



- Durch Regression werden die Koeffizienten durch Lösung

$$M = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & -x_1 r_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & -x_n r_n \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{bmatrix}$$

des linearen Gleichungssystems $(M^\top M)\boldsymbol{a} = M^\top \boldsymbol{b}$ gegeben: $a_1 = 0, a_2 = a_3 = 1$.

Abschätzung von Rationalen Funktionen

- Beispiel: Gegeben seien die Daten

$$(0.0, 1.99), \quad (1.0, 1.49), \quad (2.0, 1.34), \quad (3.0, 1.24),$$

die eine kleine Abweichung von der Funktion $r(x) = (2+x)/(1+x)$ aufweisen, d.h. $a_1 = 2$, $a_2 = 1$, $a_3 = 1$.

- Die Matrizen und Vektoren sind:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0.0 & 0.00 \\ 1 & 1.0 & -1.49 \\ 1 & 2.0 & -2.68 \\ 1 & 3.0 & -3.72 \end{bmatrix}, \quad M^\top M = \begin{bmatrix} 4.0 & 6.0 & -7.89 \\ 6.0 & 14.0 & -18.01 \\ -7.89 & -18.01 & 23.2409 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1.99 & 1.49 & 1.34 & 1.24 \end{bmatrix}^\top, \quad M^\top \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 6.06 & 7.89 & -10.4241 \end{bmatrix}^\top$$

- Die abgeschätzen Parameter sind:

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = (M^\top M)^{-1}(M^\top \boldsymbol{b}) = \begin{bmatrix} 1.9846 \\ 0.8876 \\ 0.9130 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Abschätzung von Exponentialfunktionen

- Zur Bestimmung einer Exponentialfunktion $w(t) = w_0 e^{\lambda t}$ braucht man mindestens 2 Informationsstücke, um die 2 Parameter w_0 und λ zu bestimmen.
- Beispiel: Der Wiederverkaufswert w eines Autos wird mit der Exponentialfunktion $w(t) = w_0 e^{\lambda t}$ beschrieben.

  1. Am Anfang beträgt der Autowert €20000, d.h.
  $$20000 = w(0) = w_0 e^0 = w_0$$
  2. und nach 2 Jahren €5000, d.h.
  $$5000 = w(2) = 20000 e^{2\lambda}$$

  Man bestimmt λ so:
  $$\begin{array}{rrcl} \div 20000| & 1/4 = 5000/20000 & = & e^{2\lambda} \\ \ln(\cdot)| & \ln(1/4) = \ln(e^{2\lambda}) & = & 2\lambda \\ \div 2| & -\frac{1}{2}\ln(4) = \frac{1}{2}\ln(\frac{1}{4}) & = & \lambda \\ \Rightarrow & -\ln(2) = -\ln(4^{\frac{1}{2}}) & = & \lambda \end{array}$$

- Mit $w(t) = 20000 e^{-\ln(2)t} = 20000 \cdot 2^{-t}$ sagt man voraus, der Wert ist $w(3) = 20000 \cdot 2^{-3} =$ €2500 nach 3 Jahren.

Abschätzung von Exponentialfunktionen

- Beispiel: Die Konzentration einer Chemikalie wird mit $K(t) = K_1 + K_2 e^{\mu t}$ beschrieben. Zur Bestimmung der 3 Parameter braucht man 3 Informationsstücke.

  1. Am Anfang ist die Konzentration 0 Mol/Liter, d.h.
  $$0 = K(0) = K_1 + K_2 e^{0\mu} = K_1 + K_2 \quad \Rightarrow \quad K_2 = -K_1$$
  2. nach 1 Stunde ist die Konzentration 50 Mol/Liter, d.h.
  $$50 = K(1) = K_1(1 - e^{1\mu}),$$
  3. und nach 2 Stunden ist die Konzentration 75 Mol/Liter, d.h.
  $$75 = K(2) = K_1(1 - e^{2\mu}),$$

  Aus $K_1 = 50/(1 - e^{\mu}) = 75/(1 - e^{2\mu})$ $(\mu \neq 0)$

  folgt mit $x = e^{\mu}$: $\quad 0 = \dfrac{50}{1-x} - \dfrac{75}{1-x^2} = 25 \cdot \dfrac{2x-1}{1-x^2}$

  oder $\quad x = \frac{1}{2} = e^{\mu}$ und $\mu = -\ln(2)$

  und $\quad K_1 = 50/(1-x) = 100$

  Mit $K(t) = 100(1 - e^{-\ln(2)t}) = 100(1 - 2^{-t})$ sagt man voraus, $K(t) \to 100$, $t \to \infty$.

Abschätzung von Exponentialfunktionen

- Beispiel: Die Temperatur in einem plötzlich nicht beheizten Haus wird mit $T(t) = T_1 + T_2 e^{\nu t}$ beschrieben. Zur Bestimmung der 3 Parameter braucht man 3 Informationsstücke.

  1. Am Anfang ist die Temperatur 22°, d.h.
  $$22 = T(0) = T_1 + T_2 e^{0\nu} = T_1 + T_2 \quad \Rightarrow \quad T_1 = 22 - T_2$$
  2. nach 1 Tag ist die Temperatur 12°, d.h.
  $$12 = T(1) = (22 - T_2) + T_2 e^{1\nu} = 22 + T_2(e^{1\nu} - 1),$$
  3. und nach 2 Tagen ist die Temperatur 7°, d.h.
  $$7 = T(2) = (22 - T_2) + T_2 e^{2\nu} = 22 + T_2(e^{2\nu} - 1),$$

  Aus $T_2 = 10/(1 - e^\nu) = 15/(1 - e^{2\nu})$ $\qquad (\nu \neq 0)$

  folgt mit $x = e^\nu$: $\quad 0 = \dfrac{10}{1 - x} - \dfrac{15}{1 - x^2} = 5 \cdot \dfrac{2x - 1}{1 - x^2}$

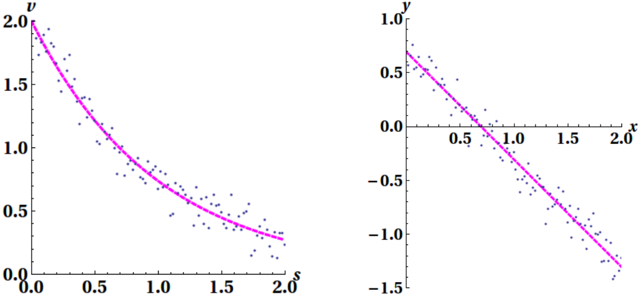
  oder $\qquad x = \frac{1}{2} = e^\nu$ und $\nu = -\ln(2)$

  und $\qquad T_2 = 10/(1 - x) = 20, \quad T_1 = 22 - T_2 = 2.$

  Mit $T(t) = 2 + 20e^{-\ln(2)t} = 2 + 20 \cdot 2^{-t}$ sagt man voraus, bei $2 + 20 \cdot 2^{-\tau} = 4$ oder $\tau = \log_2(10)$ ist die Temperatur 90% der gesamten Änderung, d.h. $0.9(22 - 2)$, zu 4° gesunken.

Abschätzung von Exponentialfunktionen

- Es seien Daten $\{(s_1, v_1), (s_2, v_2), \ldots, (s_n, v_n)\}$ gegeben, die ungefähr eine exponentielle Beziehung aufweisen,



und man schätzt eine Funktion $v(s) = ce^{\mu s}$ so ab,

$$v_i \approx v(s_i) = ce^{\mu s_i}, \quad i = 1, \ldots, n$$

- Man transformiert die Daten in lineare Form um,

$$y_i = \ln(v_i) \approx \ln[v(s_i)] = \ln(c)|_{=:a_0} + \mu|_{=:a_1} \ln(e^{s_i})|_{=s_i=:x_i} = a_0 + a_1 x_i$$

und schätzt die Parameter visuell ab: $\mu = a_1 = -1$, $c = e^{a_0} = 2$.

Abschätzung von Exponentialfunktionen

- Beispiel: Gegeben seien die Daten

$$(0.0, 2.1), \quad (1.0, 5.3), \quad (2.0, 14.9), \quad (3.0, 40.1),$$

  die eine kleine Abweichung von der Funktion $v(s) = 2 \exp s = 2e^s$ aufweisen, d.h. $c = 2$ und $\mu = 1$.
- Die Mittelwerte der transformierten Daten, d.h. $y_i = \ln(v_i)$, $x_i = s_i$, $i = 1, 2, 3, 4$, sind:

$$\begin{aligned}
\overline{x} &= (0.0 + 1.0 + 2.0 + 3.0)/4 = 1.5 \\
\overline{y} &= (0.7419 + 1.6677 + 2.7014 + 3.6914)/4 = 2.2006 \\
\overline{xy} &= (0.0 \cdot 0.7419 + \cdots + 3.0 \cdot 3.6914)/4 = 4.5361 \\
\overline{x^2} &= (0.0^2 + \cdots + 3.0^2)/4 = 3.5
\end{aligned}$$

- Die abgeschätzen Parameter sind:

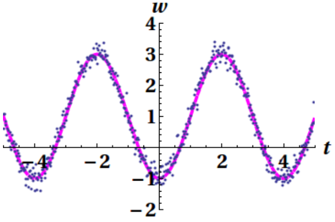
$$\mu^* = a_1^* = \frac{\overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2} = \frac{4.5361 - 1.5 \cdot 2.2006}{3.5 - 1.5^2} = 0.9882 \approx 1$$

$$\ln(c^*) = a_0^* = \overline{y} - a_1^* \overline{x} = 2.2006 - 0.9882 \cdot 1.5 = 0.7183 \approx 0.6931$$

$$\text{oder} \quad c^* = e^{a_0^*} = 2.0509 \approx 2$$

Abschätzung von Winkelfunktionen

- Es seien Daten $\{(t_1, w_1), (t_2, w_2), \ldots, (t_n, w_n)\}$ gegeben, die ungefähr eine sinusförmige Beziehung aufweisen,



und eine Funktion $w(t) = c + a \sin[2\pi\omega(t - b)]$ schätzt man so ab,

$$w_i \approx w(t_i) = c + a \sin[2\pi\omega(t_i - b)], \quad i = 1, \ldots, n.$$

- Die Parameter können ungefähr so abgelesen werden:

$(1 \approx)\ c$	$=$	Mittwert der w-Werte
$(2 \approx)\ a$	$=$	Amplitude, Abweichung der w-Werte von c
$(4 \approx)\ 1/\omega$	$=$	Periode, z.B. Abstand zwischen Hügelgipfeln
$(-3 \approx)\ b$	$=$	Wendepunktstelle mit w steigend (auch $+1$)

Hausaufgaben, vgl. `Kapitel 15` im Lösungsheft

- Für die rationale Funktion $r(t) = t/(1+t)$, $t \geq 0$, bestimmt man den Zeitpunkt, an dem die Abweichung vom Gleichgewichtszustand weniger als 1% beträgt.
- Man generiert Daten, die eine kleine Abweichung der rationalen Funktion $r(x) = x/(x+1)$ aufweisen. Dann verwendet man Regression, um die optimale rationale Funktion durch die eigenen Daten zu bestimmen.
- Man bestimmt die Parameter α, β, λ der Exponentialfunktion $\phi(t) = \alpha + \beta \exp(-\lambda t)$, die mit den Daten $\phi(0) = 5$, $\phi(1) = 3$ und $\phi(2) = 2$ übereinstimmen.
- Man generiert Daten, die eine kleine Abweichung der Exponentialfunktion $v(s) = 2\exp(-s)$ aufweisen. Dann verwendet man Regression, um die optimale Exponentialfunktion durch die eigenen Daten zu bestimmen.
- Für zufällige Werte der Parameter c, a, ω und b generiert man Daten, die eine kleine Abweichung der Winkelfunktion $w(t) = c + a\sin[2\pi\omega(t-b)]$ aufweisen. Dann liest man die Parameterwerte für c, a, ω und b von der Grafik ab.