Lernfragen für Quantitative Systemwissenschaften 2 im SS 06

1. Geben Sie ein Beispiel einer Differentialgleichung mit einem (a) global asymptotisch stabilen (b) lokal und nicht global asymptotisch stabilen (c) nicht aysmptotisch aber stabilen oder (d) instabilen Gleichgewicht und zeigen Sie die Stabilität in jedem Fall.

2. Geben Sie ein Beispiel einer Differentialgleichung mit einem (a) stabilen oder (b) instabilen Gleichgewicht, wobei das maximale reele Teil der Eigenwerte der Jakobimatrix im Gleichgewicht Null ist.

3. Geben Sie ein Beispiel einer steifen Differentialgleichung und zeigen Sie dass sie steif ist. Zeigen Sie den Effekt explizit, wenn die kleinste Zeitskala vernachlässigt wird.

4. Geben Sie ein Beispiel einer Differentialgleichung mit einem lokal asymptotisch stabilen Gleichgewicht, wobei die Trajektorien ins Gleichgewicht (a) spiralartig oder (b) direkt fahren.

5. Wenn das SIR-Modell gegeben wird, leiten Sie die Gleichgewichte her und zeigen Sie die Stabilität für diese.

6. Modifizieren Sie das SIR-Modell, wobei die Klasse R zur Heilung beiträgt. Was sind die neuen Gleichgewichte?

7. Geben Sie ein Beispiel einer Differentialgleichung, wobei Positivität der Lösungen (a) gilt oder (b) nicht gilt.

8. Geben Sie ein Beispiel einer Differentialgleichung mit einer invarianten Teilmenge des Zustandsraumes.

9. Geben Sie ein Beispiel einer Differentialgleichung mit (a) einer periodischen oder (b) keiner periodischen Lösung.

10. Zeigen Sie dass $r = 1$ ein Attraktor für Beispiel 9.6 ist. Zeigen Sie dass $r = 0$ ein instabiles Gleichgewicht ist.

11. Vom dimensionierten Raupenmodell leiten Sie die dimensionslose Version her.

12. Geben Sie ein Beispiel einer Differentialgleichung mit einer Bifurkation und leiten Sie das Bifurkationsdiagramm her.

13. Leiten Sie ein dynamisches System her, das sich innerhalb einer Potential-Landschaft bewegt.

14. Berechnen Sie die Dimension (a) eines Quadrats (b) der Cantorschen Menge.

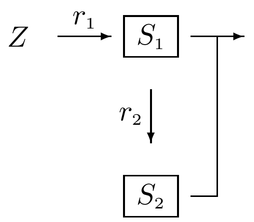
15. Berechnen Sie ein Gleichgewicht und eine 2-Periode Trajektorie für die logistische Differenzengleichung.

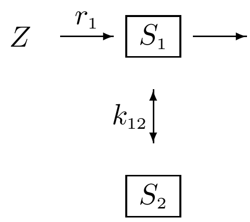
16. Geben Sie ein Beispiel eines chaotischen Systems und argementieren Sie physikalisch, warum die Bedingungen für Choas erfüllt werden.

17. Geben Sie ein Beispiel eines Systems mit einem fraktalen Attraktor.

18. Geben Sie ein Beispiel eines Systems, das nie chaotisch ist.

19. Schreiben Sie explizit die entsprechenden Differentialgleichungen, $V\boldsymbol{S}' = A\boldsymbol{S} + B\boldsymbol{Z}$, für die folgenden Systeme:





20. Für das obige linke System leiten Sie die Lösung mit den Anfangsbedingungen $S_1 = S_1(0)$ und $S_2 = S_2(0)$ her.

21. Für das Differentialgleichungssystem, $V\boldsymbol{S}' = A\boldsymbol{S} + B\boldsymbol{Z}$, $t > 0$; $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}(0)$, $t = 0$, leiten Sie die folgende allgemeine Lösungsform her:

$$\boldsymbol{S}(t) = \exp\left[V^{-1}At\right]\boldsymbol{S}(0) + \int_0^t \exp\left[V^{-1}A(t-s)\right]V^{-1}B\boldsymbol{Z}(s)ds$$

22. Leiten Sie das *Impulse Response* für das folgende System her:

$$\delta \xrightarrow{r} \boxed{S} \longrightarrow$$

23. Sei $\Omega \subset \boldsymbol{R}^3$ ein Teilgebeit eines Gebiets in dem Konvektion und Diffusion eines Schadstoffs mit der Konzentration S stattfindet. Sei $\boldsymbol{F}$ der vektorielle Fluss im Gebiet und D die Diffusionskonstante des Schadstoffs. Verwenden Sie die folgende Gleichung,

$$\partial_t \int_\Omega S dx + \int_{\partial\Omega} S[\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}] d\sigma = \int_{\partial\Omega} D[\nabla S \cdot \boldsymbol{n}] d\sigma$$

um zu erklären, warum der zweite Term die Rolle von Konvektion spielt während der dritte Term die Rolle von Diffusion spielt. Verwenden Sie den Gaußschen Satz, um eine partielle Differentialgleichung von der obigen Integralgleichung herzuleiten.

24. Zeigen Sie, dass $u(x,t) = g(x - Ft)$ das folgende Problem löst:

$$\begin{cases} u_t + Fu_x = 0, & t > 0 \\ u(x,0) = g(x) & \end{cases}$$

25. Zeigen Sie, dass

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{x - Ft}{\sqrt{4t\varepsilon}}\right)\right], \quad \operatorname{erf}(s) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^s e^{-t^2}dt$$

das folgende Problem löst:

$$\begin{cases} u_t + Fu_x = \varepsilon u_{xx}, & t > 0 \\ u(x,0) = H(x), & t = 0 \end{cases}$$

wobei:

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

26. Schreiben Sie das im Code `reseze.m` programmierte System in der Matrixform, $V\boldsymbol{S}' = A\boldsymbol{S} + B\boldsymbol{Z}$.

27. Leiten Sie von Zellen-Modellen die verteilten Systeme in Tabellen 10.2 und 10.3 her. Erklären Sie, welche Nebenbedingungen geeignet sind, je nachdem ob Diffusion dabei ist.

28. Sei $u = u(x,t)$ eine Funktion, die die Gleichung $u_t + u_x = 0$ erfüllt. Lassen Sie (x,t) und (ξ,η) durch die folgenden Gleichungen in Beziehung stehen: $\xi = x+t$ und $\eta = x-t$. Zeigen Sie, dass $u_t + u_x = 2u_\xi$ gilt, also ist u eine Funktion von $\eta = x - t$.

29. Seien $L_0(t)$, $L_1(x)$, $C_0(t)$ und $C_1(x)$ Funktionen, die $L_0(0) = L_1(0)$ und $C_0(0) = C_1(0)$ erfüllen. Zeigen Sie, dass die folgenden Funktionen

$$
\begin{aligned}
L(x,t) &= \begin{cases} e^{-k_s x/u} L_0(t - x/u), & tu > x \\ e^{-k_s t} \quad L_1(x - tu), & tu \le x \end{cases} \\
C(x,t) &= \begin{cases} e^{-k_1 x/u} C_0(t - x/u) + c_s[1 - e^{-k_1 x/u}] - \dfrac{k_s L_0(t - x/u)}{k_1 - k_s}[e^{-k_s x/u} - e^{-k_1 x/u}], & tu > x \\ e^{-k_1 t} \quad C_1(x - tu) + \quad c_s[1 - e^{-k_1 t}] - \dfrac{k_s L_1(x - tu)}{k_1 - k_s}[e^{-k_s t} - e^{-k_1 t}], & tu \le x \end{cases}
\end{aligned}
$$

das folgende Problem lösen:

$$
\begin{cases}
L_t + uL_x = -k_s L \\
C_t + uC_x = -k_s L + k_1(c_s - C) \\
\\
L(0,t) = L_0(t) \\
C(0,t) = C_0(t) \\
\\
L(x,0) = L_1(x) \\
C(x,0) = C_1(x)
\end{cases}
$$

30. Mit Finiten Differenzen schreiben Sie eine Diskretisierung des folgenden Problems:

$$
\begin{cases}
u_t + F u_x &= \varepsilon u_{xx}, & x \in (-1,1), & t \in (0,1) \\
u(x,0) &= g(x), & x \in (-1,1), & t = 0 \\
u_x(x,t) &= 0, & x = \pm 1, & t > 0
\end{cases}
$$

31. In einem Wetter-Modell seien die folgenden Zeit-unabhängige Wahrscheinlichkeiten gegeben: Wenn heute Sonne, dann 50% Sonne morgen und 50% Wolken morgen. Wenn heute Wolken, dann 50% Sonne morgen, 25% Wolken morgen und 25% Regen morgen. Wenn heute Regen, dann 50% Wolken morgen und 50% Regen morgen. Leiten Sie die Langzeit-Statistik her, d.h. finden Sie (x,y,z) wobei x% der Tage sonnig sind, y% der Tage wolkig sind und z% der Tage regnerisch sind.