Übungsblatt 3 für Einführung in Numerische Mathematik
Sommersemester 2012

1. Zeige die Äquivalenz der Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$. (Gelöst von Frau Knittelfelder.)

2. Für $\boldsymbol{f} = \langle a, b, \ldots, b\rangle^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{n+1}$ und $\boldsymbol{e} = \langle 1, \ldots, 1\rangle^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{n+1}$ zeige
$$\frac{a+nb}{1+n} = \arg\min_{c\in\mathbb{R}} \|\boldsymbol{f} - c\boldsymbol{e}\|_2 \quad \text{während} \quad b = \arg\min_{c\in\mathbb{R}} \|\boldsymbol{f} - c\boldsymbol{e}\|_1$$
(Gelöst von Herrn Pieber.)

3. Wenn $\|\cdot\|_{\mathrm{V}}$ eine Vektornorm ist, zeige
$$\|A\|_{\mathrm{M}} = \max_{\|\boldsymbol{x}\|_{\mathrm{V}}=1} \|A\boldsymbol{x}\|_{\mathrm{V}}$$
ist eine Matrixnorm. (Gelöst von Herrn Holler.)

4. Zeige für eine Matrix $\{A_{ij}\} = A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, die Frobenius Matrixnorm,
$$\|A\|_{\mathrm{F}} = \left[\sum_{i,j=1}^{n} |A_{ij}|^2\right]^{\frac{1}{2}}$$
ist mit der Vektornorm $\|\boldsymbol{x}\|_2$ kompatibel. (Gelöst von Herrn Holler.)

5. Beweise den Satz: Für $\boldsymbol{x}^k = \langle (x_1)_k, \ldots, (x_n)_k\rangle^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{x} = \langle x_1, \ldots, x_n\rangle^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n$ gilt
$$\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{x}^k = \boldsymbol{x} \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{k\to\infty} (x_i)_k = x_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$
(Gelöst von Frau Hrassnigg.)

6. Das Problem der Reaktion, Konvektion und Diffusion
$$\left\{\begin{array}{rclll} v_t + rv + kv_x &=& dv_{xx}, & x \in (0,1), & t > 0 \\ v &=& 0, & x = 0, & t > 0 \\ v_x &=& 0, & x = 1, & t > 0 \\ v &=& v_0, & x \in (0,1), & t = 0 \end{array}\right. \qquad r, k, d \geq 0$$
sei räumlich so diskretisiert,
$$\boldsymbol{v}'(t) = -B\boldsymbol{v}(t), \quad \boldsymbol{v}(0) = \boldsymbol{v}_0$$
wobei $\boldsymbol{v}(t) = \{v_i(t)\}_{i=0}^N$, $v_i(t) \approx v(x_i, t)$, $x_i = ih$, $i = 0, \ldots, N$, $h = 1/N$ und $B \in \mathbb{R}^{(N+1)\times(N+1)}$,
$$B = \frac{d}{h^2}\begin{bmatrix} 2 & -1 & & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & & & -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{k}{h}\begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ -1 & 1 & \\ & \ddots & \ddots \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} + rI$$
Das Problem sei auch so zeitlich diskretisiert:
$$A\boldsymbol{V}^{n+1} = (I + \tau B)\boldsymbol{V}^{n+1} = \boldsymbol{V}^n, \quad n = 0, 1, \ldots$$
wobei $\boldsymbol{V}^n = \{V_i^n\}_{i=0}^N$, $V_i^n \approx v(x_i, t^n)$, $t^n = n\tau$, $n = 0, 1, \ldots$. Für $h, \tau > 0$ leite eine Bedingung bezüglich der Parameter r, k, d her, nach welcher keine Pivot-Suche verwendet werden muss, um das System $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ stabil zu lösen. Schreibe einen MATLAB Code, in dem eine LU-Zerlegung von A einmal berechnet wird, und anschließend wird die Zerlegung mit Vorwärts und Rückwärts Substitutionen verwendet, um die obige Folge von Systemen zu lösen. Nimm die Anfangswerte,

```
N1 = N+1;
N4 = round(N/4);
V0 = [zeros(N4,1);ones(N1-2*N4,1);zeros(N4,1)];
```

und stelle die Lösung bei jedem Zeitschritt grafisch dar:

```
V = V0;
for n=1:nmax
  V = vorwaerts(L,V);    % Vorwaerts Substitution mit L
  V = rueckwaerts(U,V);  % Rueckwaers Substitution mit U
  plot(x,V);
  drawnow; pause(0.1);
end
```

Berichte über die Effekte von Änderungen der Werte $r, k, d \geq 0$. Hinweise: $r$eaktion, $k$onvektion und $d$iffusion.