Übungen für das Proseminar aus Differentialgleichungen für LAK

1. Entwickle ein Modell für den freien Fall eines Körpers, und kritisiere dieses Modell. Nimm an, dass die Anfangshöhe und die Anfangsgeschwindigkeit des Körpers H beziehungsweise 0 sind, und leite die Fallzeit und die Aufprallgeschwindigkeit her.

2. Entwickle ein Modell für die Interaktion zwischen einem Räubertier und seinem Beutetier, z.B. Haifische und Sardellen, und kritisiere dieses Modell. Leite ein Gleichgewicht her, in dem die Tiere ihre Zahlen nicht ändern.

3. Schreibe eine Differentialgleichung, möglicherweise als mathematische Formulierung eines Modells. Definiere eine unendliche Menge von Lösungen und zeige, dass diese Lösungen sind. Weiters zeige, dass eine bestimmte Lösung durch Zusatzbedingung(en) ausgewählt wird.

4. Gib eine unendliche Menge von Lösungen für das folgende Problem an:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y' &=& 2\sqrt{y} \\ y(0) &=& 0 \end{array} \right.$$

   Hinweis: Betrachte die Lösungskurven für die im Skriptum gegebenen Lösungen $y_1(x) \equiv 0$ und $y_2(x) = x^2$. Klebe Teile von solchen zusammen und verschiebe das Ergebnis beliebig.

5. Gib eine Differentialgleichung an, deren Richtungsfeld wie in Abbildung 2.3 im Skriptum aussieht.

6. Für die im Skriptum gegebene Differentialgleichung, $y' = -xy$, zeige dass das Richtungsfeld und die Isoklinen wie in Abbildung 2.4 aussehen.

7. Für die logistische Differentialgleichung,

$$P'(t) = P(t)[1 - P(t)]$$

   (a) Finde obere und untere Zäune, die einen Trichter definieren, und verifiziere das Ergebnis des Trichtersatzes.

   (b) Finde obere und untere Zäune, die einen Antitrichter definieren, und verifiziere das Ergebnis des Antitrichtersatzes.

   (c) Finde obere und untere Zäune, die die Bedingungen des Satzes über Eindeutigkeit einer Antitrichterlösung erfüllen.

8. Durch einen gewissen See mit einem konstanten Volumen V strömt ein Fluss ab und zu mit der selben Zufluss- und Abflussrate r.

$$\kappa \quad \xrightarrow{r} \boxed{V,\, S} \xrightarrow{r}$$

Größe	Einheit	Größe	Einheit
V	Meter^3	κ	Kilogram/Meter^3
t	Sekunde	S	Kilogram/Meter^3
r	Meter^3/Sekunde	S'	Kilogram/[Sekunde·Meter^3]

   Im Zufluss gibt es einen Schadstoff mit der konstanten Konzentration κ. Angenommen ist der Schadstoff im See zu jeder Zeit $t > 0$ gleichmässig verteilt, d.h. die Konzentration $S(t)$ ist ortsunabhängig. In der Zeit $t = 0$ gibt es keinen Schadstoff im See. Zeige dass der Schadstofftransport (mit einer Mengenbilanz, Änderungsrate = Zufluss − Abfluss) wie folgt modelliert werden kann:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} VS'(t) &=& r\kappa - rS(t), \quad t > 0 \\ S(0) &=& 0 \end{array} \right.$$

9. Löse das obige Anfangswertproblem für die Schadstoffkonzentration.

10. Löse das folgende Anfangswertproblem:

$$\begin{cases} P'(t) &= P(t)[1-P(t)], \quad t>0 \\ P(0) &= \frac{1}{2} \end{cases}$$

11. Für ein Masse-Feder-System seien die Parameter wie folgt gegeben: Masse $m=1$, Dämpfungskonstante $c=1$ und Federkonstante $k=1$. Sei $s(t)$ in der Zeit t die Verschiebung der Masse von der Ruhelage. Mit dem Newtonschen Gesetz schreibe eine Differentialgleichung für $s(t)$ (wie in der Vorlesung gegeben). Definiere $x=s(t)$ und $y=s'(t)$ und schreibe die Differentialgleichung für $s(t)$ in die Variablen (x,y) um. Für das umgeschriebene System erstelle ein Richtungsfeld in der (x,y)-Ebene, und bestimme, ob es genug Dämpfung in dem System gibt, damit es keine Schwingungen gibt.

12. Für das obige Beispiel, in dem ein Schadstoff durch einen See strömt, sei nun die Zuflusskonzentration $\kappa(t)=e^{-t}$, d.h. die Belastung klingt ab. Seien die verbliebenen Parameter wie folgt gegeben: Flussrate $r=1$ und Volumen $V=1000$. Löse das folgende Anfangswertproblem:

$$\begin{cases} VS'(t) &= r\kappa(t)-rS(t), \quad t>0 \\ S(0) &= 0 \end{cases}$$

13. Löse das Anfangswertproblem:

$$\begin{cases} y'(x) &= e^y \sec y[1+x^2]^{-1} \\ y(0) &= 0 \end{cases}$$

Anhand des Resultats bestätige direkt, dass das hergeleitete Ergebnis tatsächlich eine Lösung ist.

14. Konstruiere eine allgemeine Lösung der folgenden Riccatischen Differentialgleichung:

$$\frac{dU}{dt} = (p_m - p_b)\frac{A}{\nu\rho} - \frac{U^2}{2\nu A}$$

wobei eine bestimmte Lösung vom Gleichgewicht gegeben ist. Finde die bestimmte Lösung, die die Anfangsbedingung $U(0)=2\kappa\nu A$ erfüllt, wobei $\kappa = 1/\text{Sekunde}$.

Hintergrund: Im folgenden Bericht,

`http://dafx04.na.infn.it/WebProc/Proc/P_095.pdf`

beschäftigen sich die Autoren mit Klarinettenrohrblättern (sowie ähnlicherweise mit biologischen Gegenstücken). Die obige Differentialgleichung wird bis Gleichung (22) im obigen Bericht hergeleitet. Zutreffende Größen,

Größe	Definition	Größe	Definition
U	Volumenfluss	ρ	Luftdichte
p_m	Munddruck	ν	Länge der Kontaktoberfläche
p_b	Rohrdruck		zwischen der Luft und dem Blatt
x	Verschiebung des Rohrblatts	$A(x)$	Kanalflächeninhalt an der Blattspitze
y	Koordinate entlang des Rohres		für gegebene Rohrblattverschiebung x

werden teilweise im folgenden Diagramm (aus dem Bericht) dargestellt:

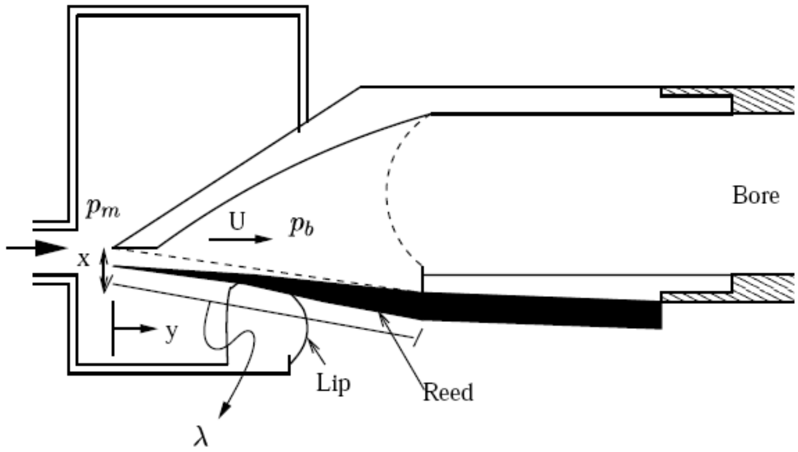


Figure 2: *A simplified diagram of a clarinet reed. The variable p_m represents the mouth pressure, p_b is the pressure in the bore, U is the volume flow, x is the displacement of the reed, y indicates the position along the reed and λ is the length of the unclamped end of the reed.*

Der Kanalflächeninhalt $A(x)$ an der Spitze des Blatts ($y = 0$) hängt von der Verschiebung des Rohrblatts x ab, die im allgemeinen zeitabhängig ist: $x = x(t)$. Diese Rohrblattverschiebung wird von Gleichung (30) im obigen Bericht bestimmt. Zur Vereinfachung nimm an, dass das Rohrblatt in $x = x_0$ befestigt ist. Also gilt $A = A(x_0)$, und die Koeffizienten der Riccatischen Differentialgleichung sind zeitunabhängig. Das Gleichgewicht wird in Gleichung (25) des Berichts gegeben.

15. Nimm an, dass $(p_m - p_b)$ in der obigen Riccatischen Differentialgleichung extrem klein wird, sodass im Endeffekt eine Bernoullische Differentialgleichung sich ergibt. Löse das folgende Bernoullische Anfangswertproblem und vergleiche das Ergebnis mit dem Resultat für die Riccatische Differentialgleichung:

$$\begin{cases} \dfrac{dU}{dt} = -\dfrac{U^2}{2\nu A}, & t > 0 \\ U(0) = 2\kappa\nu A \end{cases}$$

Hintergrund: Genau so wird der erste Term ab Gleichung (31) des Berichts vernachlässigt, um die obige Bernoullische Differentialgleichung herzuleiten.

16. Zeige dass die Differentialgleichung exakt ist, und löse das Anfangswertproblem:

$$\begin{cases} (x^3 + xy^2 \sin 2x + y^2 \sin^2 x) + (2xy \sin^2 x)y' = 0 \\ y(2) = 0 \end{cases}$$

17. Finde einen Eulerschen Multiplikator für die Differentialgleichung, und löse das Anfangswertproblem:

$$\begin{cases} (e^x + \sin y) + \cos y y' = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

18. Löse das Anfangswertproblem mit einer Picardschen Iteration:

$$\begin{cases} y' = -xy \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Hinweis: Die Iteration kann mit einem anderen Lösungsverfahren überprüft werden.

19. Zeige dass die folgenden Funktionen linear unabhängig sind:

$$\boldsymbol{y}_1(t) = \langle t, e^{-t}\sin(t)\rangle^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{y}_2(t) = \langle t^2, \sin(t)\rangle^{\mathrm{T}}.$$

Finde einen Wert t_0 in dem die Vektoren $\{\boldsymbol{y}_1(t_0), \boldsymbol{y}_2(t_0)\}$ linear abhängig sind.

20. Verwende den Probe-Ansatz, $x(t) = e^{mt}$, um 2 linear unabhängige Lösungen der folgenden Differentialgleichung zu finden:

$$x'' + 3x' + 2x = 0$$

Schreibe die Differentialgleichung in erste Ordnung um, und verwende die Wronski-Determinante um zu zeigen, dass die 2 gefundenen Lösungen linear unabhängig sind. Gib die allgemeine Lösung an, und finde die bestimmte Lösung, die die Anfangsbedingungen $x(0) = 1$ und $x'(0) = 0$ erfüllt.

21. Verwende den Probe-Ansatz, $x(t) = e^{mt}$, um 2 linear unabhängige Lösungen der folgenden Differentialgleichung zu finden:

$$x'' + 2x' + 2x = 0$$

Schreibe die Differentialgleichung in erste Ordnung um, und verwende die Wronski-Determinante um zu zeigen, dass die 2 gefundenen Lösungen linear unabhängig sind. Gib die allgemeine Lösung an, und finde die bestimmte Lösung, die die Anfangsbedingungen $x(0) = 1$ und $x'(0) = 0$ erfüllt.

22. Für das Anfangswertproblem,

$$\begin{cases} y'(x) &= f(x,y) \\ y(x_0) &= y_0 \end{cases}$$

gib Beispiele von Funtionen $f(x,y)$ an, wobei die folgenden gelten:

(a) Es existiert keine Lösung in der Nähe des Punktes (x_0, y_0).

(b) Es existiert eine Lösung in der Nähe des Punktes (x_0, y_0), aber sie ist nicht eindeutig.

(c) Die Existenz einer eindeutigen Lösung des Problems ist für alle x gesichert.

23. Für die Differentialgleichung

$$t^2 x''(t) - 2tx'(t) + 2x(t) = 0$$

sei eine Lösung $x_1(t) = t$ gegeben. Schreibe die Differentialgleichung in erste Ordnung um, und verwende das Reduktionsverfahren von d'Alembert, um die in der Vorlesung gegebene zweite Lösung $x_2(t) = t^2$ herzuleiten. (Hintergrund: Diese Lösungen kann man mit dem Probe-Ansatz $x(t) = t^{-m}$ finden, wobei die Formel $t^{-m} = e^{ms}$ sich von der Transformation $t = e^{-s}$ und der Differentialgleichung $x''(s) + 3x'(s) + 2x(s) = 0$ zu erkennen gibt.)

24. Schreibe die inhomogene Differentialgleichung

$$\begin{cases} t^2 x''(t) - 2tx'(t) + 2x(t) = t \\ \quad x(1) = 1, \quad x'(1) = 0 \end{cases}$$

in erste Ordnung um. Mit den in der Vorlesung gegebenen Lösungen der homogenen Differentialgleichung $x_1(t) = t$ und $x_1(t) = t^2$, verwende Variation der Konstanten, um eine particuläre Lösung herzuleiten, und löse das Anfangswertproblem.

25. Nimm an, dass die Parameter des Erdwärmesystems

$$\begin{cases} \rho_1 c_1 V_1 T_1' &= \rho_1 c_1 F(T_z - T_1) &+ hS(T_2 - T_1) \\ \rho_2 c_2 V_2 T_2' &= &+ hS(T_1 - T_2) \\ & & \\ T_1(0) &= T_0 & \\ T_2(0) &= T_0 & \end{cases}$$

so gemessen worden sind, dass das System die folgende Form hat:

$$\begin{cases} \boldsymbol{T}'(t) &= A\boldsymbol{T}(t) + \boldsymbol{f}, \quad t > 0 \\ \boldsymbol{T}(0) &= \boldsymbol{T}_0 \end{cases}$$

wobei:

$$\boldsymbol{T}(t) = \begin{bmatrix} T_1(t) \\ T_2(t) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{T}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Leite die Matrizen

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}(3+\sqrt{5}) & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}(3-\sqrt{5}) \end{bmatrix} \quad S = \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{2}(3+\sqrt{5}) & 1 - \frac{1}{2}(3-\sqrt{5}) \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{\frac{1}{2}(\sqrt{5}-3)+1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{\frac{1}{2}(\sqrt{5}+3)-1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

her, wobei $AS = S\Lambda$ gilt.

26. Finde die allgemeine homogene Lösung der obigen Differentialgleichung.

27. Löse das obige Anfangswertproblem. (Hinweis: Das Ergebnis soll mit der allgemeinen Lösung im Bericht `http://math.uni-graz.at/keeling/EWAnalyse.pdf` übereinstimmen.)

28. Für die Matrix

$$B = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

zeige induktiv:

$$B^n = \begin{bmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} & n(n-1)\lambda^{n-2}/2 \\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & \lambda^n \end{bmatrix}$$

und verwende dieses Ergebnis um zu zeigen:

$$e^{Bt} = e^{\lambda t} \begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

29. Für die Matrix

$$A = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -5 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

finde eine invertierbare Matrix S sodass

$$B = SAS^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

30. Für die Matrix des letzten Beispiels

$$A = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -5 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

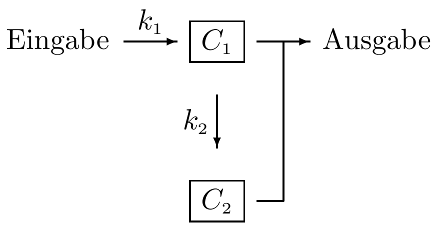
finde 3 lineare unabhängige Lösungen der homogenen Differentialgleichung $\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y}$.

31. Von der folgenden Differentialgleichung

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

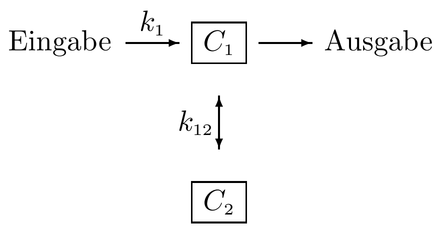
schriebe eine rein x-abhängige Differentialgleichung und eine rein y-abhängige Differentialgleichung. Löse die umgeschriebenen Differentialgleichungen, um das obige Problem zu lösen.

32. Finde ein Phänomen, das mit dem folgenden rein konvektiven Transport modelliert werden kann:



wähle realistische (beliebig einfache) Parameter und löse ein entsprechendes Anfangswertproblem.
(Hinweis: siehe Abschnitt 2 in `http://math.uni-graz.at/invcon/medimage/kernel1.pdf`.)

33. Finde ein Phänomen, das mit dem folgenden konvektiven und diffusiven Transport modelliert werden kann:



wähle realistische (beliebig einfache) Parameter und löse ein entsprechendes Anfangswertproblem.
(Hinweis: siehe Abschnitt 2 in `http://math.uni-graz.at/invcon/medimage/kernel1.pdf`.)

34. Für ein Masse-Feder-System seien die Parameter wie folgt gegeben: Masse $m = 1$, Dämpfungskonstante $c = 1$ und Federkonstante $k = 1$. Sei $s(t)$ in der Zeit t die Verschiebung der Masse von der Ruhelage. Mit dem Newtonschen Gesetz schreibe eine Differentialgleichung für $s(t)$ (wie in der Vorlesung gegeben). Die Masse wird gezogen und los gelassen, also gelten $s(0) = 1$ und $s'(0) = 0$. Stelle die resultierende Verschiebung $s(t)$ graphisch dar. Bestimme, ob es genug Dämpfung in dem System gibt, damit es keine Schwingungen gibt.

35. Das obige Masse-Feder-System wird nun von einer äusseren Kraft $f(t) = \sin(t)$ mit den gleichen Anfangsbedingungen getrieben. Wähle die kleinste (*kritische*) Dämpfungskonstante c, mit der es keine Schwingungen gibt, und stelle die resultierende Verschiebung $s(t)$ graphisch dar.

36. Das Masse-Feder-System mit kritischer Dämpfung wird nun von einer äusseren Kraft $f(t) = 1$ getrieben. Finde das Gleichgewicht für das System, und mit Hilfe expliziter Lösungen für Störungen bestimme ob das Gleichgewicht stabil ist oder nicht.

37. Anhand der entsprechenden Definitionen beweise dass jedes Gleichgewicht der folgenden Differentialgleichung

$$y'(t) = f(y(t)), \quad f(y) = \begin{cases} -(y+\gamma), & y \leq -\gamma \\ -(y-\gamma), & y \geq \gamma > 0 \\ 0, & -\gamma \leq y \leq \gamma \end{cases}$$

stabil aber nicht asymptotisch stabil ist.

38. Für das obige Masse-Feder-System definiere $x = s(t)$ und $y = s'(t)$ und schreibe die Differentialgleichung für $s(t)$ in die Variablen $\boldsymbol{x} = \langle x, y\rangle^{\mathrm{T}}$ und $\boldsymbol{u} = \langle u, v\rangle^{\mathrm{T}} = S^{-1}\boldsymbol{x}$ in erster Ordnung um:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad AS = S\Lambda, \quad (\Lambda \text{ diagonal}), \qquad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' = \Lambda \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Definiere eine Potential-Landschaft $P(\boldsymbol{x} = S\boldsymbol{u})$, wobei

$$\Lambda \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = -\nabla_{\boldsymbol{u}} P(u,v) = -S^{\mathrm{T}} \nabla_{\boldsymbol{x}} P(x,y),$$

gilt, und daher gilt

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = S(S^{-1}AS)S^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = S\Lambda \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = -S\nabla_{\boldsymbol{u}} P(u,v) = -SS^{\mathrm{T}} \nabla_{\boldsymbol{x}} P(x,y).$$

Für eine Dämpfungskonstante $c > 2$ stelle diese Potential-Landschaft graphisch dar. Bemerke dass $P(x,y)$ für $c > 2$ eine Liapunov-Funktion ist:

$$P(\boldsymbol{x})' = \nabla_{\boldsymbol{x}} P(\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}' = \nabla_{\boldsymbol{x}} P(\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}} A\boldsymbol{x} = -\nabla_{\boldsymbol{x}} P(\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}} SS^{\mathrm{T}} \nabla_{\boldsymbol{x}} P(\boldsymbol{x}) = -\|S^{\mathrm{T}} \nabla_{\boldsymbol{x}} P(\boldsymbol{x})\|^2 \leq 0.$$

39. Zeige dass das obige Masse-Feder-System für jede positive Dämpfungskonstante asymptotisch stabil ist. Zeige dass das System für $c = 0$ stabil aber nicht asymptotisch stabil ist.

40. Stelle die Trajektorien der Lösungen der folgenden Differentialgleichung grafisch dar:

$$\begin{aligned} x' &= -y \\ y' &= -x \end{aligned}$$

41. Stelle die Trajektorien der Lösungen der folgenden Differentialgleichung grafisch dar:

$$\begin{aligned} x' &= -x + y + 1 \\ y' &= -x - y - 3 \end{aligned}$$

42. Gib eine Potential-Landschaft $P(x,y)$ mit mindestens einem Minimum und einem Maximum an, und stelle die Trajektorien der Lösungen der Differentialgleichung $\langle x', y'\rangle^{\mathrm{T}} = -\nabla P(x,y)$ grafisch dar.

43. Beweise dass es genau eine Lösung für das folgende Problem für alle x gibt:

$$\begin{cases} y' &= f(x,y) \\ y(x_0) &= y_0 \end{cases}$$

wenn die folgende Ungleichung gilt:

$$|f(x,y) - f(x,\bar{y})| \leq L|y - \bar{y}|, \quad \forall x, y, \bar{y}$$

44. Definiere eine Potential-Landschaft $P(x,y)$, wobei die Punkte $x^2 + y^2 = 1$ anziehend für die Lösungen der Differentialgleichung $\langle x', y'\rangle^{\mathrm{T}} = -\nabla P(x,y)$ sind. Mit dieser $P(\boldsymbol{x})$ schreibe eine Differentialgleichung $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x} - \nabla P(\boldsymbol{x})$, wobei die Menge $x^2 + y^2 = 1$ ein Grenzzyklus ist.

45. Finde die Eigenfunktionen und Eigenwerte des folgenden Sturm-Liouvillschen Problems:

$$y'' + \lambda y = 0, \qquad y'(0) = 0, \quad y'(1) = 0.$$