Analysis 2 — Musterlösung Klausur 1

Daniel Kraft

10. Juni 2014

1. Man betrachte die Funktion $f : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$.

   (a) Finden und beweisen Sie eine Formel für die n-te Ableitung $f^{(n)}$ für allgemeines $n \in \mathbb{N}$.

Solution: Für die ersten Ableitungen gilt:

$$\begin{aligned} f^{(0)}(x) &= (x+1)^{-\frac{1}{2}} \\ f^{(1)}(x) &= -\frac{1}{2}(x+1)^{-\frac{3}{2}} \\ f^{(2)}(x) &= \frac{1}{2}\frac{3}{2}(x+1)^{-\frac{5}{2}} \\ f^{(3)}(x) &= -\frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{5}{2}(x+1)^{-\frac{7}{2}} \end{aligned}$$

Damit lässt sich vermuten, dass

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \left(\prod_{k=1}^{n} (2k-1) \right) 2^{-n} (x+1)^{-\frac{2n+1}{2}}. \tag{1}$$

Das Produkt der ungeraden Zahlen kann man, alternativ, auch so schreiben:

$$\prod_{k=1}^{n} (2k-1) = \prod_{k=0}^{n-1} (2k+1) = 1 \cdot 3 \cdots (2n-1) = \frac{(2n)!}{2^n n!}$$

Jede dieser Varianten war für die Klausur in Ordnung.
Beweis der Formel durch Induktion nach n: Induktionsanfang bei $n = 0$ (oder auch $n = 1$) folgt sofort durch einsetzen. Induktionsschritt $n \to n+1$:

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}\right)'(x) &= (-1)^n \left(\prod_{k=1}^{n} (2k-1) \right) 2^{-n} \left((x+1)^{-\frac{2n+1}{2}} \right)' \\ &= (-1)^n \left(\prod_{k=1}^{n} (2k-1) \right) 2^{-n} \left(-\frac{2n+1}{2} \right) (x+1)^{-\frac{2n+3}{2}} \\ &= (-1)^{n+1} \left(\prod_{k=1}^{n+1} (2k-1) \right) 2^{-(n+1)} (x+1)^{-\frac{2(n+1)+1}{2}} \end{aligned}$$

   (b) Stellen Sie die Taylorreihe von f im Entwicklungspunkt $a = 0$ auf und bestimmen Sie den Konvergenzradius.

Solution: Im Entwicklungspunkt $a = 0$ gilt mit (1):

$$f^{(n)}(a) = f^{(n)}(0) = (-1)^n \left(\prod_{k=1}^{n} (2k-1) \right) 2^{-n} \cdot 1^{-\frac{2n+1}{2}} = (-1)^n \left(\prod_{k=1}^{n} (2k-1) \right) 2^{-n}$$

Somit ist die Taylorreihe:

$$T(f)(x;0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\prod_{k=1}^{n} (2k-1) \right) \frac{x^n}{2^n n!} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \cdots$$

Der Konvergenzradius ist:

$$\begin{aligned} \rho &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\prod_{k=1}^{n}(2k-1)}{\prod_{k=1}^{n+1}(2k-1)} \frac{2^{n+1}(n+1)!}{2^n n!} \right| \\ &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{2(n+1)}{2(n+1)-1} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+2}{2n+1} = 1 \end{aligned}$$

2. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine beliebige Funktion. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei die Funktion $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{für } x \in [-n, n] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

definiert. Zeigen Sie:

(a) Die Folge (f_n) konvergiert punktweise gegen f.

Solution: Sei $x \in \mathbb{R}$ fest gewählt. Dann ist $f_n(x) = f(x)$ für alle $n > |x|$, und somit $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.

(b) Sie konvergiert genau dann gleichmäßig, wenn

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0.$$

Solution: Aus der Definition von f_n folgt sofort, dass

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{|x|>n} |f(x)| \tag{2}$$

für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Nehmen wir zuerst an, die Folge konvergiere gleichmäßig. Dann müssen wir zeigen, dass $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$, also dass es zu beliebigem $\epsilon > 0$ ein $M > 0$ gibt, so dass $|f(x)| < \epsilon$ wann immer $|x| > M$. Sei also $\epsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Wegen der gleichmäßigen Konvergenz $f_n \to f$ gibt es dann ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ falls $n \geq N$. Mit (2) (für $n = N$) und der Wahl $M = N$ folgt damit die Behauptung.

Sei jetzt umgekehrt $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ und $\epsilon > 0$ gegeben. Für die gleichmäßige Konvergenz $f_n \to f$ müssen wir $N \in \mathbb{N}$ finden, so dass $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ für alle $n \geq N$. Wir wissen, dass es zu ϵ ein $M > 0$ gibt, so dass $\sup_{|x|>M} |f(x)| < \epsilon$. Damit folgt das Ergebnis wieder aus (2) und der Wahl $N = M$.