ANALYSIS II

Hausaufgaben (Bearbeitung bis 03.07.2014)

H 12.1 *Mehrdimensionale Taylorpolynome II*

Es sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine C^∞-Funktion, welche rotationssymmetrisch um den Ursprung ist, das heißt, für alle x, y mit $\|x\|_2 = \|y\|_2$ gilt $f(x) = f(y)$. Zeigen Sie, dass es eine Potenzreihe $P(t)$ gibt mit

$$Tf(x;0) := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} d^j f(0)(x)^j = P(\|x\|_2^2).$$

Hinweis: Betrachte $g_a(t) := f(ta)$ für ein beliebiges $a \in S^{n-1}$.

H 12.2 *Taylorpolynome und Minima*

Für $k > 0$ habe das k-te Taylorpolynom der C^k-Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ an der Stelle $a = 0$ die Form

$$T_k f(x;0) = f(0) + \frac{1}{k!} d^k f(0)(x)^k.$$

Außerdem gelte $T_k f(x;0) > f(0)$ für alle $x \neq 0$. Zeigen Sie, dass f im Punkt $x_0 = 0$ ein lokales Minimum besitzt. Welche Aussage ergibt sich im Spezialfall $n = 1$?

H 12.3 *Extremstellen von Funktionen in mehreren Variablen I*

Bestimmen Sie alle Extremstellen der Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = \sin(x) + \sin(y) + \sin(x + y)$ sowie die dazugehörigen Funktionswerte.

H 12.4 *Extremstellen von Funktionen in mehreren Variablen II*

Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = 3x^4 - 4x^2y + y^2$. Zeigen Sie, dass für jede Gerade g durch den Ursprung der Punkt $(0, 0)$ ein lokales Minimum von $f|_g$ ist. Ist $(0, 0)$ auch ein lokales Minimum von f als Funktion von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}$?

H 12.5 *Umkehrbarkeit von Funktionen I*

Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sei Lipschitz-stetig mit Konstante $\lambda < 1$. Zeigen Sie, dass die Funktion $g(x) := f(x) + x$ ein Homöomorphismus ist.

Hinweis: Betrachten Sie die Abbildung $h_y(x) := y - f(x)$.

H 12.6 *Umkehrbarkeit von Funktionen II*

Sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \mapsto (x + y + z, xy + yz + zx, xyz)$. Bestimmen Sie alle Stellen (x_0, y_0, z_0), an welchen f lokal invertierbar ist.