ANALYSIS II

Hausaufgaben (Bearbeitung bis 26.06.2014)

H 11.1 *Differenzierbarkeit in mehreren Variablen II*

Zeigen Sie, dass die folgenden Abbildungen differenzierbar sind und bestimmen Sie ihre Jacobi-Matrizen

a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x^2y^3e^{x^2+y^2}$.

b) $g : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $(x_1, x_2) \mapsto \big(\ln(x_1)x_2, \cos(x_1^2)\sin(x_2), \cos(x_1x_2)\big)$.

H 11.2 *Partielle Ableitungen und Differenzierbarkeit I*

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{falls } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{falls } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Ist f differenzierbar in $(0, 0)$? Zeigen Sie, dass $\partial_i\partial_j f$ für alle $i, j = 1, 2$ existieren und vergleichen Sie $\partial_1\partial_2 f$ mit $\partial_2\partial_1 f$.

H 11.3 *Differenzierbarkeit und quadratische Formen*

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und es gelte $f(tx) = t^2f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass es eine $n \times n$ Matrix A gibt, so dass $f(x) = x^{tr}Ax = \sum_{i,j=1}^n A_{i,j}x_ix_j$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Ist A symmetrisch? (Tipp: Definiere, für $x \in R^n$, $\phi(t) = f(tx)$ und betrachte die Ableitungen von ϕ.)

H 11.4 *Richtungsableitungen I*

Es seien $n \in \mathbb{N}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $a \in D$, $f : D \to \mathbb{R}$ in a differenzierbar mit $\|\nabla f(a)\|_2 \neq 0$. Definiere $S^{n-1} = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \|v\|_2 = 1\}$ und $w = \nabla f(a)/\|\nabla f(a)\|_2$. Zeigen Sie, dass für alle $v \in S^{n-1}$ gilt

$$-\partial_w f(a) \leqslant \partial_v f(a) \leqslant \partial_w f(a).$$

Interpretieren Sie das Ergebnis.

H 11.5 *Differenzierbarkeit in mehreren Variablen III*

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & \text{falls } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{falls } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Zeigen Sie, dass für jede stetig differenzierbare Abbildung $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mit $\phi(0) = (0, 0)$ und $\phi'(0) \neq (0, 0)$ die Funktion $f \circ \phi$ in 0 differenzierbar ist, dass aber f in $(0, 0)$ nicht differenzierbar ist.

H 11.6 *Mehrdimensionale Taylorpolynome I* **(Zusatzaufgabe, außer Wertung)**

a) Sei $p \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}_0$, $D \subset \mathbb{R}^p$ offen, $a \in D$, $f : D \to \mathbb{R}$ eine C^n-Funktion und $P : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ eine Polynomfunktion vom Grad $\leqslant n$ mit

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - P(x)}{\|x - a\|^n} = 0.$$

Zeigen Sie: Für alle $x \in D$ gilt $P(x) = T^nf(x; a)$.
(Tipp: Betrachte zunächst $p = 1$ und dann, für $x \in D$, $P(tx) = \sum_{i=0}^n t^iP_i(x)$ wobei P_i alle Potenzen, die sich auf i summieren, zusammenfasst.)

b) Seien $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| < 1\}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x, y) = 1/(1 - x - y)$. Bestimmen Sie, für $n \in \mathbb{N}_0$, das n-te Taylorpolynom von f im Nullpunkt.
(Tipp: Geometrische Reihe.)