ANALYSIS II

Hausaufgaben (Bearbeitung bis 05.06.2014)

H 10.1 *Vergleich von* p*-Normen*

Im Folgenden stehe $\mathbb{K}$ für $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

a) Sei $1 \leqslant p \leqslant q < \infty$. Zeigen Sie $\|x\|_q \leqslant \|x\|_p$ für alle $x \in \mathbb{K}^n$. (Hinweis: Betrachte zunächst $\|x\|_p = 1$.)

b) Zeigen Sie für alle $x \in \mathbb{K}^n$: $\lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$.

H 10.2 *Ein unvollständiger metrischer Raum*

$X = C([0,1])$ werde versehen mit der Norm, die durch das Skalarprodukt $\langle f, g\rangle = \int_0^1 (fg)(x)dx$ induziert wird. Beweisen Sie durch Konstruktion eines Beispiels, dass X bezüglich dieser Norm nicht vollständig ist.

H 10.3 *Folgen und kompakte Mengen in metrischen Räumen*

a) Zeigen Sie: Jede konvergente Folge in einem metrischen Raum ist beschränkt.

b) Sei X metrischer Raum und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X, die gegen $a \in X$ konvergiert. Zeigen Sie mit Hilfe offener Überdeckungen, dass die Menge $A := \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{a\}$ kompakt ist.

c) Zeigen Sie durch Konstruktion einer geeigneten Überdeckung, dass die Menge $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$ nicht kompakt ist. Widerspricht dies Teil b) ?

H 10.4 *Stetigkeit von Funktionen mehrerer Variablen II*

Untersuchen Sie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{für } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

auf Stetigkeit.

H 10.5 *Differenzierbarkeit in mehreren Variablen I*

Beweisen Sie die Differenzierbarkeit von

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x,y,z) = (x + e^z + y, yx^2)$$

a) anhand der Definition,

b) anhand der Eigenschaften der partiellen Ableitungen.

H 10.6 *Vektorraum der reellwertigen Polynome* **(Zusatzaufgabe, außer Wertung)**

Sei $\mathcal{P}$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der reellwertigen Polynome auf $\mathbb{R}$. Für ein Polynom $p(t) = \sum_{k=0}^n a_k t^k$ setzen wir $\|p\| = \sum_{k=0}^n |a_k|$.

a) Zeigen Sie, dass dies einen normierten Raum definiert.

b) Die linearen Abbildungen $\ell : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ seien definiert durch

$$\ell(p) = p'(0) \text{ bzw. } \ell(p) = p'(1).$$

Bestimmen Sie gegebenenfalls (!) die Operatornormen, die im unendlichdimensionalen Raum $\mathcal{P}$ wie für den Raum $L_{n,m}$ aus der Vorlesung definiert ist:

$$\|\ell\| := \sup\{|\ell(p)| : \|p\| \leqslant 1\}.$$